Radiazione e Relativita’ Ristretta

IX – Leggi di conservazione, dinamica relativistica

Leggi di Newton e relativita’

Leggi di Newton: principi generali della dinamica, la cui validita’ e’ basata sull’esperienza.

Nella forma con cui le conosciamo, incompatibili con i principi della relativita’ ristretta.

Esempi:

- $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \to \mathbf{v}$ puo' crescere senza limiti per $\mathbf{F}$ = costante

Ma $|\boldsymbol{v}| < c$ secondo la relativita’…

- Principio di azione/reazione: forze uguali e contrarie, *simultaneamente presenti*

Ma la simultaneita’ e’ relativa …

Leggi di conservazione - I

Principali conseguenze delle leggi di Newton:

Leggi di Newton $\rightarrow$ *Leggi di conservazione*

Quantita' di moto
$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \mathrm{cost}$$

Momento angolare
$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{l}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \mathrm{cost}$$

Energia
$$E = \sum_i E_i = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 + V_i \right) = \mathrm{cost}$$

Scritte cosi' per un sistema di punti materiali…

Non il solo percorso logicamente possibile …

Leggi di conservazione - II

Possibile partire da un principio diverso dalle leggi di Newton:

Principio di Minima Azione

Fra le altre conseguenze di questa scelta:

Leggi di conservazione ↔ Proprieta' di simmetria del sistema

Semplificando molto un soggetto non elementare:

Se l'energia totale di un sistema e' invariante rispetto a un insieme di trasformazioni di coordinate, c'e' una grandezza fisica conservata per il sistema

Principi di invarianza - I

Proprieta' di *simmetria/invarianza* dell'energia di un sistema fisico isolato:

Originate da proprieta' fondamentali dello spazio e del tempo

*Invarianza per **traslazioni** → Conservazione **quantita' di moto***

Legata a *omogeneita'* dello spazio

*Invarianza per **rotazioni** → Conservazione **momento angolare***

Legata a *isotropia* dello spazio

*Invarianza per **traslazione temporale** → Conservazione **energia***

Legata a *omogeneita'* del tempo

Osservazione molto importante:

Conservazione della massa? Nessuna proprieta' di invarianza…

Principi di invarianza - II

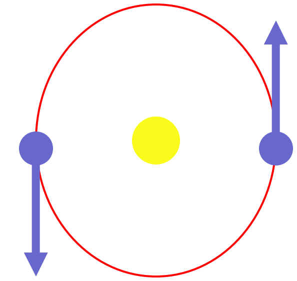
Invarianza per ***traslazioni*** $\rightarrow$ Conservazione ***quantita' di moto***

Esempio: Moto della Terra - Sole

1. Si considera il Sole come un punto fisso nell'origine

$\rightarrow$L'energia potenziale (e quindi quella totale) della Terra *non e'* invariante per uno spostamento generico dell'origine degli assi:

$$\begin{cases} V(r) = G\dfrac{mM}{|\mathbf{r}_T|} \\ \{T : \mathbf{r}_T \rightarrow \mathbf{r}_T' = \mathbf{r}_T - \mathbf{a}\} \end{cases} \rightarrow V(r) \rightarrow V(r') = G\frac{mM}{|\mathbf{r}_T'|} = G\frac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{a}|} \neq V(r)$$

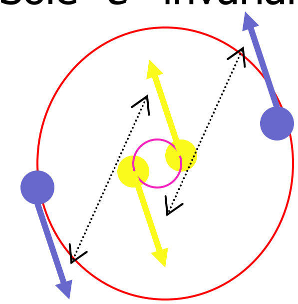


$\rightarrow \mathbf{p}_{Terra}$ non e' costante

2. Si considera il Sole come parte del sistema

$\rightarrow$L'energia potenziale (e quindi quella totale) del sistema Terra+Sole *e'* invariante per uno spostamento generico dell'origine degli assi:

$$\begin{cases} V(r) = G\dfrac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S|} \\ \{T : \mathbf{r}_{T,S} \rightarrow \mathbf{r}_{T,S}' = \mathbf{r}_{T,S} - \mathbf{a}\} \end{cases} \rightarrow V(r) \rightarrow V(r') = G\frac{mM}{|\mathbf{r}_T' - \mathbf{r}_S'|} = G\frac{mM}{|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_S|} = V(r)$$



$\rightarrow \mathbf{p}_{Terra} + \mathbf{p}_{Sole}$ $(= 0$ nel CdM$)$ e' costante

