

# Radiazione e Relativita' Ristretta

## IV – Campi e radiazione da una carica puntiforme

# Equazioni d'onda inhomogenee

Per i potenziali sappiamo che, nel gauge di Lorentz, valgono le equazioni d'onda inhomogenee (termine noto):

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

con le soluzioni "stile Poisson" viste a suo tempo.

Ci interessa cercare soluzioni a queste equazioni nel caso particolare in cui  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  siano quelle corrispondenti ad una carica puntiforme ( un 'elettrone' classico...) in moto qualsiasi

# Carica puntiforme - I

Se  $q$  e' statica, ossia se la sua posizione e' indipendente da  $t$ :

$$\rho(\mathbf{r}') dv' = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$$

$$\rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

Estensione al continuo della  $\delta$  di Kronecker:  $\delta$  di Dirac

$$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

$$\int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dv' = 1$$

Volume che include  $\mathbf{r}_0$

Non una funzione in senso rigoroso

# Carica puntiforme - II

Se  $q$  e' in moto, allora avremo in generale:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

dove  $t_r$  e' il tempo ritardato  $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ .

La difficolta' nel calcolo di  $\phi$  ed  $\mathbf{A}$  sta nel fatto che  $t_r$  non e' un tempo fisso, ma, fissati  $\mathbf{r}$  e  $t$ , dipende da  $\mathbf{r}'$ .

Si noti che tutti gli istanti precedenti a  $t$  concorrono a determinare il potenziale all'istante  $t$ , a seconda della distanza da  $\mathbf{r}$  del volumetto  $dv'$ .

# Carica puntiforme - III

Nel caso che ci interessa le densita' di carica e corrente si scrivono:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)] \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)] \end{aligned} \right\} \mathbf{x}(t) \text{ traiettoria del punto}$$

il che porta alla seguente espressione per i potenziali:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t_r)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{q\mathbf{v}(t_r)\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

# Carica puntiforme - IV

L'espressione trovata è difficile da integrare, perché  $t_r = t - (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/c$ , in cui  $\mathbf{r}'$  dipende da  $t$ : occorre cioè conoscere la traiettoria della carica istante per istante. Per semplificare le cose, si ricorre ad un artificio, che sembra una apparente complicazione: si cambia l'integrando in

$$\frac{q\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t_r)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{q\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t_r)$$

aggiungendo ovviamente un'integrazione su  $t'$ .

*Questo equivale a integrare sull'intera traiettoria, restringendo l'integrale di volume allo sviluppo della traiettoria nell'intervallo temporale  $(-\infty, +\infty)$ , selezionando punto per punto l'istante  $t'$  appropriato*

# Carica puntiforme - V

Infatti:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \int \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')] \delta(t' - t_r) dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int \frac{q\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')] \delta(t' - t_r) dv'$$

$$\rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} \delta(t' - t_r)$$

$$\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} \delta(t' - t_r)$$

# Carica puntiforme - VI

Proprietà della  $\delta$ :

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^{n_{\text{zeri}}} \frac{\delta(x - x_i)}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_i}}, \{x_i\} = \text{insieme degli zeri di } f$$

Nel ns caso, chiamato  $t^*$  lo zero dell'argomento:

$$f(t') = t' - \left( t - \left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}(t')}{c} \right| \right)$$
$$\delta \left[ t' - \left( t - \left| \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}(t')}{c} \right| \right) \right] = \frac{\delta[t' - t^*]}{\left. \frac{\partial f}{\partial t'} \right|_{t'=t^*}}$$

# Carica puntiforme - VII

Il denominatore si calcola con la regola della derivata di una funzione composta per il tramite di piu' variabili (in questo caso,  $t$  e' una funzione di  $t'$  tramite  $\mathbf{x}(t')$  ...):

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt'}$$
$$\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t'}} = \frac{1}{1 - \nabla_{\mathbf{x}} t \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt'}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} \cdot \mathbf{v}(t')} \Bigg|_{t'=t_r}$$

# Carica puntiforme - VIII

Introducendo i vettori

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|}$$

*Versore della direzione  
punto-campo  $\rightarrow$  punto-carica a  $t$  ritardato*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \equiv \boldsymbol{\beta}c$$

