

# Radiazione e Relativita' Ristretta

## XI – La radiazione di sincrotrone

# Luce di sincrotrone

Radiazione di sincrotrone (ciclotrone, betatrone):

*Radiazione elettromagnetica emessa da particelle cariche in moto circolare*

*Moto circolare uniforme: moto accelerato → Emissione di radiazione*

Fenomeno caratteristico di particelle cariche con velocità relativistiche → Tipico dei fasci circolanti negli acceleratori circolari

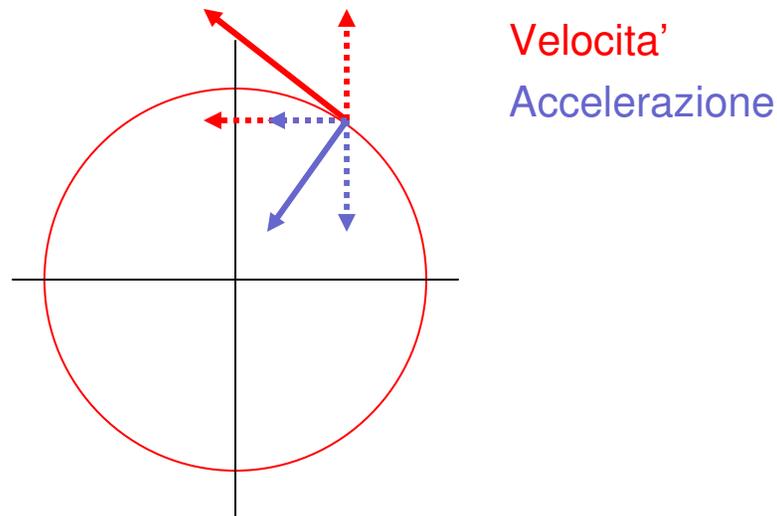
Predetto dai primi del '900, osservato per la prima volta nel 1947 alla General Electric di Schenectady, NY (USA)

Acceleratori di elettroni come sorgenti di 'luce' con caratteristiche uniche

Gran numero di applicazioni, anche per lo studio dei materiali

# Campi di una carica in moto circolare

Si consideri il moto circolare uniforme come la composizione di due moti armonici a  $90^\circ$ , sfasati di  $\pi/2$ ;



Ognuno di questi, come sappiamo, da' origine a un campo di radiazione che a grandi distanze e' quello di un dipolo elettrico.

# Procedimento

Dobbiamo:

*Considerare il caso piu' generale, in cui  $v \sim c$*

*Sommare i campi dei 2 oscillatori*

*Calcolare il vettore di Poynting della somma*

Ma: Attenzione, questa descrizione e' in parte fuorviante

La radiazione emessa non e' monocromatica! (v. dopo..)

# Campi di radiazione

Espressione valida in generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \times \left[ \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}{c^2 \left( 1 - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^3} \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}_{rad} \end{array} \right.$$

Ricordiamo, nel limite non relativistico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{\mathbf{n}} \times \left( \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \\ \mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{rad} \end{array} \right. \rightarrow \mathbf{S} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi c} |\mathbf{E}_{rad}|^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$NB: \mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \mathbf{E} \parallel \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

# Formula di Larmor - I

Usando il limite non relativistico:

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{S}| r^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{E}_{rad}|^2 r^2 = \frac{\mu_0 e^2}{64\pi^3 \epsilon_0^2} \left| \hat{\mathbf{n}} \times \left( \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right|^2$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 e^2}{64\pi^3 \epsilon_0^2} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \Theta$$

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left| \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right|^2, \mathbf{q} = m\mathbf{v}$$

# Formula di Larmor - II

Cosa diventa la formula di Larmor nel caso generale, relativistico?  
Calcoli abbastanza complicati..

In breve: Distinzione fra

*Potenza che transita attraverso l'elemento di superficie ad un dato istante*

*Potenza emessa per unita' di angolo solido ad un (altro) dato istante*

Le due quantita' non sono identiche, anche se sono legate

# Formula di Larmor - III

$$d^3W = \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA \rightarrow d^2W = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA$$

L'energia così scritta si può esprimere in termini di  $t'$  (tempo ritardato) invece che di  $t$  (tempo attuale):

$$t = t(t') \rightarrow d^2W = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dt dA = \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t(t')) \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{dt}{dt'} dt' dA = \int \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t(t')) \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{\equiv \frac{d^3W}{dAdt'}} dt' dA$$

$\frac{d^3W}{dAdt'}$ : energia irradiata a  $t'$  che poi passerà per  $dA$  a  $t$

$$\rightarrow \frac{d^3W}{dAdt'} R^2 = \frac{d^3W}{d\Omega dt'} \equiv \frac{d^2P(t')}{d\Omega}$$

Si può dimostrare (...!) che:

$$\frac{d^2P(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \left[ \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \left( (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right)}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \right]^2 \Bigg|_{t=t'}$$

# Acceleratori - I

Particelle cariche (elettroni, protoni, ioni, ..) in moto

Azione di campi elettromagnetici oscillanti: *cavita' a radiofrequenza*

Azione di campi magnetici statici: *campo guida*

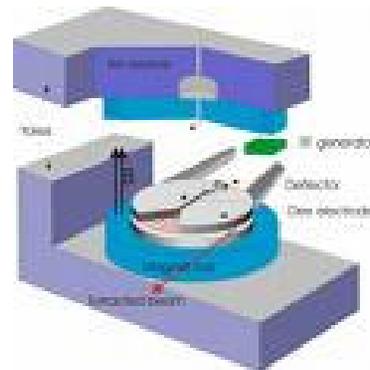
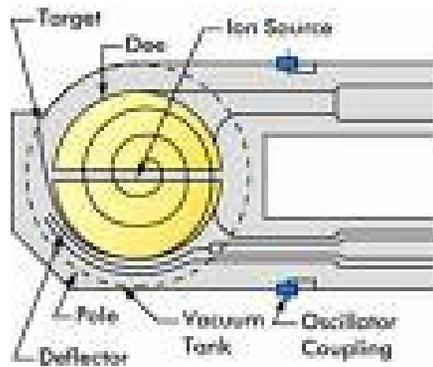
Guadagno di energia a ogni passaggio attraverso le cavita'