Principi di invarianza - III

Illustrazione della relazione invarianza-conservazione

Per una coppia di punti materiali che interagiscono tramite un potenziale funzione delle posizioni:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$

$$V(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \simeq V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \nabla_1 V \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla_2 V \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\nabla_1 V + \nabla_2 V) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

Invarianza di V:

$$V(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \to (\nabla_1 V + \nabla_2 V) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \to \nabla_1 V + \nabla_2 V = 0$$

$V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ condizione sufficiente per invarianza

Poiche' $\mathbf{F} = -(\nabla_1 V + \nabla_2 V)$

Invarianza di $V \;\to\; \mathbf{F} = 0 \;\to\; \mathbf{P} = $ cost

Principi di invarianza - IV

Vista la loro origine, le leggi di conservazione si possono assumere come valide per un sistema isolato (e conservativo), sia che restiamo nell'ambito pre-relativistico, sia che ci poniamo nel quadro della RR.

Ora: sappiamo che, se le TdG vengono sostituite dalle TdL, le leggi di Newton devono cambiare.

Per cambiarle:

Assumiamo valide le leggi di conservazione, e cerchiamo:

Nuova definizione di ***p*** *ed E*

Nuova legge del moto

Processi di collisione - I

Caso piu' immediato di applicazione delle leggi di conservazione:

Collisione di due masse uguali

Confronto fra trattazione galileiana/newtoniana e TdL

Ipotesi non sempre esplicitamente ricordata:

La massa e' una costante di ogni corpo, indipendente dal SRI in cui viene misurata.

Conseguenza: la massa totale di un sistema isolato e' sempre conservata

Questa ipotesi e' in contrasto con le TdL, se la quantita' di moto deve conservarsi. Motivo: legge relativistica di composizione delle velocita'

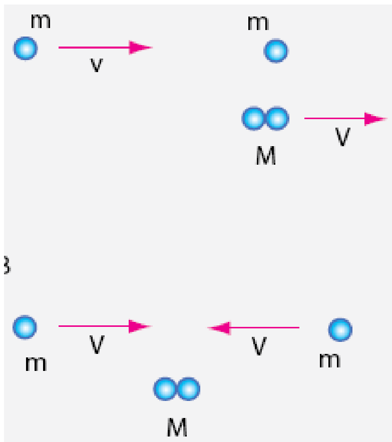
Processi di collisione - II

Esperimento ideale n. 1 (Von Laue):
Collisione completamente anelastica, osservata da due riferimenti inerziali

$$\underset{(1)}{m} + \underset{(2)}{m} \rightarrow M$$

S': Sistema di quiete di 2

S: Centro di massa



Processi di collisione - III

Descrizione galileiana/newtoniana

Ipotesi: *m=m'*, <u>massa indipendente dal SRI in cui e' osservata</u>

Nel SRI *S*, del centro di massa

$$u_1 = V, \quad u_2 = -V$$

$$mV + m(-V) = 0 = Mu' = (m+m)u' \rightarrow u' = 0$$ impulso conservato

NB: $$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV^2 \neq \frac{1}{2}(2m)u'^2 = 0$$ en. cinetica *non* conservata

Nel SRI *S'*, di quiete di *2* (*S* ha velocita' -*V* rispetto a *S'*)

$$\begin{cases} u_1 \rightarrow \bar{u}_1 = u_1 - (-V) = V - (-V) = 2V, u_2 \rightarrow \bar{u}_2 = u_2 - (-V) = -V - (-V) = 0 & \text{TdG} \\ u' \rightarrow \bar{u}' = u' - (-V) = 0 - (-V) = V & \text{TdG} \end{cases}$$

$$\rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = m2V, M\bar{u}' = 2mV \rightarrow m\bar{u}_1 + 0 = M\bar{u}'$$ OK impulso conservato

Processi di collisione - IV

Trattazione relativistica

Nel SRI del centro di massa, ancora:

$$\begin{cases} u_1 = u, \quad u_2 = -u \\ u' = 0 \end{cases}$$

Quindi la quantita' di moto definita classicamente e' ancora conservata in *S*

Ma nel SRI di quiete di 2, se usiamo la legge relativistica di trasformazione delle velocita':

$$u_1 \to \overline{u}_1 = \frac{u_1 - \mathrm{v}}{1 - u_1 \mathrm{v}/c^2} = \frac{u+u}{1+uu/c^2} = \frac{2u}{1+u^2/c^2}, \qquad u_2 \to \overline{u}_2 = \frac{u_2 - \mathrm{v}}{1 - u_2 \mathrm{v}/c^2} = \frac{-u+u}{1-(-u)u/c^2} = 0$$

$$u' \to \overline{u}' = \frac{u' - \mathrm{v}}{1 - u' \mathrm{v}/c^2} = \frac{0-(-u)}{1-0\cdot \mathrm{v}/c^2} = u$$

Se continuiamo ad assumere che la massa sia indipendente dal SRI, la quantita' di moto *non e' conservata in S':*

$$2mu \neq \frac{2mu}{1+u^2/c^2}$$

Processi di collisione - V

Cosa pensiamo si debba continuare a conservare?

