In queste pagine sono contenute alcune dimostrazioni derivanti dalle considerazioni fatte da J.C. Raich e R.H. Good, autori dell'articolo "*Discussion of Quadrupole Precession*".

1) L'equazione del moto di Heisenberg (*slide 4*)

Come viene fuori l'equazione del moto di Heisenberg del momento angolare?

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[H,\vec{J}\right]=\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix}[H,J_x]\\ [H,J_y]\\ [H,J_z]\end{pmatrix}=\frac{i}{\hbar}\begin{pmatrix}\left[-g\left(\frac{e}{2Mc}\right)\vec{J}\cdot\vec{B},J_x\right]\\ \left[-g\left(\frac{e}{2Mc}\right)\vec{J}\cdot\vec{B},J_y\right]\\ \left[-g\left(\frac{e}{2Mc}\right)\vec{J}\cdot\vec{B},J_z\right]\end{pmatrix}=-g\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}[\vec{J}\cdot\vec{B},J_x]\\ [\vec{J}\cdot\vec{B},J_y]\\ [\vec{J}\cdot\vec{B},J_z]\end{pmatrix}=$$

$$=-g\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}[J_xB_x+J_yB_y+J_zB_z,J_x]\\ [J_xB_x+J_yB_y+J_zB_z,J_y]\\ [J_xB_x+J_yB_y+J_zB_z,J_z]\end{pmatrix}=-g\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}[J_xB_x,J_x]+[J_yB_y,J_x]+[J_zB_z,J_x]\\ [J_xB_x,J_y]+[J_yB_y,J_y]+[J_zB_z,J_y]\\ [J_xB_x,J_z]+[J_yB_y,J_z]+[J_zB_z,J_z]\end{pmatrix}=$$

$$=-g\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}[J_x,J_x]B_x+[J_y,J_x]B_y+[J_z,J_x]B_z\\ [J_x,J_y]B_x+[J_y,J_y]B_y+[J_z,J_y]B_z\\ [J_x,J_z]B_x+[J_y,J_z]B_y+[J_z,J_z]B_z\end{pmatrix}$$

Siamo ora giunti alla commutazione delle componenti del momento angolare ***J***:

$$\vec{J}\equiv\vec{r}\times\vec{p}\Rightarrow\begin{pmatrix}J_x\\ J_y\\ J_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}yp_z-zp_y\\ zp_x-xp_z\\ xp_y-yp_x\end{pmatrix}\Rightarrow[J_x,J_y]=[yp_z-zp_y,zp_x-xp_z]=[yp_z,zp_x]-[yp_z,xp_z]-[zp_y,zp_x]+$$

$$+[zp_y,xp_z]=y[p_z,z]p_x-y\underbrace{[p_z,x]}_{0}p_z-z\underbrace{[p_y,z]}_{0}p_x+x[z,p_z]p_y=y[p_z,z]p_x+x[z,p_z]p_y$$

In MQ l'operatore quantità di moto è definito come

$$p=-i\hbar\nabla=-i\hbar\begin{pmatrix}\frac{d}{dx}\\ \frac{d}{dy}\\ \frac{d}{dz}\end{pmatrix}$$

Allora, alla luce di quanto appena detto, risulta che

$$[J_x,J_y]=y[p_z,z]p_x+x[z,p_z]p_y=y\left[-i\hbar\frac{d}{dz},z\right]p_x+x\left[z,-i\hbar\frac{d}{z}\right]p_y=-i\hbar y\left[\frac{d}{dz},z\right]p_x-i\hbar x\left[z,\frac{d}{dz}\right]p_y=$$

$$=-i\hbar y\left(\frac{d}{dz}z-z\frac{d}{dz}\right)p_x-i\hbar x\left(z\frac{d}{dz}-\frac{d}{dz}z\right)p_y=-i\hbar y\left(1+z\frac{d}{dz}-z\frac{d}{dz}\right)p_x-i\hbar x\left(z\frac{d}{dz}-z\frac{d}{dz}-1\right)p_y=$$

$$=-i\hbar yp_x+i\hbar xp_y=i\hbar\left(xp_y-yp_x\right)=i\hbar J_z$$

E, più in generale

$$[J_i,J_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k$$

dove ε_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita e vale 1 per permutazioni ***pari*** degli indici, -1 per permutazioni ***dispari*** degli indici e vale zero per tutte le altre combinazioni degli indici.

