Radiazione e Relativita' Ristretta

VII – Postulati di Einstein e trasformazioni di Lorentz

Postulati della Relativita' Ristretta

I postulato: Principio di relativita' einsteiniano

Le leggi fisiche sono le stesse in ogni SRI

II postulato: Principio della costanza della velocita' della luce

La velocita' della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i SRI

Commenti

Postulati basati su fatti sperimentali:

- *Impossibile identificare un sistema di riferimento assoluto (etere)*
- *Evidenza che qualunque misura della velocita' della luce nel vuoto da' il valore c, indipendentemente dal SRI usato*

Conseguenze

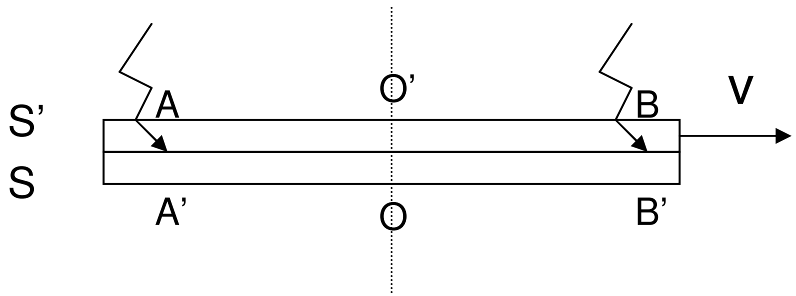
- *Le equazioni della fisica sono invarianti in forma nel passare da un SRI ad un altro*
- *Le trasformazioni di Galilei devono evidentemente essere sostituite*

Relativita' della simultaneita' - I

Due SRI, S e S', in moto relativo; S' ha velocita' v rispetto a S

Per $t = 0$, origini O,O' coincidenti

Due eventi: caduta di due fulmini nei punti A e B (=A',B' per $t=0$)



A causa della velocita' finita di propagazione della luce:

Distinzione fra tempi di emissione e tempi di arrivo dei flash

Per O, fermo in S, equidistante da A e B : arrivi simultanei

Per O', fermo in S': arrivi non simultanei, B' arriva prima di A'

Relativita' della simultaneita' - II

Dai tempi di arrivo O e O' risalgono ai tempi di emissione: la velocita' relativa e' nota, cosi' come la posizione di A,A' e B,B'

Conclusione di O:

$$\begin{cases} t_a = t_A^{arr} - \dfrac{L}{2c} \\ t_b = t_B^{arr} - \dfrac{L}{2c} \end{cases}, \Delta t_{arr} = 0 \rightarrow \Delta t = 0$$

Conclusione di O':

!!!

$$\begin{cases} t_A = t_{A'}^{arr} - \dfrac{L}{2c} \\ t_B = t_{B'}^{arr} - \dfrac{L}{2c} \end{cases}, \Delta t_{arr} \neq 0 \rightarrow \Delta t = \Delta t_{arr} - 0 \neq 0$$

Relativita' della simultaneita' - III

Ma: per il principio di relativita', il punto di vista di *O'* e' valido quanto quello di *O.* Poiche' per *O'* gli eventi *non* sono simultanei questa dovrebbe anche essere la conclusione di *O*, in contrasto con quanto dedotto dallo stesso *O* nel SRI *S*.

Chi ha ragione?

Nessuno dei due, o tutti e due

La simultaneita' di due eventi non ha significato assoluto

Conseguenze…

La relativita' della simultaneita' fa prevedere conseguenze

Misura delle lunghezze: si effettua localizzando simultaneamente gli estremi di un oggetto. Se la simultaneita' e' relativa, metri in movimento relativo segnano lunghezze diverse

→ *La distanza spaziale dipende dal SRI usato!*

Misura dei tempi: si effettua localizzando simultaneamente la posizione delle lancette. Se la simultaneita' e' relativa, orologi in moto relativo segnano un tempo diverso

→*L'intervallo temporale dipende dal SRI usato!*

Concetti di intervallo spaziale e temporale: da intendere come coordinate di un evento (es. emissione di un breve flash luminoso) rispetto a un SRI, piuttosto che in senso geografico/storico…

La trasformazione di Lorentz - I

Come si descrive, nei soliti due SRI, *S* e *S'*, la propagazione del fronte d'onda sferico propagato da un breve flash luminoso?

$$S\ :\ x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$
$$S':x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

Le coordinate *x,y,z,t* rappresentano l'evento "Arrivo del fronte d'onda nel punto *P(x,y,z)* al tempo *t*", visto in *S*

Osservazioni:

c e' la stessa in tutti e due i SRI!

