Radiazione e Relativita' Ristretta

X – Massa ed energia, applicazioni

Massa, impulso ed energia - I

Qualche osservazione generale

1. Relazione fra impulso, massa a riposo, en. cinetica:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

2. Se il termine cinetico e' piccolo rispetto a quello di massa:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \sim mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Quindi: *termine di energia a riposo + termine classico*

3. Se il termine cinetico e' dominante:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = pc\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}} \sim pc\left(1 + \frac{m^2c^2}{2p^2}\right) \approx pc$$

Quindi: *Energia* $\propto$ *Impulso*

Massa, impulso ed energia - II

4. Perche' non c'e' il termine a riposo nella meccanica classica?

Conservazione della massa: in ogni processo, le masse dei corpi si conservano: i corpi non perdono la loro identita' nei processi. Assegnare un contributo 'a riposo' all'en. totale di un corpo non modificherebbe le regole che governano i processi

5. Particelle a massa nulla:

$$m = 0 \rightarrow E = pc$$

Esempi: fotone, neutrino, che si muovono con *velocita' = c* in ogni SRI

Per esse: *en. totale = en. cinetica*

Massa, impulso ed energia - III

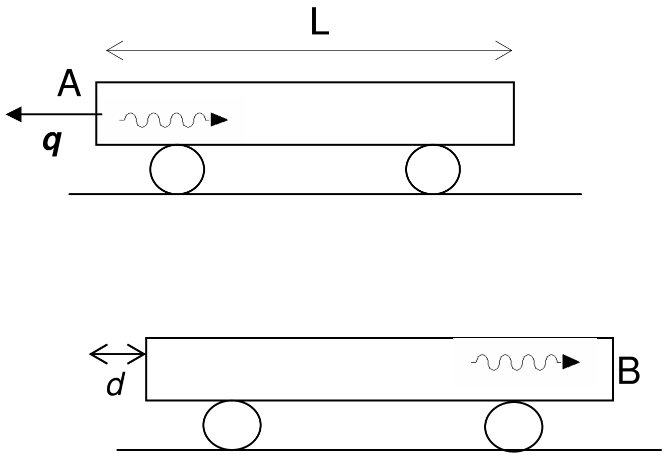
La distinzione fra termine cinetico e termine a riposo ha senso, perche' quest'ultimo e' un termine uguale in tutti i SRI per ogni corpo. Nondimeno, in un processo qualsiasi (v. collisioni) cio' che si conserva strettamente e' l'en. totale in senso relativistico, e non i singoli contributi: questa e' la differenza essenziale rispetto alla meccanica pre-relativistica

L'altro aspetto del tutto nuovo e' l'attribuzione di *inerzia* (ossia, di un contributo alla caratteristica che determina la dinamica di un sistema fisico) ad ogni forma di energia: pre-relativisticamente, questa era una proprieta' delle sole masse.

L’argomento di Einstein

L’ inerzia dell’energia e’ uno dei concetti originali della RR.

Fu introdotto originariamente da Einstein con il seguente ‘esperimento concettuale’:



Scatola chiusa, ferma; usa sorgente *A* emette un impulso luminoso, di durata $t<<L/c$ ed energia E. La quantita’ di moto associata e’ $q=E/c$, che viene compensata da una quantita’ di moto uguale e opposta acquistata dal carrello. Dopo un tempo $T=L/c$, l’impulso luminoso viene assorbito all’estremita’ *B*, e il carrello si ferma, dopo aver percorso la distanza $d=qL/Mc$, in cui M e’ la massa del carrello.

Il centro di massa del sistema, che e’ chiuso, non deve pero’ muoversi, naturalmente: quindi occorre attribuire alla radiazione emessa e assorbita una massa m tale da soddisfare:

$$mL - Md = 0 \rightarrow m = M\frac{d}{L} = M\frac{qL}{McL} = \frac{E}{c^2}$$

Equivalenza massa-energia - I

Significato di $\Delta E = \Delta m c^2$

Esempio visto prima: due corpi uguali, di massa *m*, collidono con urto completamente anelastico, formando un terzo corpo di massa *M*

Nel SRI del centro di massa:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_M = 0 \\ M = 2\gamma m \end{cases} \rightarrow M > 2m$$

Descrizione pre-relativistica:

L'en. cinetica dissipata si converte in calore; il terzo corpo ha massa M=2m

Descrizione relativistica:

Come sopra, ma M>2m

Dal punto di vista di una forza esterna che agisce su M, l'effetto e' diverso nei due casi!