*Velocita' della carica al tempo ritardato*

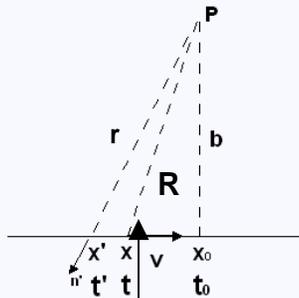
si trova l'espressione finale dei potenziali di Lienard-Wiechert :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \Big|_{t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \Big|_{t'=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c}$$

# Moto uniforme - I

Si trova in questo caso per i potenziali:



Questo e'  $\Theta$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{\sqrt{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta}}$$

$\mathbf{r}$  = posizione al tempo ritardato - pos. punto di osservazione

$\mathbf{R}$  = posizione al tempo attuale - pos. punto di osservazione

# Moto uniforme -II

Dai potenziali si ricavano i campi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta\right)\right]^{3/2}};$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E};$$

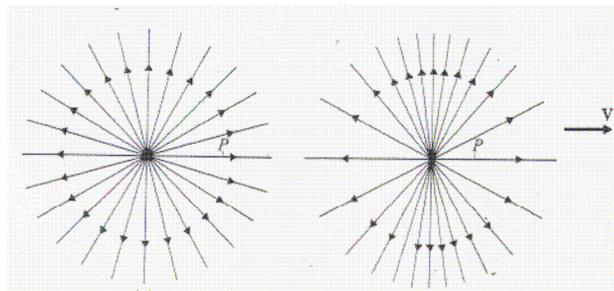
$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = 0, \pi \rightarrow E = E_{Coul} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) < E_{Coul} \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow E = \frac{E_{Coul}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > E_{Coul} \\ \Theta = 0, \pi \rightarrow B = B_{B-S} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) < B_{B-S} \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow B = \frac{B_{B-S}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > B_{B-S} \end{array} \right.$$

**E** radiale, **B** alla Biot-Savart

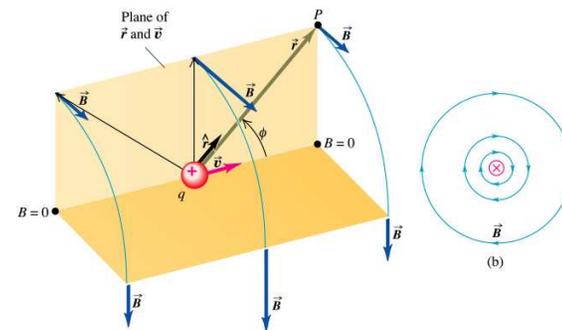
Le linee di **E** sono radiali ma *non* isotrope: piu' fitte a  $\pi/2$ , piu' rade a  $0, \pi$   
 Le linee di **B** sono cerchi  $\perp$  e concentrici a  $\mathbf{v}$ , con densita' come sopra

# Moto uniforme - III

Campo  $\mathbf{E}$



Campo  $\mathbf{B}$



Modo di intendere la cosa: ad un dato istante, si 'fotografa' la particella in movimento insieme alle sue linee di campo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta\right]^{3/2}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{Coulomb}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad \text{Biot-Savart}$$

# Moto accelerato - Campi

Le espressioni per i potenziali di Lienard-Wiechert trovate prima sono generali; tuttavia per ricavare i campi le cose sono piu' complicate quando la carica e' accelerata.

Il risultato, al termine di calcoli lunghi, e' il seguente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(r - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}\right)^3} \left\{ \underbrace{\left(\mathbf{r} - r \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}_{\text{parte convettiva, o di velocita'}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \left[ \left(\mathbf{r} - r \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}_{\text{parte radiativa, o di accelerazione}} \right\}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}$$

Parte convettiva: come quella di una carica in moto uniforme

Parte radiativa: nuova

# Il campo di radiazione

Nelle espressioni trovate prima, come atteso:

un termine  $\propto 1/r^2 \rightarrow$  *non conta* nella zona d'onda

un termine  $\propto 1/r \rightarrow$  *conta* nella zona d'onda

*campo di velocita'*

*campo di accelerazione*

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \times \left[ \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}{c^2 \left( 1 - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^3} \propto \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \mathbf{r} \times \mathbf{E}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$