Orbita a raggio crescente (campo fisso)

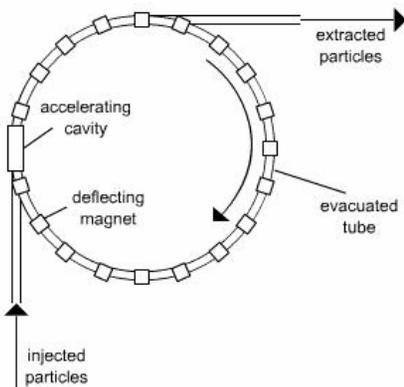
Orbita a raggio fisso (campo crescente)

# Acceleratori - II

Ciclotrone: Campo fisso, raggio crescente

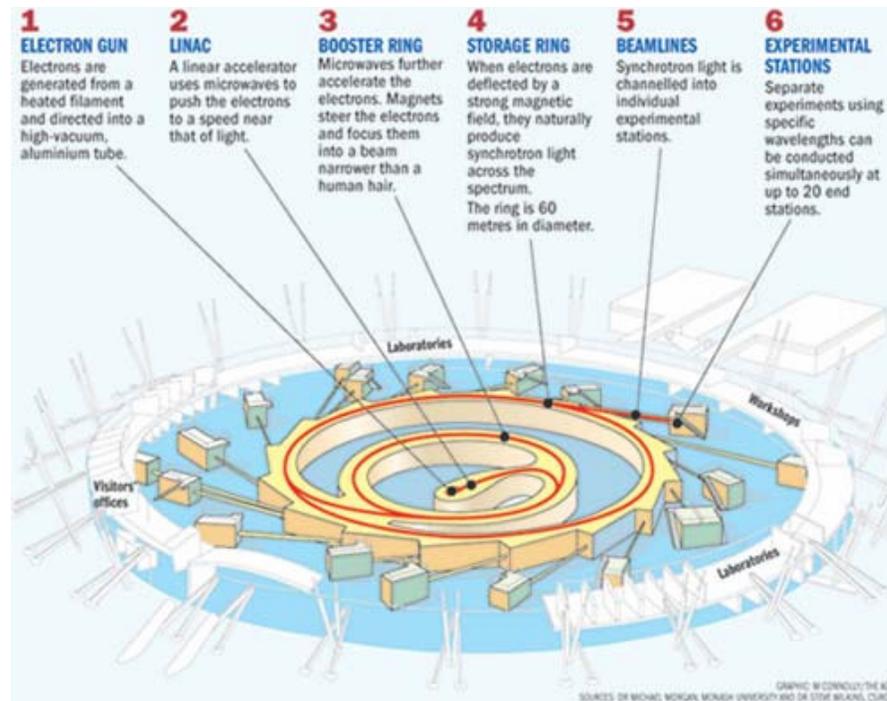


Sincrotrone: Raggio fisso, campo crescente



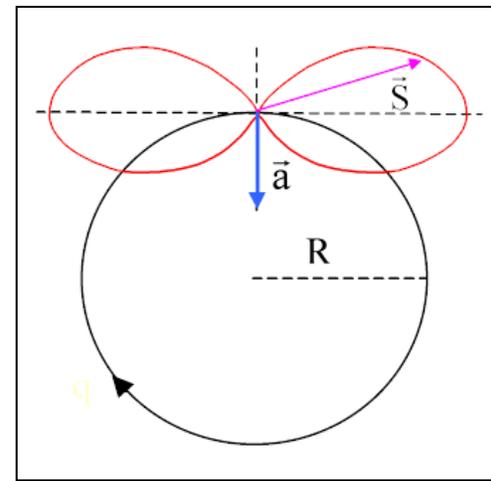
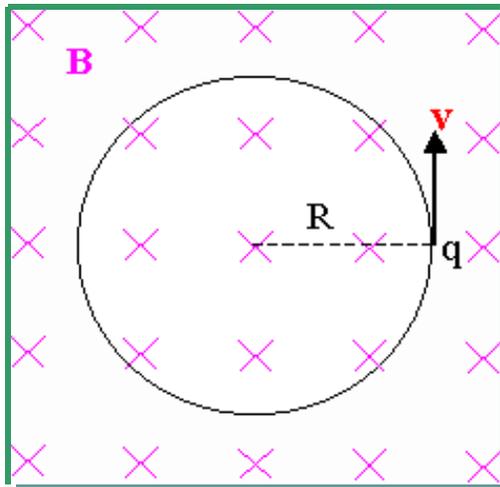
# Acceleratori - III

Schema di un sincrotrone a elettroni per produzione di luce di sincrotrone



# Radiazione di ciclotrone

$$v \ll c$$

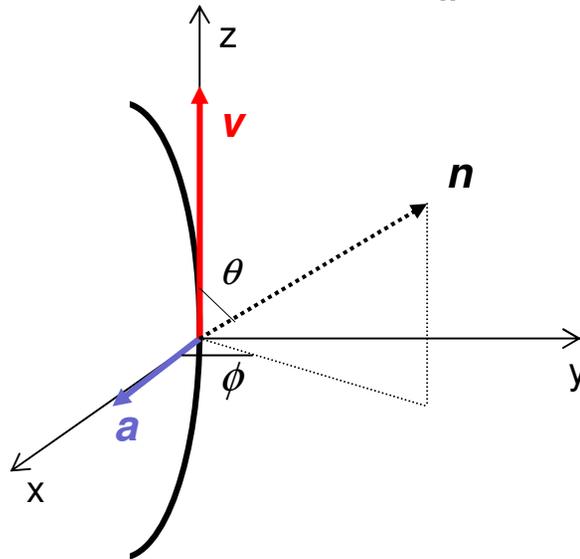


# Radiazione di sincrotrone - I

Quello che ci interessa e' il caso in cui  **$acc \perp vel$**

Questo e' quello che si presenta quando un elettrone si muove in un campo magnetico uniforme