L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia

Equivalenza massa-energia - II

Esempi:

1. Urto anelastico fra due sfere con $m = 1\ g$, $v = 10^5\ cm\ s^{-1}$

$$\Delta M = \underbrace{2\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}_{\Delta E}\frac{1}{c^2} = m\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} = m\beta^2 = +10^{-3}\frac{10^{10}}{9\,10^{20}} \simeq +10^{-3}10^{-11}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta M}{2m} = \frac{10^{-3}}{2\,10^{-3}}10^{-11} \sim +10^{-11}$$

Perche' $E_L<0$?

Particelle libere: $E_{tot} = E_{cin} > 0$

Particelle legate: $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$; forza attrattiva $\rightarrow E_{pot} < 0 \rightarrow E_{tot} < E_{cin}$

$E_L = E_{tot} - E_{cin} < 0$

Incremento in massa non misurabile

2. Formazione atomo di H, da protone ed elettrone inizialmente fermi a distanza infinita:

$$M_H = 1.67338\ 10^{-24}\ g = m_p + m_e + \frac{1}{c^2}\underbrace{E_L}_{\text{En. di legame} <0} = m_p + m_e - \frac{1}{c^2}13.6\ eV$$

$$\Delta m = \frac{\overline{E_L}}{c^2} = -\frac{13.6\ 1.6\ 10^{-12}}{9\ 10^{20}} \simeq -2.4\ 10^{-32}\,g \rightarrow \frac{\Delta m}{M_H} \simeq -\frac{2.4\ 10^{-32}}{1.67338\ 10^{-24}} \approx -1.4\,10^{-8}$$

Decremento in massa difficile da misurare (possibile oggi?)

Equivalenza massa-energia - III

3. Formazione nucleo di deuterio, da protone e neutrone inizialmente fermi e separati:

$$M_D = 3.34334\ 10^{-24}\ g = m_p + m_n + \underbrace{E_L}_{\text{En. di legame <0}} = m_p + m_n - 2.226\ MeV$$

$$\Delta m = \frac{E_L}{c^2} = -\frac{2.226\ 10^6\ 1.6\ 10^{-12}}{9\ 10^{20}} \simeq -0.396\ 10^{-26}\ g \rightarrow \frac{\Delta m}{M_D} \simeq -\frac{0.396\ 10^{-26}}{3.34334\ 10^{-24}} \approx -1.19\ 10^{-3}$$

Decremento in massa facile da misurare !

4. Conversione <u>*totale*</u> di massa in energia: annichilazione elettrone-positrone in 2 fotoni

Processo comune fra particelle elementari: annichilazione particella-antiparticella, a riposo

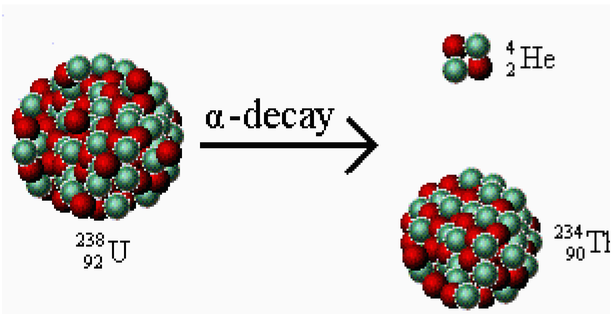
$$\underbrace{e^+ + e^-}_{\substack{\text{ferme nel} \\ \text{SRI del centro} \\ \text{di massa}}} \rightarrow \gamma + \gamma$$

Elettrone e positrone scompaiono; i due fotoni escono "schiena a schiena", portando via ciascuno l'energia (solo cinetica, visto che $m_\gamma=0$...) $E_\gamma=m_e c^2$