Ci aspettiamo che le coordinate spazio-temporali dell'evento 'arrivo del fronte d'onda' siano diverse in S e S'

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \\ x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

La trasformazione di Lorentz - II

Relazione fondamentale:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Invarianza dell'*intervallo* (spazio-temporale) fra due eventi, rispetto a trasformazioni di coordinate fra due SRI

Come e' fatta la trasformazione, che deve sostituire le TdG?

- *Deve essere lineare (perche' un moto uniforme deve trasformarsi in un moto uniforme…)*
- *Le coordinate trasversali rispetto a v devono rimanere invariate*
- *Deve lasciare invariato l'intervallo definito sopra (costanza di c...)*

La trasformazione di Lorentz - III

Dalle premesse di puo' dedurre la forma delle trasformazioni di Lorentz.

Per il caso in cui:

$$S, S' \text{ hanno assi paralleli}$$

$$\mathrm{v} \parallel x$$

$$S, S' \text{ hanno origini coincidenti per } t = t' = 0$$

esse sono:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}(x - \mathrm{v}t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}\left(t - \mathrm{v}x/\mathrm{c}^2\right)$$

Nel caso generale, equazioni simili, piu' complicate, nelle quali compaiono tutte le componenti della velocita' relativa

La trasformazione di Lorentz - IV

Trasformazione inversa: si trova

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(x'+\mathrm{v}t'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\left(t'+\mathrm{v}x'/\mathrm{c}^2\right)$$

Conformemente all'intuizione, essa si ottiene cambiando *v* in *−v*, che e' la velocita' di *S* vista da *S'*.

Notazione usata universalmente:

$$\beta = \frac{\mathrm{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1\text{-}\,\mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1\text{-}\beta^2}}$$

TdL→TdG, ma …

Nel limite di piccole velocita':

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}\left(x - \mathrm{v}t\right) \xrightarrow[\frac{\mathrm{v}}{c}\to 0]{} x - \mathrm{v}t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}}\left(t - \mathrm{v}x/\mathrm{c}^2\right) \xrightarrow[\frac{\mathrm{v}}{c}\to 0]{} t$$

Le trasformazioni di Lorentz tendono dunque a quelle di Galilei?

Attenzione: se $c\to\infty$, effettivamente le cose stanno cosi' in senso rigoroso; se pero' c resta finita, allora in senso stretto non e' vero che le TdL vanno nelle TdG. Infatti, se x e' sufficientemente grande $t' \neq t$ anche per velocita' basse…

La relativita' della simultaneita' rimane come elemento differenziante fra TdG e TdL anche a piccole velocita'

Conseguenze delle TdL

Tre conseguenze di importanza fondamentale, che istituiscono differenze radicali rispetto alle TdG:

Contrazione delle lunghezze

Perdita della nozione di spazio assoluto: la distanza spaziale fra due punti dipende dal SRI usato per misurarla

Dilatazione dei tempi

Perdita della nozione di tempo assoluto: la distanza temporale fra due eventi dipende dal SRI usato per misurarla

De-sincronizzazione degli orologi

Orologi sincronizzati in un SRI appaiono sfasati, in misura proporzionale alla loro distanza dall'origine, in un altro SRI

Tutte e tre fortemente controintuitive

Contrazione delle lunghezze - I

Sbarra lunga *L* nel suo SRI di riposo; qual e' la sua lunghezza in un SRI in cui essa si muove con velocita' *v, nella direzione della sua lunghezza*?

Le coordinate che definiscono la lunghezza in *S'* sono quelle dei punti che concidono *simultaneamente* in *S'* con gli estremi della sbarra (definizione naturale).

Le distanze *longitudinali* fra punti misurate in un SRI in cui i punti sono in moto sono contratte del fattore $1/\gamma$ rispetto al SRI in cui sono in quiete

Le distanze *trasversali* restano invariate nel passare da un SRI ad un altro

Contrazione delle lunghezze - II

$L = x_2 - x_1$ lunghezza nel sistema di riposo

$L' = x_2'(t') - x_1'(t')$ lunghezza nel sistema in cui la sbarra si muove

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \gamma\left[x_1'(t') + \beta t'\right] \\ x_2 = \gamma\left[x_2'(t') + \beta t'\right] \end{array}\right\} \rightarrow L = \gamma\left[x_2'(t') - x_1'(t')\right] = \gamma L'$$

$$\rightarrow L' = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-\beta^2} < L$$