Es.: Moto nel piano  $xz \leftarrow \mathbf{B} \parallel$  asse  $y$



$\theta$ : angolo di osservazione rispetto alla velocita' istantanea dell'elettrone

$\phi$ : angolo di tilt rispetto al piano dell'orbita

# Radiazione di sincrotrone - II

La distribuzione angolare della radiazione emessa e':

$$\frac{d^2 P}{d\Omega} = \frac{e^2 \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]$$

Integrando sugli angoli:

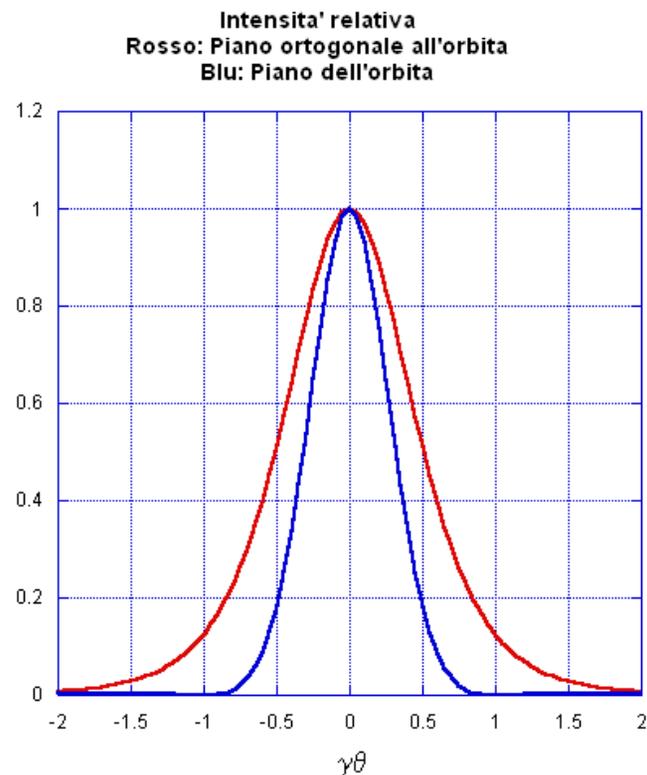
$$P = \frac{2e^2 c (\beta \gamma)^4}{3R^2} = \frac{2e^2 c}{3R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \beta^4$$

Approssimazione di angoli polari piccoli:

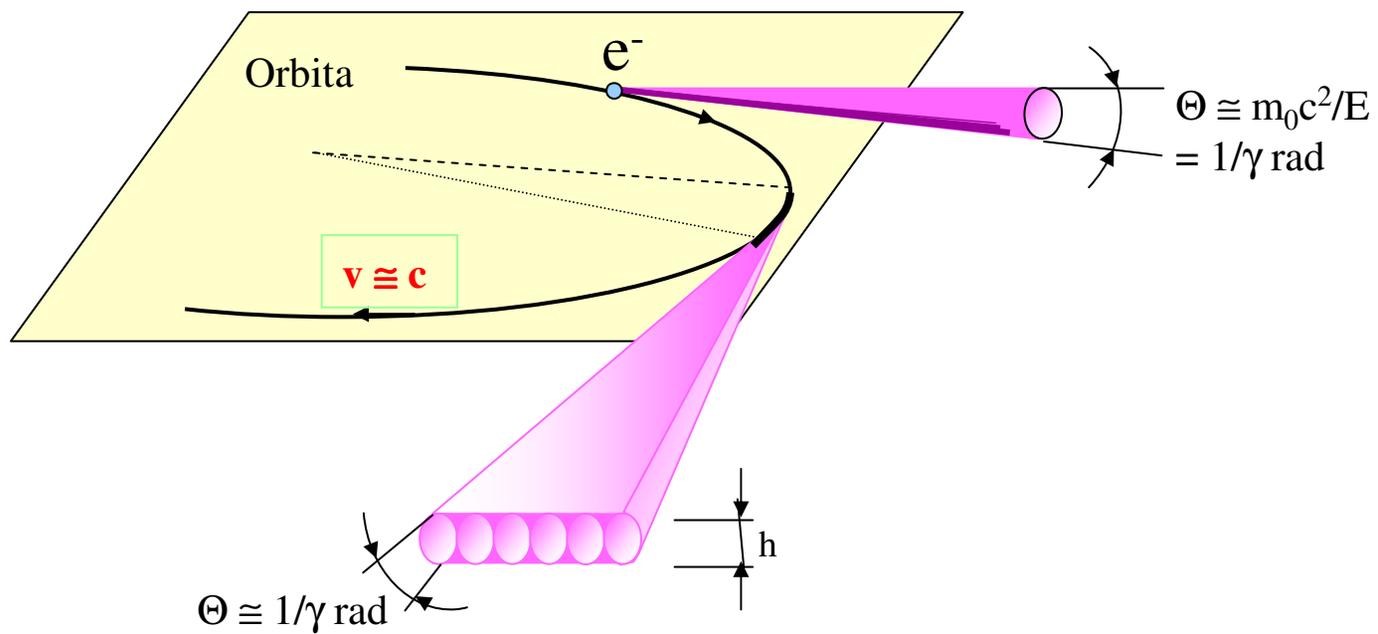
$$\frac{d^2 P}{d\Omega} = \frac{2e^2 \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|^2 \gamma^6}{\pi c^3 (1 + \gamma^2 \theta^2)^3} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \cos^2 \varphi \right]$$