Equivalenza massa-energia - IV

5. Conversione *parziale* di massa a riposo in energia cinetica.

Es. decadimento α del nucleo di U^{238}:



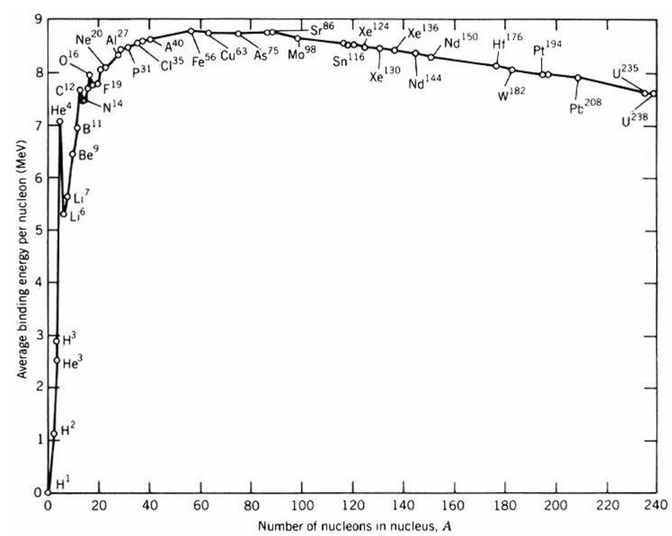
En. cinetica dei nuclei figli = 4.3 MeV

Decremento in massa a riposo:

$$\Delta M = M_{U^{238}} - m_{Th^{234}} - m_{\alpha} = \frac{4.3\ 10^{6}\ 10^{-19}}{9\ 10^{20}} g = 0.48\ 10^{-33}\ g$$

Processo *spontaneo*, esotermico

6. Energia di legame/A dei nuclei vs. numero di massa A



Un punto un po' sottile…

In che cosa il decadimento del nucleo instabile in due nuclei figli differisce dal seguente esempio, certamente pre-relativistico?

Due masse m_1,m_2 sono appoggiate alle estremita' di una molla compressa, priva di massa, di costante elastica k. La molla viene lasciata libera, e l'en. potenziale elastica si trasforma in en. cinetica…

Non e' la stessa cosa??? (Al di la' del fatto che l'en. potenziale ha segno opposto nei due casi…)

Risposta: No! La massa totale iniziale e finale e' *identica* secondo la fisica pre-relativistica, ma *non lo e'* secondo la RR

(Se misuriamo la massa di m_1,m_2+molla compressa con un dinamometro, e dopo il rilascio p.es. misuriamo le masse m_1,m_2 dalle loro accelerazioni in un campo esterno, secondo Newton troviamo *lo stesso valore totale*, secondo Einstein troviamo *valori diversi*)

Energia da fissione nucleare

Trasformare massa a riposo in en. cinetica (e quindi in calore utilizzabile) e' possibile sfruttando le diverse energie di legame nei nuclei pesanti e in quelli medio-leggeri.

Questi ultimi sono un po' piu' legati dei primi, quindi la massa di un nucleo pesante che possa fissionare (= scindersi, spontaneamente o quasi) in due nuclei leggeri e' maggiore della somma delle masse dei prodotti della fissione. La differenza si ritrova come en. cinetica dei prodotti stessi, che puo' essere usata per scaldare un assorbitore (o per produrre un'esplosione su larga scala).

Il processo avviene a temperatura ambiente, e puo', una volta innescato, procedere autonomamente, purche' siano verificate alcune condizioni (presenza di nuclei fissionabili per urto da neutroni di energie 'termiche', emissione di neutroni liberi nella fissione, probabilita' alta di urto neutrone-nucleo, presenza di un sistema di termalizzazione dei neutroni emessi…)

La fusione

Se si osserva il grafico dell'en. di legame/A vs. A si vede facilmente che anche i nuclei piu' leggeri sono meno legati di quelli medio–leggeri (con un po' di altalena all'inizio…). Questo porta a pensare che sia possibile ottenere energia anche dal processo inverso a quello di fissione, ossia dalla fusione nucleare.