Applicando ora questa semplice regola generale per la commutazione delle componenti del momento angolare totale ***J***, possiamo arrivare a definire un'equazione del moto di Heisenberg come

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[H,\vec{J}\right]=-g\,\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}\left[J_x,J_x\right]B_x+\left[J_y,J_x\right]B_y+\left[J_z,J_x\right]B_z\\ \left[J_x,J_y\right]B_x+\left[J_y,J_y\right]B_y+\left[J_z,J_y\right]B_z\\ \left[J_x,J_z\right]B_x+\left[J_y,J_z\right]B_y+\left[J_z,J_z\right]B_z\end{pmatrix}=-g\,\frac{i}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}-i\hbar J_zB_y+i\hbar J_yB_z\\ i\hbar J_zB_x-i\hbar J_xB_z\\ -i\hbar J_yB_x+i\hbar J_xB_y\end{pmatrix}=$$

$$=-g\,\frac{i^2\hbar}{\hbar}\left(\frac{e}{2Mc}\right)\begin{pmatrix}J_yB_z-J_zB_y\\ J_zB_x-J_xB_z\\ J_xB_y-J_yB_x\end{pmatrix}=g\left(\frac{e}{2Mc}\right)\vec{J}\times\vec{B}$$

Riassumendo,

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=g\left(\frac{e}{2Mc}\right)\vec{J}\times\vec{B}$$

2) L'espressione del potenziale *φ* (*slide 7*)

La presenza di un campo elettrico esterno introduce un contributo perturbativo elettrostatico ai livelli energetici del nucleo. Per poter valutare correttamente di quanto i livelli energetici del nucleo vengano perturbati, dobbiamo essere in grado di descrivere il potenziale elettrostatico φ partendo dal campo elettrico esterno $\boldsymbol{E}$. Queste due quantità sono legate, in via del tutto generale, dalla relazione

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

dove φ è definito *potenziale scalare* e $\boldsymbol{A}$ definito come *potenziale vettore*.

Nel caso in questione, ossia per campi *elettrostatici*, l'espressione si semplifica notevolmente in

$$\vec{E}=-\nabla\varphi\Rightarrow\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

Potremmo, in linea di principio, risolvere la forma differenziale integrando il campo elettrico su tutte le variabili. Risulta però molto più comodo sviluppare in serie di Taylor l'espressione del potenziale, benché essa non sia conosciuta inizialmente; si porga attenzione sul fatto che il potenziale φ è una funzione delle coordinate x, y e z. Lo sviluppo in serie di Taylor al secondo ordine di una funzione di 3 variabili è dato da

$$\varphi(x,y,z)=\varphi_O+x\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_O+y\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_O+z\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_O+\frac{1}{2}xx\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}\right|_O+\frac{1}{2}xy\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right|_O+\frac{1}{2}xz\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right|_O+\frac{1}{2}yx\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right|_O+$$

$$+\frac{1}{2}yy\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y}\right|_O+\frac{1}{2}yz\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right|_O+\frac{1}{2}zx\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right|_O+\frac{1}{2}zy\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right|_O+\frac{1}{2}zz\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial z}\right|_O$$

Descriviamo ora l'espressione ottenuta: il primo termine è il potenziale valutato nell'origine, indicato con φ_0. I tre termini successivi sono gli sviluppi in serie al prim'ordine del potenziale fatti rispetto alle variabili x, y e z. I restanti 9 termini sono le sviluppo in serie al secondo ordine del potenziale costituito dalle derivate seconde dove, essendo una funzione di più variabili, compaiono i termini misti.

Quanto ottenuto è esprimibile in termini di campo elettrico considerando la relazione che lega il potenziale al campo e sfruttando le proprietà dell'*operatore derivata*. Pertanto

$$\varphi(x,y,z)=\varphi_O - xE_{x,O} - yE_{y,O} - zE_{z,O} - \frac{1}{2}xx\frac{\partial E_x}{\partial x}\bigg|_O - \frac{1}{2}xy\frac{\partial E_y}{\partial x}\bigg|_O - \frac{1}{2}xz\frac{\partial E_z}{\partial x}\bigg|_O - \frac{1}{2}yx\frac{\partial E_x}{\partial y}\bigg|_O +$$

$$-\frac{1}{2}yy\frac{\partial E_y}{\partial y}\bigg|_O - \frac{1}{2}yz\frac{\partial E_z}{\partial y}\bigg|_O - \frac{1}{2}zx\frac{\partial E_x}{\partial z}\bigg|_O - \frac{1}{2}zy\frac{\partial E_y}{\partial z}\bigg|_O - \frac{1}{2}zz\frac{\partial E_z}{\partial z}\bigg|_O$$