# Radiazione di sincrotrone - III

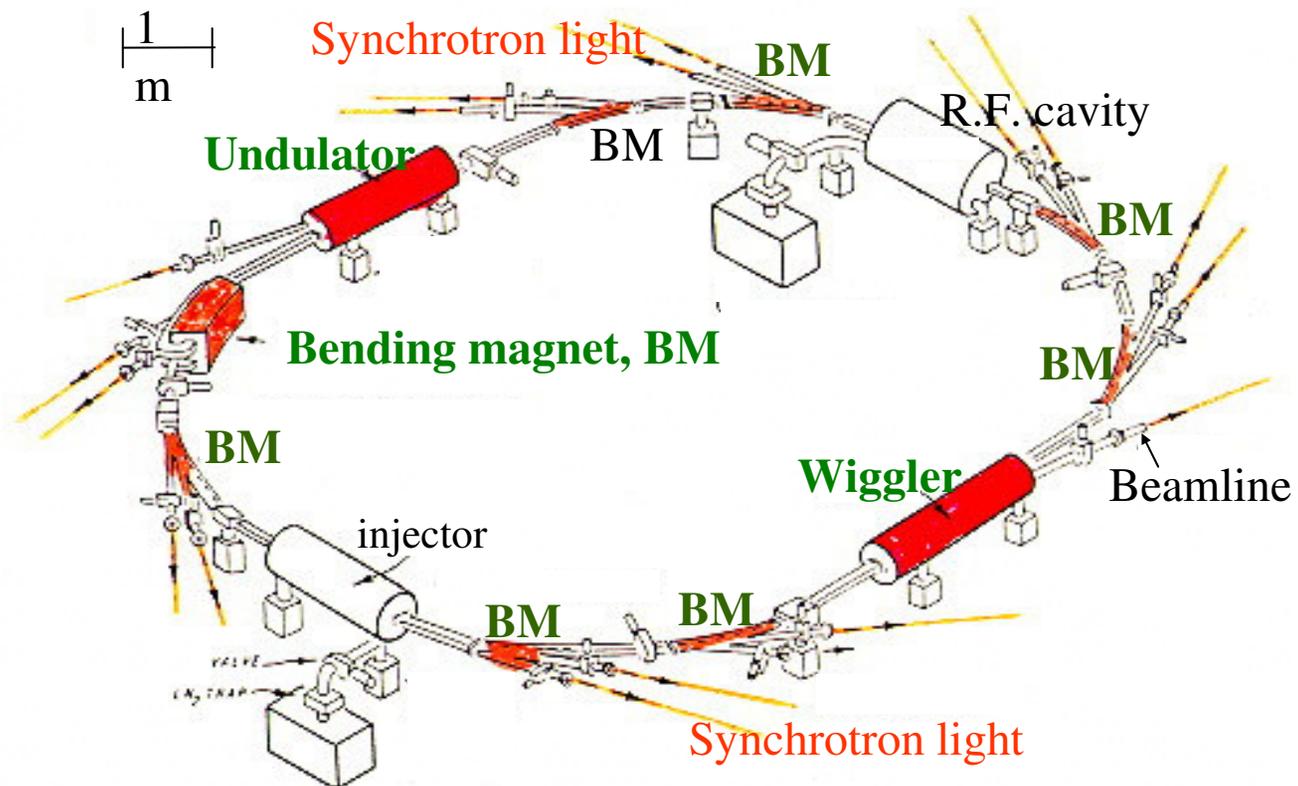
La maggior parte della radiazione e' confinata entro un angolo  $\sim 1/\gamma$  rispetto alla velocita' dell'elettrone



# Radiazione di sincrotrone - IV



# Luce di sincrotrone

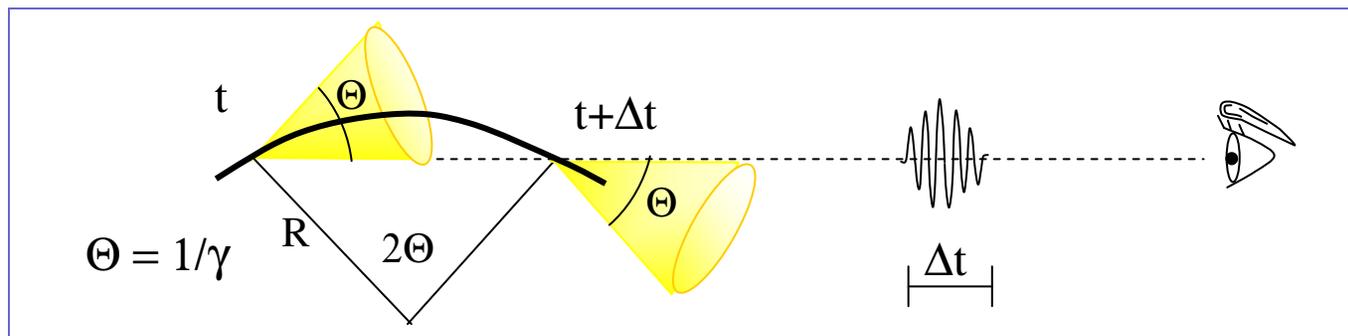


# Spettro di frequenze - I

La questione piu' interessante:

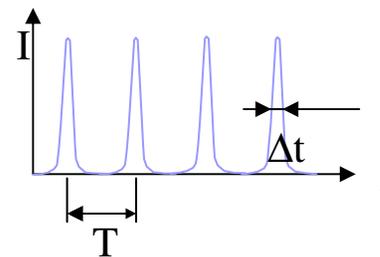
Quali frequenze sono contenute nella radiazione di sincrotrone?