Nelle giuste condizioni, due nuclei leggeri possono fondersi in uno piu' pesante, con rilascio di energia cinetica *se la somma delle masse dei prodotti e' minore di quella delle masse dei reagenti.*

Il processo e' interessante per la produzione di energia, perche':

Non richiede nuclei pesanti e fissionabili, come l'uranio, relativamente rari, costosi e pericolosi da maneggiare, ma elementi comuni e innocui come l'idrogeno o il deuterio

Non porta a produrre nuclei instabili, che sono sorgenti di radiazioni, in misura aapprezzabile

Ma: fra le condizioni richieste, c'e' quella di una *temperatura elevatissima* (le reazioni di fusione avvengono fra nuclei tutti con carica positiva: l'en. cinetica dei reagenti deve essere elevata perche' si possa superare la repulsione coulombiana), problema tecnologicamente molto complesso e non ancora realmente risolto

Le reazioni termonucleari stellari

Da dove viene l'energia delle stelle?

Da processi termonucleari come quelli descritti; le temperature elevate sono fornite dall'attrazione gravitazionale che tende a comprimere il plasma e a scaldarlo.

I primi cicli che corrispondono agli stadi successivi dell'evoluzione stellare, sono i seguenti:

<u>Ciclo dell'idrogeno</u>

$p + p \rightarrow {}^2H + e^+ + n$	.42 MeV
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$	1.02 MeV
${}^2H + p \rightarrow {}^3He + \gamma$	5.49 MeV
${}^3He + {}^3He \rightarrow {}^4He + p + p$	12.86 MeV
Total	26.72 MeV

<u>Ciclo dell'elio</u>

${}^3He + {}^4He \rightarrow {}^7Be + \gamma$	1.59 MeV
${}^7Be + p \rightarrow {}^8B + \gamma$	13 MeV
${}^8B \rightarrow {}^8Be + e^+ + n$	10.78 MeV
${}^8Be \rightarrow {}^4He + {}^4He$	.095 MeV
total	12.595 MeV

Dopo quello dell'*He* ci sono alcuni altri cicli, fino a produrre nuclei di *Fe*. La fusione del *Fe* e' un processo *<u>endotermico</u> (v. grafico energia di legame)*, quindi l'evoluzione stellare si arresta per esaurimento del combustibile.

Possibili finali (a seconda della massa):

Nana bianca, oppure *Supernova*, che si spegne in una *stella di neutroni* o in un *buco nero*

La legge dinamica in RR - I

Puo' essere interessante chiedersi: cosa sostituisce la legge fondamentale della dinamica in RR?

Il soggetto e' meno importante di quel che puo' sembrare, perche' i problemi dinamici in RR devono venire affrontati da un punto di vista diverso da quello pre-relativistico: l'impossibilita' di azioni a distanza (conseguenza di un limite invalicabile alla velocita' di propagazione delle interazioni) rende indispensabile introdurre il concetto di campo (vedi caso del campo elettromagnetico), il che sposta il problema dalla descrizione del moto dei sistemi materiali a quello della descrizione della dinamica dei sistemi+campi coinvolti nelle interazioni.

E' nondimeno possibile, in una certa misura, estendere la descrizione pre-relativistica in modo da renderla coerente con le TdL, il che ha qualche utilita' nella trattazione di esempi semplici di sistemi chiusi, che non scambiano impulso ed energia con l'esterno.

La legge dinamica in RR - II

La legge fondamentale deve garantire la conservazione dell'impulso e dell'energia (relativistici) per un sistema isolato.

Possiamo assumere quindi, per un punto materiale:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\boldsymbol{v}\right) = m_0\boldsymbol{v}\frac{d\gamma}{dt} + m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m_0\boldsymbol{v}\underbrace{\nabla_v\left(\gamma\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=\frac{d\gamma}{dt}} + m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

rimanendo per ora poco definite le proprieta' della forza.