Massa: buona evidenza sperimentale (~10^{-6} nelle reazioni chimiche), non conseguente ad alcuna proprieta' di invarianza che sia evidente

Impulso: buona evidenza sperimentale, conseguente a una 'evidente' proprieta' di invarianza

Essendo forzato ad abbandonare una delle leggi di conservazione, Einstein abbandona la prima, per la quale non c'e' ragione di sussistere a priori

Quindi: *massa dipendente dal SRI usato*

Ri-definizione della massa

Supponiamo che la massa dipenda dalla velocita': allora possiamo ancora conservarla, in senso relativistico, insieme all'impulso:

$$\begin{cases} M = m(u') + m(0) \\ Mu = m(u')u' \\ u' = \dfrac{2u}{1 + u^2/c^2} \end{cases} \rightarrow u = u'\frac{m(u')}{m(u') + m(0)} \rightarrow m(u) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Distinzione fra *massa a riposo m(0)* e *massa relativistica m(u)*

[Tuttavia, come si vedra' il concetto di massa relativistica e' alla fine superfluo, e anzi nell'insieme fuorviante]

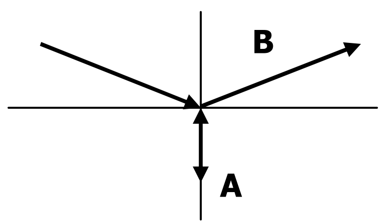
Attenzione: nel fare queste considerazioni, il concetto di massa come misura della 'quantita' della materia' e' da considerarsi del tutto perduto (situazione che gia' si presenta nella meccanica newtoniana: massa come inerzia)

Processi di collisione - VI

Esperimento ideale n. 2 (Lewis e Tolman):

Collisione elastica fra sfere (massa *m*) lanciate fra *A* e *B* lungo *y, y′* con la stessa velocita′ $\pm u$, riferita al proprio SRI di quiete

K: SRI di quiete di *A*



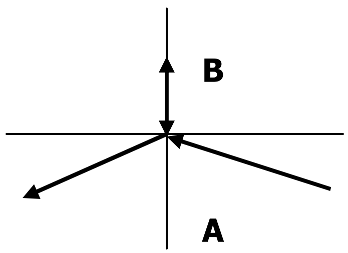
$v_{rel} = v$

Trasf. delle velocita':

$$v_x \to v_x' = \frac{v_x + v}{1 + v v_x / c^2}$$

$$v_y \to v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1 + v v_x / c^2\right)}$$

K′: SRI di quiete di *B*



Componenti della velocita' delle sfere:

$$(A)\begin{cases} v_x = 0 \to v_x = 0 \\ v_y = u \to v_y = -u' \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} v_x = v \to v_x = v \\ v_y = -u\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \to v_y = +u'\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

Componenti della velocita' delle sfere:

$$(A)\begin{cases} v_x = -v \to v_x = -v \\ v_y = u\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \to v_y = -u'\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} v_x = 0 \to v_x = 0 \\ v_y = -u \to v_y = +u' \end{cases}$$

Processi di collisione - VII

Assumiamo in generale:

$\mathbf{p} = m(v)\,\mathbf{v}$

Conservazione della quantita' di moto lungo x:

$$\begin{cases} m\left(v^{in}\right)v_x^{in} = m\left(v^{fin}\right)v_x^{fin} \\ v_x^{in} = v_x^{fin} \end{cases} \rightarrow v^{in} = v^{fin} \rightarrow u' = u$$

Conservazione della quantita' di moto lungo y:

$$m\left(v^{in}\right)v_y^{in} = m\left(v^{fin}\right)v_y^{fin}$$

$$\rightarrow m(u)u - m\left(\sqrt{v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m(u)(-u)\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right) + m\left(\sqrt{v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow m(u)u - m\left(\sqrt{v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0 \rightarrow m(u)u = m\left(\sqrt{v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow m(u) = m\left(\sqrt{v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \underset{u\rightarrow 0}{\rightarrow} m(0) = m(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ri-definizione dell'impulso

Come ridefinire l'impulso alla luce della nuova definizione di massa?