Si consideri il problema dal punto di vista di un osservatore che guardi tangenzialmente all'orbita:



Durata impulso luminoso:

$$\Delta t = \frac{L}{\beta c} = \frac{2\Theta R}{\beta c} = \frac{2R}{\beta \gamma c} \ll T = \frac{2\pi R}{\beta c} \text{ se } \gamma \gg 1$$



# Spettro di frequenze - II

La durata dell'impulso per l'osservatore tangenziale e':

$$\frac{L}{c} = t_2 - t_1$$

In termini dei tempi ritardati:

$$\begin{cases} t_2 = t_2' + \frac{R_2}{c} \\ t_1 = t_1' + \frac{R_1}{c} \end{cases} \rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t - \frac{R_1 - R_2}{c}$$

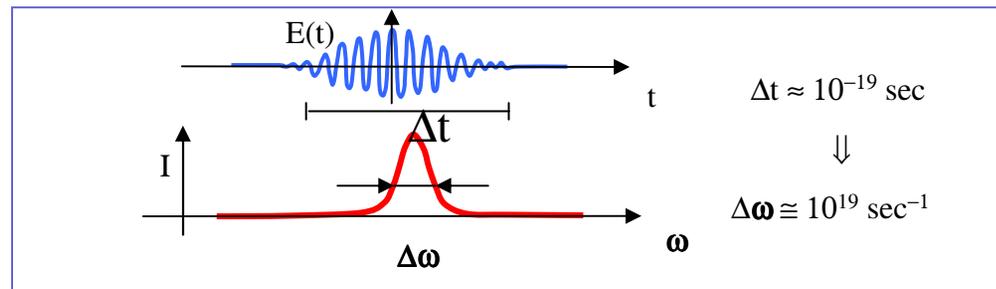
$$R_1 - R_2 \approx v\Delta t \rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t(1 - \beta)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta) \sim 2(1 - \beta)$$

$$\rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t(1 - \beta) \sim \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{2R}{\beta\gamma c} \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{R}{\beta\gamma^3 c} \quad \text{Intervallo di tempo di emissione}$$

# Spettro di frequenze - III

Sviluppo in integrale di Fourier: spettro di frequenza della radiazione



Intervallo di frequenze emesse:

$$\begin{cases} \omega_{\min} \sim \omega_0 = \frac{\beta c}{R} \\ \omega_{\max} \sim \frac{\beta \gamma^3 c}{R} \end{cases}$$

$$\rightarrow E_c \sim \hbar \omega_{\max} \sim \frac{\gamma^3 \hbar c}{R} \quad \text{Energia critica}$$

Esempio: elettroni

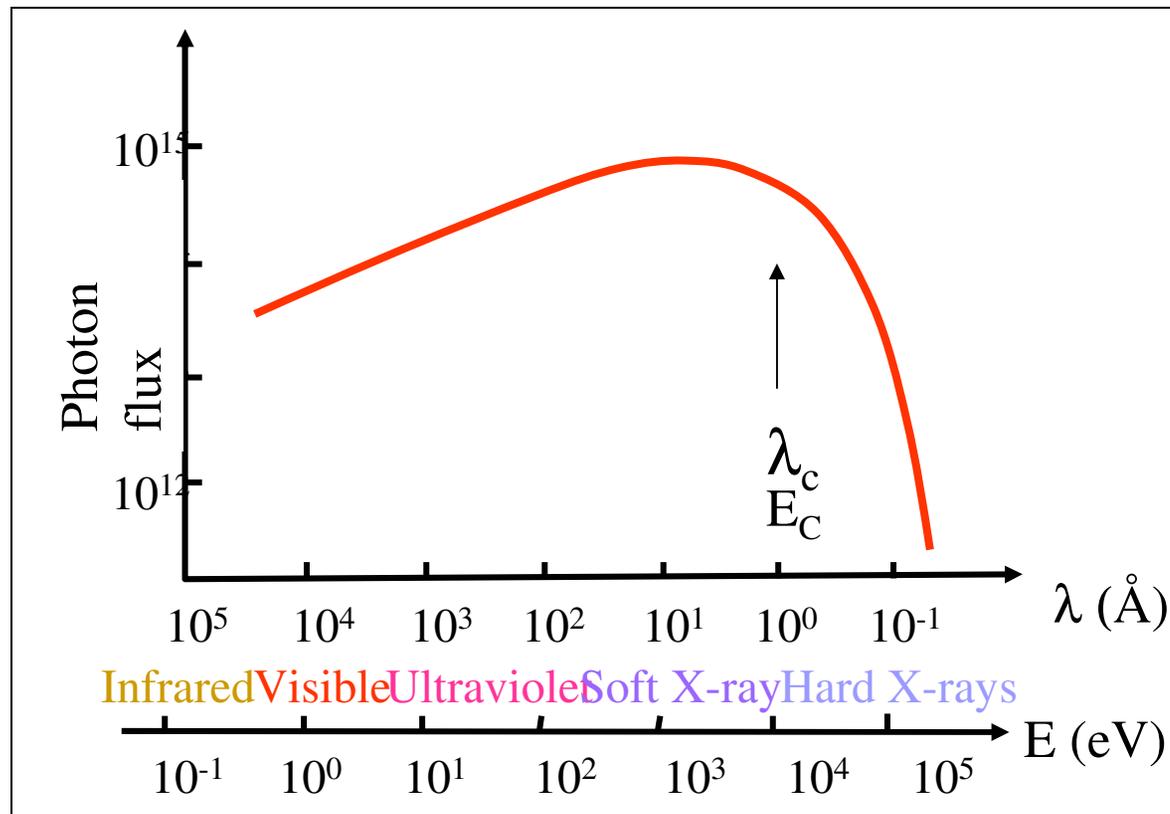
$$E = 1000 \text{ MeV}, mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