Nello stesso modo possiamo assumere come definizione della potenza esercitata su un punto in movimento l'estensione della definizione pre-relativistica:

γ e' funzione di t tramite le v_x, v_y, v_z

$$P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\rightarrow P = m_0\boldsymbol{v}\frac{d\gamma}{dt}\cdot\boldsymbol{v} + m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = m_0 v^2\underbrace{\nabla_v\left(\gamma\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=\frac{d\gamma}{dt}} + m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}$$

La legge dinamica in RR - III

Ora:

$$\underbrace{\nabla_v(\gamma)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=\frac{d\gamma}{dt}}=\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2}}\right)\frac{dv_x}{dt}+\frac{\partial}{\partial v_y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2}}\right)\frac{dv_y}{dt}+\frac{\partial}{\partial v_z}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2}}\right)\frac{dv_z}{dt}$$

$$=\frac{v_x/c^2}{\left(1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv_x}{dt}+\frac{v_y/c^2}{\left(1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv_y}{dt}+\frac{v_z/c^2}{\left(1-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv_z}{dt}$$

$$=\frac{1}{c^2}\gamma^3\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\gamma^3\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$$

Quindi:

$$\boldsymbol{F}=m_0\boldsymbol{v}\underbrace{\nabla_v(\gamma)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=\frac{d\gamma}{dt}}+m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m_0\gamma^3\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\right)+m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

Si osservi che ***F*** e ***a = dv/dt =c dβ/dt*** _non sono_, in generale,paralleli…

$$P=m_0v^2\underbrace{\nabla_v(\gamma)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=\frac{d\gamma}{dt}}+m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{m_0}{c^2}v^2\gamma^3\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)+m_0\gamma\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\frac{m_0}{c^2}\gamma\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)\underbrace{\left(v^2\gamma^2+c^2\right)}_{=c^2\gamma^2}=m_0\gamma^3\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)=m_0c^2\gamma^3\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\right)$$

$$\to L=\int Pdt=\int m_0c^2\gamma^3\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\right)dt\underset{\uparrow}{=}m_0c^2\int_0^\beta\frac{\beta d\beta}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}=m_0c^2(\gamma-1)$$

Se ***v***//***a***

L=En.cinetica=En.totale – E.riposo

Forza costante - I

In generale:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{\gamma m_0} - \frac{\boldsymbol{v}}{\gamma m_0}\frac{d(\gamma m_0)}{dt}; \frac{d(\gamma m_0)}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{\gamma m_0} - \frac{\boldsymbol{v}}{\gamma m_0 c^2}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})$$

Se ***F***//***v*** *(p.es. carica puntiforme in campo elettrico costante //* ***v*** *iniziale), moto rettilineo*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}}\right) = \frac{qE}{m_0} \to \frac{u_x}{\sqrt{1-u_x^2/c^2}} = \frac{qE}{m_0}t + C_1$$

Non si ottiene dal caso NR con la sostituzione $m \to m_0\gamma$

$$\to v_x = \frac{qEt}{m_0\left[1+q^2E^2t^2/m_0^2c^2\right]^{1/2}} \quad \text{se } C_1 = 0$$

$$\text{Se } qEt \ll m_0 c \quad v_x \approx \frac{qE}{m_0}t$$

$$\to x = \frac{m_0 c^2}{qE}\left(1+\frac{q^2E^2t^2}{m_0^2c^2}\right)^{1/2} + \underbrace{C_2}_{\text{Si puo' porre} = 0}$$

$$\text{Se } qEt \ll m_0 c \quad x \approx \frac{qE}{2m_0}t^2$$

Limite non relativistico

Forza costante - II

Altro caso interessante di forza costante: carica puntiforme in campo magnetico costante. Allora:

<u>Si ottiene</u> dal caso NR con la sostituzione $m \to m_0\gamma$

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{F} \perp v \to \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

$$\to \boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_0\gamma} \to \gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{q}{m_0}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v} \to |\boldsymbol{v}| = \text{costante}$$

Situazione analoga al caso non-relativistico: traiettoria elicoidale attorno alle linee di campo di B, con la sola variante della “massa relativistica” al posto della “massa non relativistica”

Come si vede: il concetto di *massa relativistica* ha valore e utilita’ limitati..