Facciamo ora alcune piccole considerazioni da un punto di vista squisitamente matematico. Dal momento che trattiamo una funzione di più variabili dobbiamo ricordare il *teorema di Schwarz,* il quale prevede che le derivate parziali seconde miste siano uguali:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial E_y}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial E_x}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial E_y}{\partial x}\equiv\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial E_z}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial E_y}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial E_z}{\partial y}\equiv\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial E_x}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial E_z}{\partial x}\equiv\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Queste che abbiamo appena scritto sono le condizioni affinché una forma differenziale venga considerata ***chiusa***. Inoltre, il dominio matematico del campo elettrico è una corona sferica dove l'unica singolarità è nell'origine: questo è il chiaro caso di un dominio *semplicemente connesso*, ossia è possibile scegliere all'interno di questo dominio due curve generiche che abbiano estremi coincidenti e "deformarle" l'una sull'altra senza uscire dal dominio stesso. Una forma differenziale chiusa unita ad un dominio semplicemente connesso sono i requisiti affinché una forma differenziale possa essere considerata ***esatta*** ossia che ammetta una ***funzione potenziale***.
Tornando ora al caso in esame è possibile scrivere, in maniera più compatta, l'espressione ottenuta del potenziale come

$$\varphi(\vec{x})=\varphi_0-\sum_i x_i E_{i,O}-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i x_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\bigg|_O$$

e omettendo le sommatorie si arriva alla elegante notazione presentata nell'articolo

$$\varphi(\vec{x})=\varphi_0-x_i E_{i,O}-\frac{1}{2}x_i x_j\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\bigg|_O$$

3) Il tensore derivata del campo elettrico (*slide 12*)

Nell'articolo di Good e Reich viene definito il tensore che descrive la derivata delle componenti del campo elettrico. Come visto in precedenza quando abbiamo ricavato l'espressione del potenziale, il tensore risulta essere simmetrico come conseguenza del fatto che non vi sono coinvolti campi magnetici variabili nel tempo e che quindi il rotore di ***E*** risulti nullo.
È possibile, scegliendo opportunamente gli assi di riferimento, far sì che gli elementi che non sono contenuti all'interno della diagonale principale risultino nulli; le uniche tre componenti che sopravvivono a questo accorgimento sono dunque le tre componenti che costituiscono la divergenza del campo che, siccome il campo elettrico varia molto poco all'interno del nucleo, *assumiamo che sia nulla*; sono dunque necessari solo due dei tre elementi non nulli del tensore in quanto il terzo è univocamente definito dal fatto che **div*E***=0. Come parametri sono stati scelti

$$\eta=\frac{\dfrac{\partial E_x}{\partial x}-\dfrac{\partial E_y}{\partial y}}{\dfrac{\partial E_z}{\partial z}} \qquad\qquad q=-\frac{1}{e}\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Passeremo ora, attraverso a delle davvero semplici manipolazioni matematiche, alla forma del tensore presentata nella slide 12. Partendo dalle considerazioni fatte in precedenza,

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial E_x}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial E_y}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial E_z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Elemento 1,1

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(\eta+\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(2\eta+2\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(\eta+\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}+2\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(\eta+\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}(\eta-1)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che, nel nucleo, ***E*** sia un campo solenoidale.

Elemento 2,2

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial x}=-\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(-\eta+\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(-2\eta+2\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(-\eta-\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}+2\frac{\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\left(-\eta+\frac{\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_x}{\partial x}}{\frac{\partial E_z}{\partial z}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}(-\eta-1)$$

Possiamo ora tornare, alla luce dei risultati ottenuti, al tensore:

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}(\eta-1) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}(-\eta-1) & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial E_z}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\eta-1) & 0 & 0\\ 0 & (-\eta-1) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}(\eta-1) & 0 & 0\\ 0 & (-\eta-1) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(\frac{e}{2}\frac{1}{e}\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)=\begin{pmatrix}(\eta-1) & 0 & 0\\ 0 & (-\eta-1) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\left(-\frac{eq}{2}\right)$$

Per riassumere

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \eta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left(-\frac{eq}{2} \right)$$

4) La Hamiltoniana di interazione in termini di *η* e *q* (slide 12).