$$\rightarrow \gamma^3 = (E/mc^2)^3 \sim 8 \cdot 10^9$$

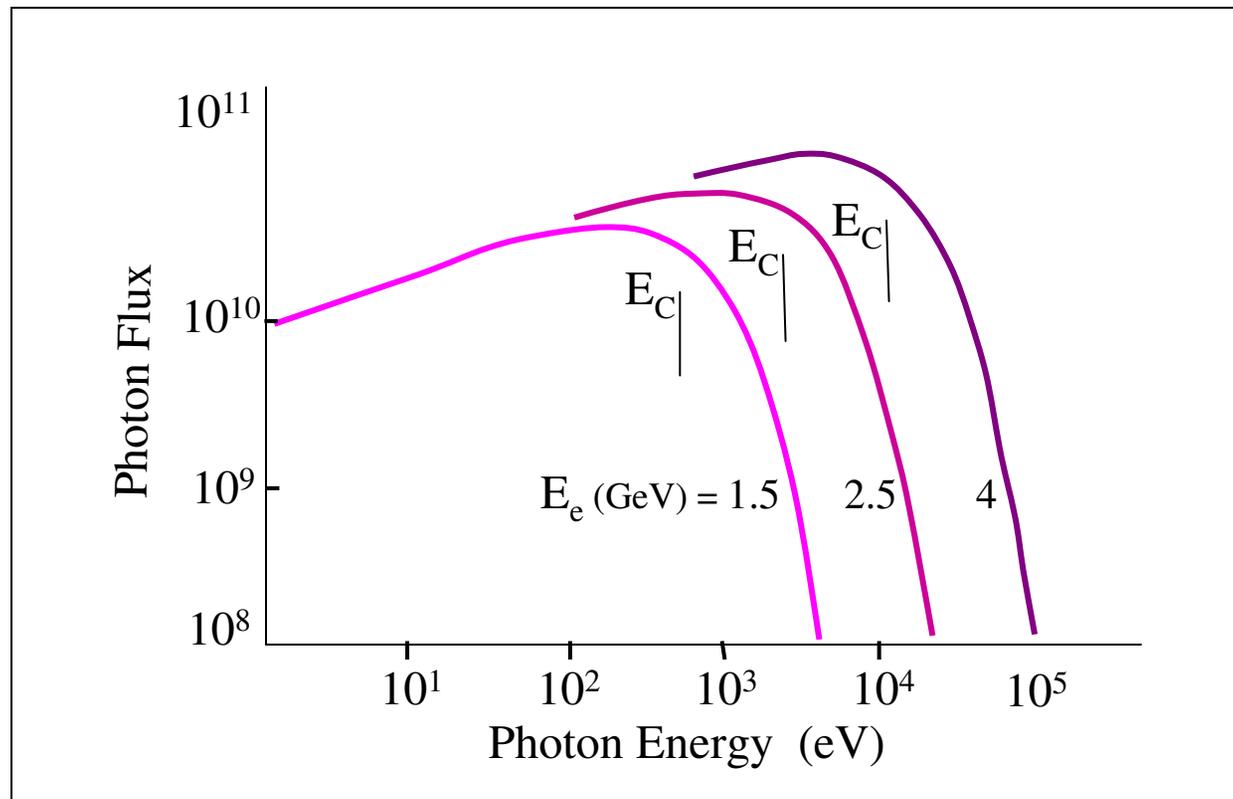
$$R = 5 \text{ m}$$

$$\rightarrow E_c \sim 400 \text{ eV} \quad \text{Raggi X soffici}$$

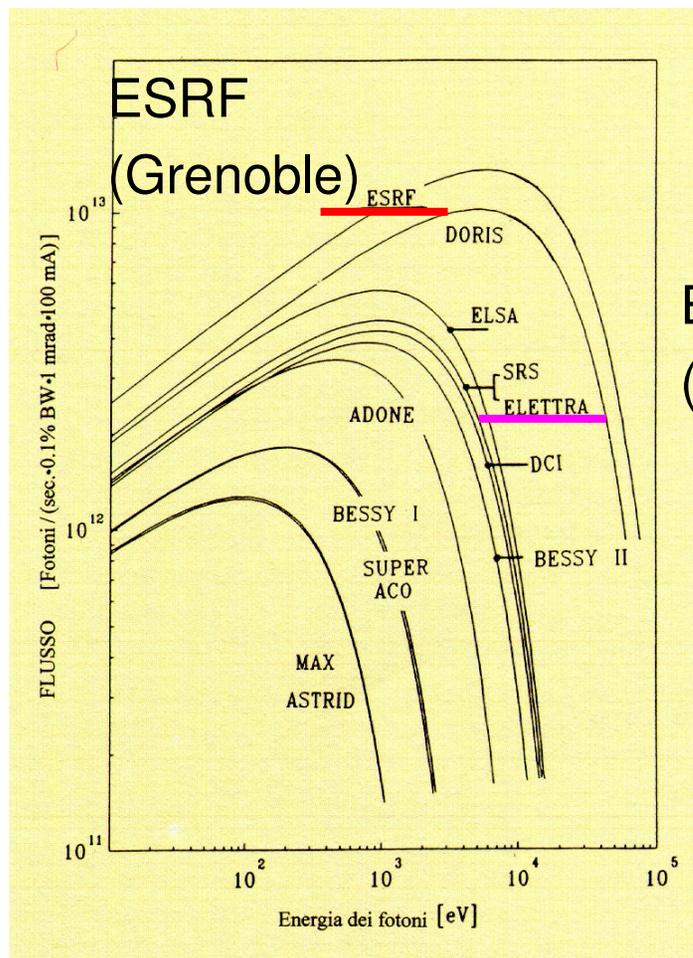
# Spettro di frequenze - IV



# Spettro per diverse