Come nella vecchia definizione, con la nuova massa:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \frac{m(0)}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}\boldsymbol{v} \equiv \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

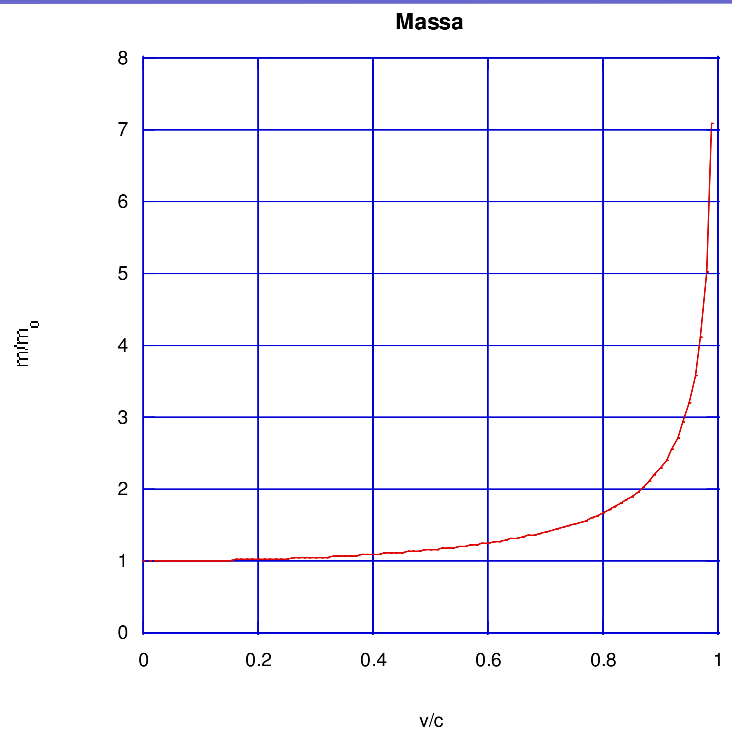
Come visto prima, con questa ri-definizione l'impulso si conserva nelle collisioni (e, in realta', in tutti i processi), in tutti i SRI, in accordo con il principio di relativita'.

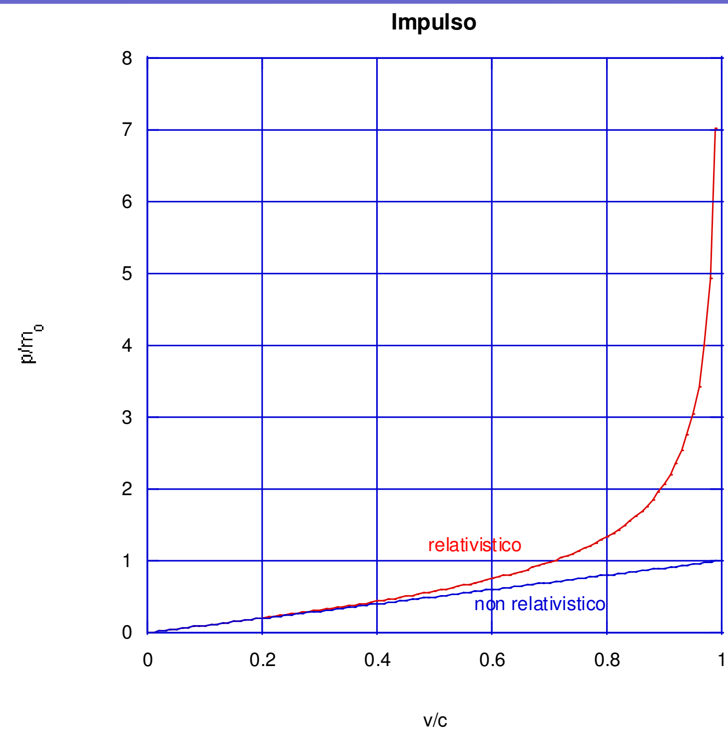
Altro modo di scriverlo:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0\boldsymbol{\beta}c}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\gamma\boldsymbol{\beta}c \xrightarrow[\beta\to 0]{} m_0\boldsymbol{v}$$

che mostra come per piccole velocita' si torni alla definizione pre-relativistica

Andamento con β





Notare la divergenza per $\beta \rightarrow 1$: una particella con velocita' uguale a quella della luce avrebbe massa e quantita' di moto infinite

Ri-definizione dell'energia - I

Relazione classica fra energia cinetica e impulso:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Qualche conticino sull'impulso relativistico:

$$p^2 = m_0^2c^2\beta^2\gamma^2$$

$$\beta^2\gamma^2 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \rightarrow \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \rightarrow \beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\rightarrow p^2 = m_0^2c^2\left(\gamma^2 - 1\right) \rightarrow m_0^2c^2 = m_0^2c^2\gamma^2 - p^2 \rightarrow m_0^2c^4 = m_0^2c^4\gamma^2 - p^2c^2$$

Questa e' una quantita' invariante; questo e' l'impulso relativistico (al quadrato); che cosa e' questo??