# Vettore di Poynting

Nel limite non relativistico  $v/c \rightarrow 0$ , le formule precedenti si scrivono:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{n}} \times \left( \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{rad}$$

Il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

# Potenza irradiata - I

La potenza irradiata per unita' di angolo solido si trova nel solito modo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{S}| r^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 r^2 = \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3 \epsilon_0^2} \left| \hat{\mathbf{n}} \times \left( \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right|^2$$

Questo si puo' scrivere, essendo  $\Theta$  l'angolo fra accelerazione e direzione di propagazione:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{64\pi^3 \epsilon_0^2} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \Theta$$

# Potenza irradiata - II

La formula precedente mostra una totale rassomiglianza con quella per la radiazione di un dipolo (v. seguito):

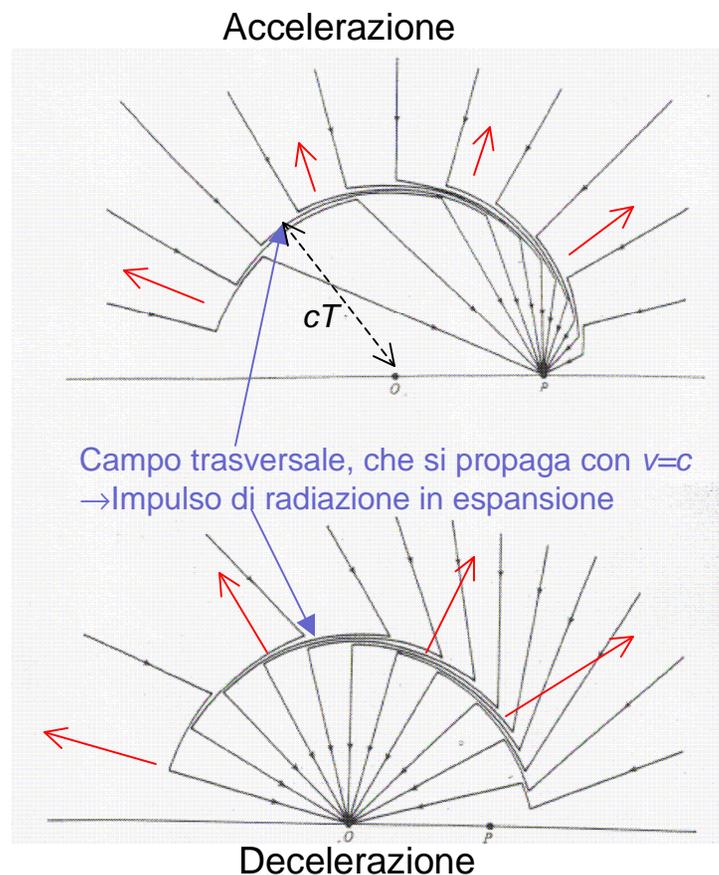
$$\frac{dP}{d\Omega} = \left( \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \sin^2 \theta \rightarrow \text{mom. di dipolo equivalente } p_0 = aq / \omega^2$$

La potenza irradiata totale si ottiene integrando su tutto l'angolo solido, e viene:

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2$$

Questa e' la *formula di Larmor* per la potenza emessa (quando la velocita' e' bassa in confronto a  $c$ )

# L'origine del campo di radiazione



*Accelerazione: si considera una carica che è inizialmente ferma → il campo è Coulombiano.*

*Poi si 'fotografa' il campo dopo che la carica ha e' stata soggetta a un'accelerazione  $\mathbf{a}$ , di durata  $T$  → il campo e' quello di una carica in moto con velocità  $\mathbf{v}=\mathbf{a}T$*

*Decelerazione: sequenza opposta*

*In entrambi i casi:*

*La velocità finita di propagazione dei campi e.m. mostra che ci deve essere necessariamente una zona di transizione, con campo+i trasversali che si spostano a velocità  $c$  verso l'esterno*

(Grafici da Purcell, Electricity & Magnetism)