energie

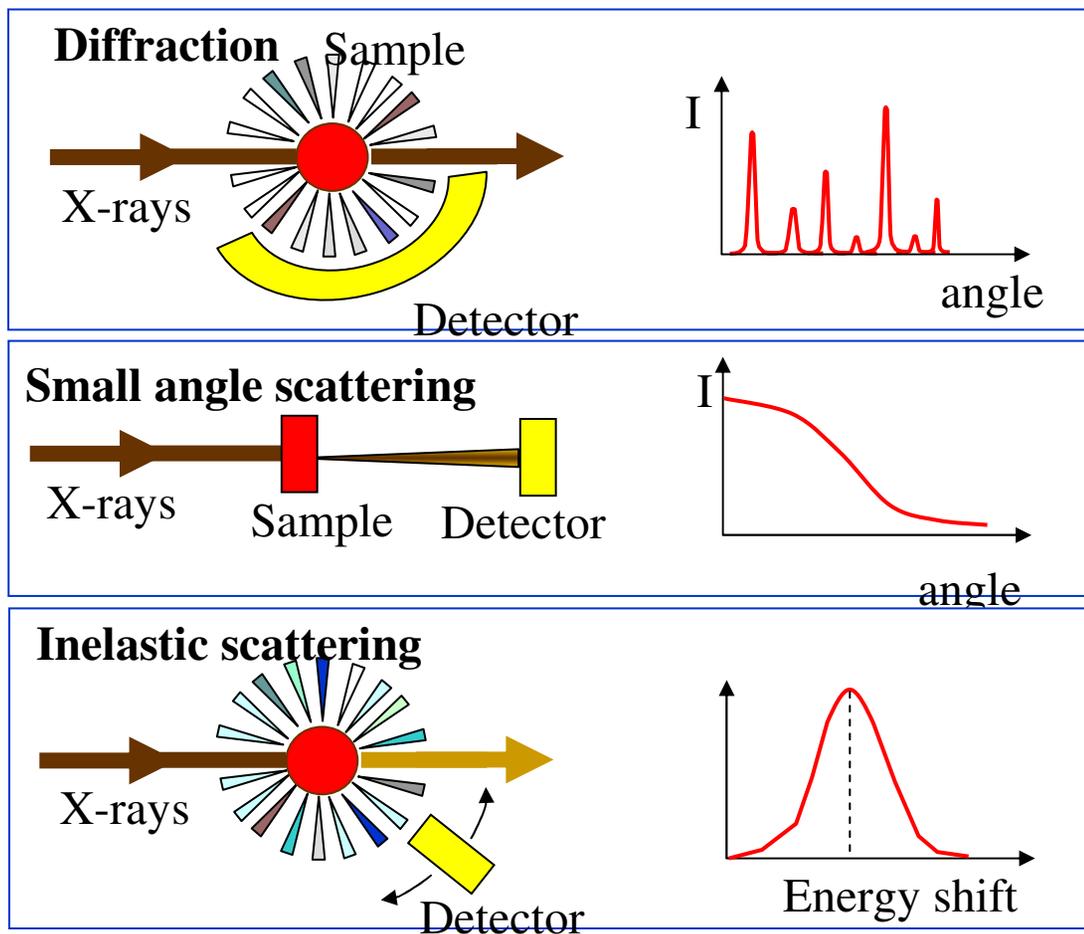


# Flussi da diverse macchine



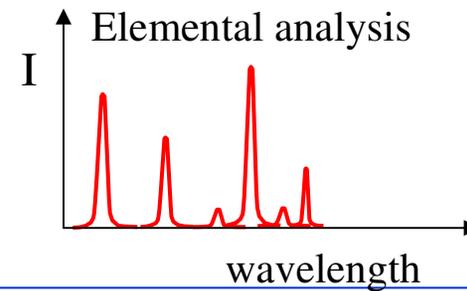
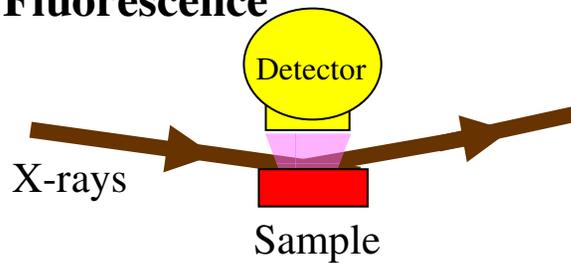
ELETTRA  
(Trieste)

# Modi d'uso - I

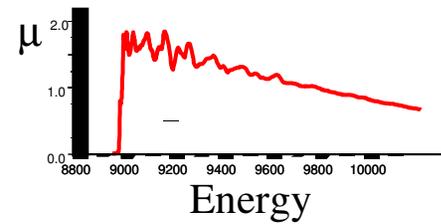
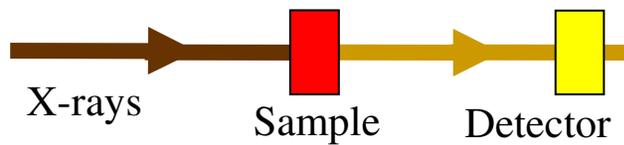