Effetto difficile da osservare direttamente: non si possono accelerare corpi macroscopici a velocita' vicine a *c*

Molti effetti indiretti lo confermano

Dilatazione dei tempi

Orologio in quiete nell'origine del SRI *S*:

intervallo di tempo fra due eventi = Δt

Intervallo di tempo fra gli stessi eventi misurato in *S'*, in moto con velocita' *v*:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= \gamma t_1 \\ t_2' &= \gamma t_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - t_1\right) > \Delta t$$

Per coppie di eventi che si verifichino in una sola posizione spaziale.

l'intervallo temporale fra i due eventi e' piu' grande in ogni SRI che sia in moto rispetto a quello in cui il punto considerato sia in quiete

De-sincronizzazione degli orologi

Schiera di orologi, equispaziati in *S* della distanza *d*: se in quiete possono essere sincronizzati reciprocamente.

P.es., l'istante *t=0* e' segnato simultaneamente da tutti gli orologi in *S*, indipendentemente dalla loro posizione

Ma in S' i vari orologi segnano:

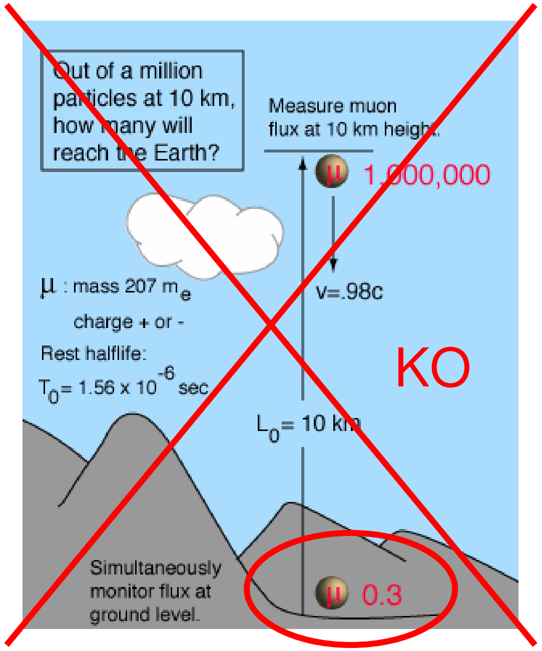
$$t' = \gamma\left(t - \beta x/c\right) \rightarrow t_i' = -\gamma\,\beta x_i/c = -\gamma\,\beta i d/c \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Essi quindi non sono piu' sincronizzati

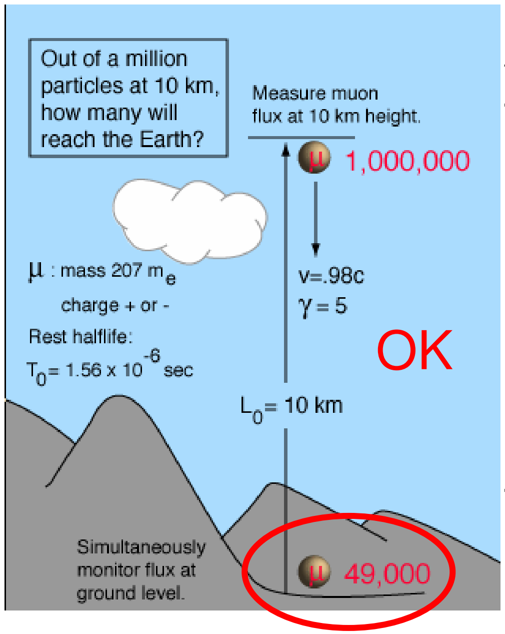
Realta' degli effetti

Non si tratta di effetti illusori, dovuti a qualche manipolazione delle unita' di misura! Modo di dimostrarlo: conseguenze su quantita' misurate

Esempio: decadimento dei muoni cosmici (Rossi e Hall, 1941; ...)