Ri-definizione dell'energia - II

Per capirlo, ricordiamo prima di tutto che la quantita' $m_0\gamma$ ha il significato di massa relativistica.

Sviluppiamo in serie:

$$m_0c^2\gamma = m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \underset{\beta\ll 1}{\approx} \frac{m_0c^2}{1-\beta^2/2} \underset{\beta\ll 1}{\approx} m_0c^2\left(1+\beta^2/2\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0\mathrm{v}^2$$

Sorpresa! Nel limite di basse velocita', il termine misterioso si rivela (in parte) del tutto familiare: il secondo pezzo dello sviluppo in serie, infatti, non e' altro che l'energia cinetica classica del corpo in movimento.

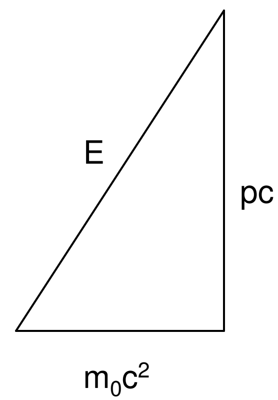
Possiamo allora definire il termine misterioso come *l'energia totale relativistica* del corpo di massa a riposo m_0:

$$E^2 \equiv m_0^2c^4\gamma^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$$

Energia e impulso relativistici - I

Relazione fra i due (di tipo ‘pitagorico’):

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$



Riarrangiando:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Poiche’ questa e’ una costante, questa e’ una quantita’ *invariante* (ossia, ha lo stesso valore in tutti i SRI):

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

quindi viene lasciata invariata da ogni TdL.

Energia e impulso relativistici - II

Situazione simile a quella incontrata per le TdL delle coordinate di un evento: la quantita’

$$\Delta s^2 = \left[\Delta(ct)\right]^2 - (\Delta \boldsymbol{r})^2$$

e’ lasciata invariata da ogni TdL.

Allora, le quantita’ *E* e ***p*** si trasformeranno da un SRI ad un altro con le stesse TdL:

$$p_x' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(p_x - \frac{\mathrm{v}E}{c^2}\right) \qquad p_x = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(p_x' + \frac{\mathrm{v}E'}{c^2}\right)$$

$$p_y' = p_y \qquad p_y = p_y'$$

$$p_z' = p_z \qquad p_z = p_z'$$

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(E - \mathrm{v}p_x/c\right) \qquad E = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(E' + \mathrm{v}p_x'\right)$$

Collisioni anelastiche - I

Consideriamo la solita collisione anelastica fra le particelle 1 e 2, di uguale massa a riposo $m_{0,}$ che 'restano attaccate' a formare una terza particella 3.

Nel SRI del centro di massa

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 0$$

mentre in ogni altro SRI:

$$\boldsymbol{p}_1' + \boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{p}_3'$$

Usiamo le TdL per mettere in relazione i due insiemi di componenti:

$$\begin{cases} p_{x1}' + p_{x2}' = \gamma \underbrace{\left(p_{x1} + p_{x2}\right)}_{=0} - \dfrac{\beta\gamma}{c}\left(E_1 + E_2\right) \\ p_{x3}' = \gamma \underbrace{p_{x3}}_{=0} - \dfrac{\beta\gamma}{c} E_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow E_3 = E_1 + E_2$$

Collisioni anelastiche - II

Dalla definizione di energia totale relativistica, nel SRI *S*:

$$\begin{cases} E_3 = m_{03}c^2 \\ E_1 = E_2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}} \end{cases} \rightarrow m_{03}c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}}$$

$$\rightarrow m_{03}c^2 > 2m_0c^2\ !!$$

La massa a riposo di 3 e' maggiore della somma delle masse a riposo di 1 e 2 !! L'energia cinetica di 1 e 2 e' stata convertita in contributo alla massa a riposo di 3

Quindi e' possibile convertire en. cinetica in massa

$$\Delta E = \Delta m c^2$$