# Modi d'uso - II

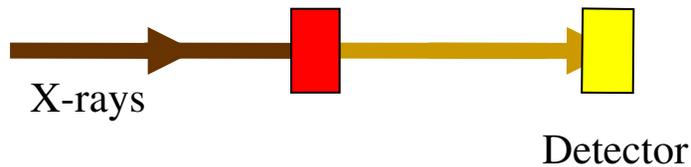
## Fluorescence



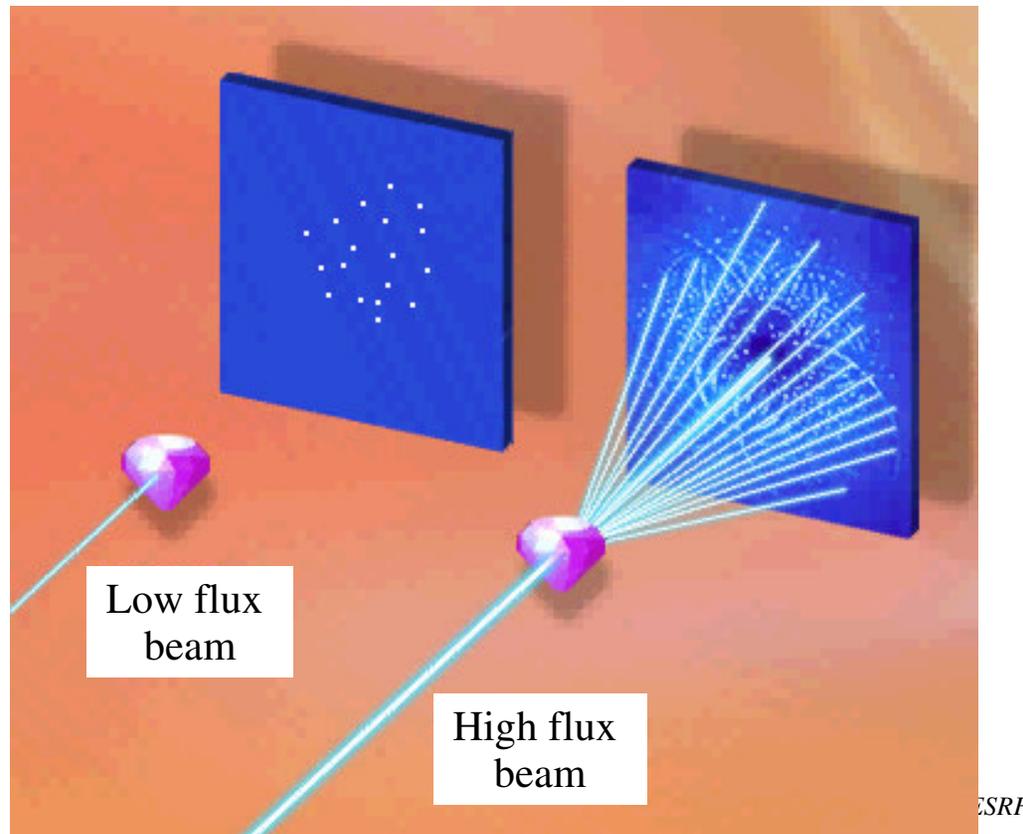
## Absorption



## Imaging

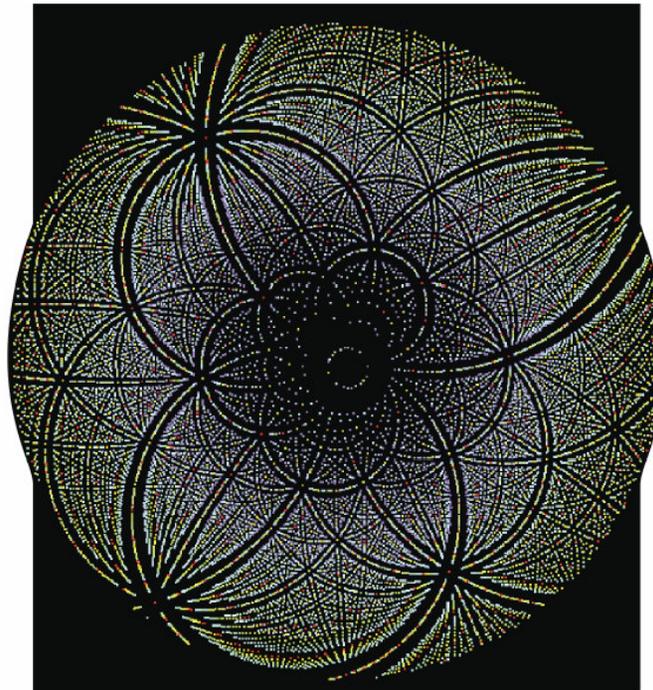


# Laue Diffraction



# Laue pattern di un cristallo

Isocitrate deydrogenase

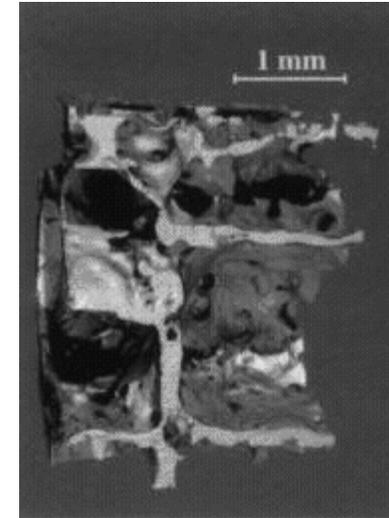
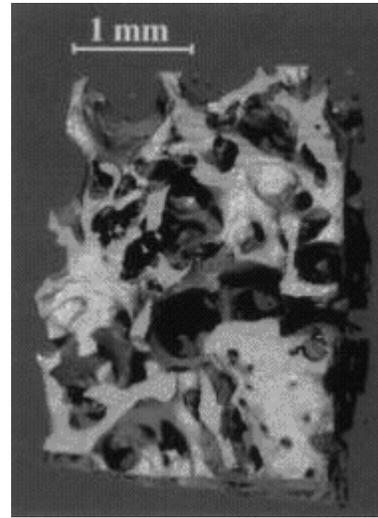
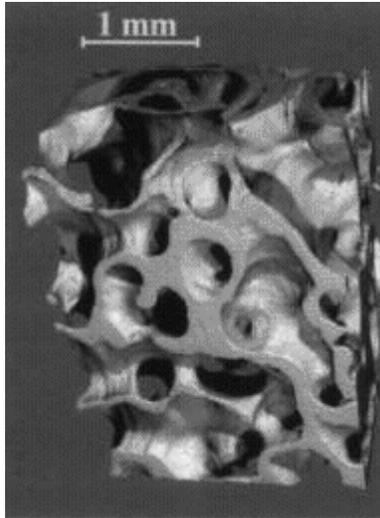


TIME-RESOLVED CRYSTALLOGRAPHY

NLSL Brookhaven

Time resolved crystallography: Exposure time: 10 ms

# Micro-tomografia a raggi X



Microtomogram of iliac crest bone from a female patient undergoing haemodialysis.

The three images are of biopsies taken at three ages, 24, 27 and 32 years. The severe loss of bone mass is apparent.

The ratios of bone volume to total volume fell from 29.6% to 23.7% between the ages of 24 and 32