Non relativistico



Relativistico

SRI del terreno:

$\tau = \tau_0\, \gamma = 7.8\ \mu s$

$T = L/v = 10/(0.98\ 300000) = 34\ \mu s$

$I = I_0\, 2^{-T/\tau}$

$I = I_0\, 2^{-34/7.8} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$

SRI del muone:

$L = L_0/\gamma = 0.2L_0 = 2$ km

$T = L/v\ = 6.8\ \mu s$

$I = I_0\, 2^{-T/\tau}$

$I = I_0\, 2^{-6.8/1.56} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$

La contrazione delle lunghezze - I

Non osservata direttamente

Sistemi macroscopici: non viaggiano a velocita' ~ c

Sistemi microscopici: concetto di lunghezza mal definito

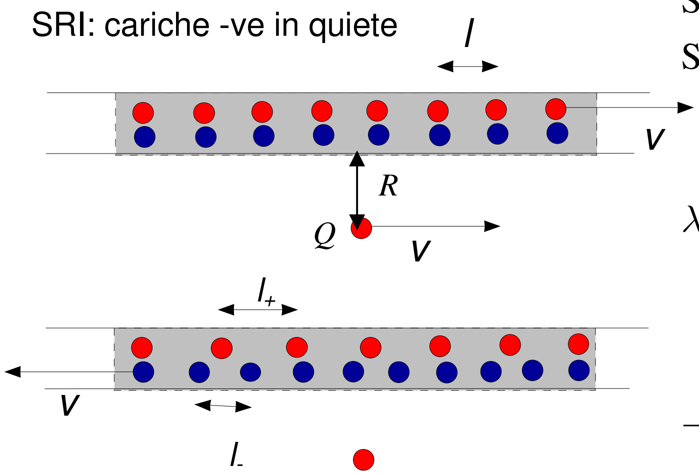
Effetti indiretti molto evidenti

Effetti di dilatazione dei tempi visti in altro SRI

Campo magnetico delle correnti

La contrazione delle lunghezze - II

Corrente in un conduttore: forza su carica di prova Q



SRI: cariche +ve in quiete

$$l = l_+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad l_- = l\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

SRI in alto: densita' di carica totale nulla $\rightarrow$ forza = magnetica

SRI in basso:

$$\lambda = \frac{q}{l_+} - \frac{q}{l_-} = \frac{q}{l}\left(\underbrace{\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\approx 1-\frac{1}{2}\left(v^2/c^2\right)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\approx 1+\frac{1}{2}\left(v^2/c^2\right)}\right) \approx -\frac{q}{l}\left(v^2/c^2\right)$$

$$\rightarrow F = Q\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Qq\left(v^2/c^2\right)}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \quad \text{elettrostatica}$$

Poiche'

$I = qv/l$ corrente

$$\rightarrow F = \frac{QIv}{2\pi\varepsilon_0 Rc^2} = Q\frac{\mu_0 I}{2\pi R}v = Q\left|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right| \quad \text{magnetostatica}$$

La forza sulla carica di prova e' elettrostatica nel suo SRI di quiete.
magnetostatica nel SRI in cui ha velocita' v

Legge di trasformazione delle velocita'

La legge di trasformazione dedotta dalle TdG deve essere cambiata.

Differenziando le TdL:

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-\beta ct) \rightarrow x'+dx'=\gamma[x+dx-\beta c(t+dt)] \\ y'=y \rightarrow y'+dy'=y+dy \\ z'=z \rightarrow z'+dz'=z+dz \\ t'=\gamma(t-\beta x/c) \rightarrow t'+dt'=\gamma[t+dt-\beta(x+dx)/c] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx'=\gamma[dx-\beta cdt] \\ dy'=dy \\ dz'=dz \\ dt'=\gamma[dt-\beta dx/c] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x'=\dfrac{dx'}{dt'}=\dfrac{[dx-\beta cdt]}{[dt-\beta dx/c]}=\dfrac{\dfrac{dx}{dt}-\beta c}{1-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{\beta}{c}}=\dfrac{v_x-\beta c}{1-\dfrac{\beta}{c}v_x} \xrightarrow[v_x\rightarrow c]{} \dfrac{c-\beta c}{1-\beta}=c \quad ! \\ v_y'=\dfrac{dy'}{dt'}=\dfrac{dy}{\gamma[dt-\beta dx/c]}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\gamma\left(1-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{\beta}{c}\right)}=\dfrac{v_y}{\gamma\left(1-\dfrac{\beta}{c}v_x\right)} \\ v_z'=\dfrac{dz'}{dt'}=\dfrac{dz}{\gamma[dt-\beta dx/c]}=\dfrac{\dfrac{dz}{dt}}{\gamma\left(1-\dfrac{dx}{dt}\dfrac{\beta}{c}\right)}=\dfrac{v_z}{\gamma\left(1-\dfrac{\beta}{c}v_x\right)} \end{cases}$$

Accordo con il II postulato

Interpretazione delle esperienze

Interpretazione relativistica di due esperimenti:

- *Aberrazione stellare*
- *Fizeau*

Trattazione relativistica *dell'effetto Doppler*

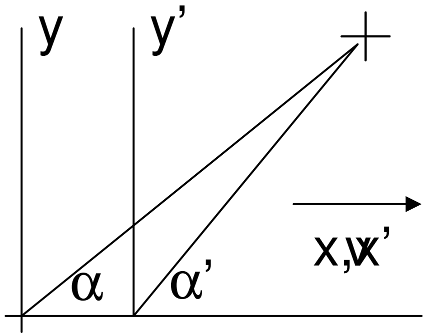
Si usano le TdL e la legge relativistica di composizione delle velocita'

Aberrazione stellare - I

Descrizione relativistica del fenomeno

Evento di emissione del segnale luminoso (supposto istantaneo), che supponiamo si propaghi nel piano *xy*, in *S*:

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$
$$z = 0$$
$$t = -r/c$$



In *S'*, per mezzo delle TdL:

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(r\cos\alpha + \beta c\, r/c\right) \\ y' = r\sin\alpha \\ z' = 0 \end{cases} \rightarrow \tan\alpha' = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin\alpha}{\gamma\left(\cos\alpha + \beta\right)} = \frac{\tan\alpha}{\gamma\left(1 + \beta\sec\alpha\right)}$$

Aberrazione stellare - II

Per $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$, e quindi , in accordo con la formula pre-relativistica:

$$\tan\alpha' \approx \tan\alpha\left(1-\frac{\beta}{\cos\alpha}\right)=\tan\alpha-\frac{\beta\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha' = \tan(\alpha+\delta\alpha)\simeq\tan\alpha+\frac{d(\tan\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha=\tan\alpha+\sec^2 a\delta\alpha$$

$$\to\delta\alpha\sec^2 a\approx-\frac{\beta\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\to\delta\alpha\approx-\beta\sin\alpha\to\delta\alpha\big|_{\alpha=\pi/2}\approx-\beta=-\frac{\mathrm{v}}{c}$$

Inoltre, nella descrizione relativistica si mostra che il fenomeno dell’aberrazione e’ correttamente previsto nella teoria ondulatoria, e non solo nell’approssimazione geometrica dell’ottica dei raggi

Esperimento di Fizeau

Come al solito, due SRI:

S (laboratorio), *S′* (sistema di quiete per l'acqua corrente)

Velocita' della luce in *S′*:

$$\mathrm{v}_x' = c/n, \quad \mathrm{v}_y' = 0, \quad \mathrm{v}_z' = 0$$

In S:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = \dfrac{v_x' + \beta c}{1 + \beta v_x'/c} = \dfrac{c/n + \beta c}{1 + \beta/n} = \dfrac{c}{n}(1 + \beta n)(1 + \beta/n)^{-1} \\ \mathrm{v}_y = 0 \\ \mathrm{v}_z = 0 \end{cases}$$

Per $\beta \to 0$:

OK con dati sperimentali

$$\mathrm{v}_x = \frac{c}{n}(1 + \beta n)(1 + \beta/n)^{-1} \approx \frac{c}{n}(1 + \beta n)(1 - \beta/n) \approx \frac{c}{n}\left(1 + \beta\left(n - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Effetto Doppler in RR - I

Effetto ben noto nella fisica pre-relativistica:

Lunghezza d'onda aumenta se sorgente e ricevitore sono in moto di allontanamento, diminuisce se sono in moto di avvicinamento

Lunghezza d'onda nel SRI di quiete della sorgente: λ_0.

Formula classica:

Due impulsi luminosi emessi con intervallo *dt*; velocita' radiale u_r

$\rightarrow$Differenza di cammino per i due $u_r dt$

$\rightarrow$Differenza di tempo di arrivo per i due $\Delta t = dt + u_r/c\ dt$

$\rightarrow$Differenza di lunghezza d'onda per i due:

$\lambda_0 = c dt$, $\lambda = c\Delta t \rightarrow \lambda/\lambda_0 = 1 + u_r/c$

Effetto Doppler in RR - II

Correzione relativistica

L'intervallo *dt*, definito nel SRI dell'osservatore, corrisponde all'intervallo *dt/*γ nel SRI della sorgente, nel quale viene definita l_0. Quindi:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \gamma\left(1+\frac{u_r}{c}\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(1+\frac{u}{c}\right) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{se } u \equiv u_r \ \text{(pura vel. radiale)}$$

Si noti che, contrariamente al caso pre-relativistico, c'e' cambiamento di lunghezza d'onda anche per puro moto trasversale (*effetto Doppler trasverso*: effetto relativistico)

Effetto Doppler in RR - III