Alla luce di quanto appena dimostrato sull'evoluzione del tensore delle derivate del campo elettrico esterno ***E***, facciamo ora riferimento alla Hamiltoniana di interazione scritta nella *slide 9*, ossia

$$H_{Int} = -\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) \frac{eQ}{4I(2I-1)\hbar^2} \left(J_i J_j + J_j J_i \right).$$

In questa ora possiamo sostituire gli elementi del tensore, ricordando che questo è simmetrico, ossia $i = j$. Pertanto

$$H_{Int} = \frac{eQ}{4I(2I-1)\hbar^2} (\eta - 1) \left(-\frac{eq}{2} \right) \cdot 2 J_x^{\ 2} + \frac{eQ}{4I(2I-1)\hbar^2} (-\eta - 1) \left(-\frac{eq}{2} \right) \cdot 2 J_y^{\ 2} + \frac{eQ}{4I(2I-1)\hbar^2} \cdot 2 \left(-\frac{eq}{2} \right) \cdot 2 J_z^{\ 2} =$$

$$= \frac{e^2 Qq}{4I(2I-1)\hbar^2} \left((\eta - 1) J_x^{\ 2} + (-\eta - 1) J_y^{\ 2} + 2 J_z^{\ 2} \right) = \frac{e^2 Qq}{4I(2I-1)\hbar^2} \left(\eta J_x^{\ 2} - J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2} - J_y^{\ 2} + 2 J_z^{\ 2} \right) =$$

$$= \frac{e^2 Qq}{4I(2I-1)\hbar^2} \left(\eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2} \underbrace{- J_x^{\ 2} - J_y^{\ 2} - J_z^{\ 2}}_{-J^2} + J_z^{\ 2} + 2 J_z^{\ 2} \right) = \frac{e^2 Qq}{4I(2I-1)\hbar^2} \left(\eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2} - J^2 + 3 J_z^{\ 2} \right)$$

Per riassumere

$$H_{Int} = \frac{e^2 Qq}{4I(2I-1)\hbar^2} \left(3 J_z^{\ 2} - J^2 + \eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2} \right)$$

5) Le equazioni del moto del problema classico (slide 13)

Nella *meccanica Hamiltoniana*, derivata dalla *meccanica Lagrangiana*, le equazioni del moto sono sempre derivate da una sorta di commutazione con l'*Hamiltoniana* del caso in analisi. La differenza fondamentale con i commutatori che si incontrano nella meccanica quantistica è che in quest'ultima si parla di commutazione di operatori mentre in meccanica Hamiltoniana le grandezze in gioco sono delle funzioni.

$$\frac{dJ_x}{dt} = i \frac{A}{\hbar^2} \left[3 J_z^{\ 2} - J^2 + \eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2}, J_x \right] = i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ \left[3 J_z^{\ 2}, J_x \right] - \left[J^2, J_x \right] + \left[\eta J_x^{\ 2}, J_x \right] - \left[\eta J_y^{\ 2}, J_x \right] \right\} =$$

$$= i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ \left[3 J_z^{\ 2}, J_x \right] - \left[\eta J_y^{\ 2}, J_x \right] \right\} = i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ 3i J_z J_y + 3i J_y J_z + i \eta J_z J_y + i \eta J_z J_y \right\} = -\frac{2A}{\hbar^2} (3 + \eta) J_y J_z$$

Per riassumere

$$\frac{dJ_x}{dt} = -\frac{2A}{\hbar^2} (3 + \eta) J_y J_z .$$

Alla luce di quanto detto prima infatti il "commutatore", che prende il nome di *parentesi di Poisson*, tra due funzioni è sempre nullo pertanto scrivere $J_i J_j$ piuttosto che $J_j J_i$ è assolutamente indifferente. Questo tipo di procedimento, applicato anche alle rimanenti due componenti del momento angolare totale J, porta alle altre due equazioni del moto presentate nella slide 13.

$$\frac{dJ_y}{dt} = i \frac{A}{\hbar^2} \left[3 J_z^{\ 2} - J^2 + \eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2}, J_y \right] = i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ \left[3 J_z^{\ 2}, J_y \right] - \left[J^2, J_y \right] + \left[\eta J_x^{\ 2}, J_y \right] - \left[\eta J_y^{\ 2}, J_y \right] \right\} =$$

$$= i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ \left[3 J_z^{\ 2}, J_y \right] + \left[\eta J_x^{\ 2}, J_y \right] \right\} = i \frac{A}{\hbar^2} \left\{ -3i J_z J_x - 3i J_z J_x + i \eta J_z J_y + i \eta J_z J_y \right\} = -\frac{2A}{\hbar^2} (-3 + \eta) J_x J_z$$

Per riassumere

$$\frac{dJ_y}{dt} = -\frac{2A}{\hbar^2}(\eta - 3)J_x J_z \,.$$

Per la componente J_z abbiamo

$$\frac{dJ_z}{dt} = i\frac{A}{\hbar^2}\left[3J_z^{\ 2} - J^2 + \eta J_x^{\ 2} - \eta J_y^{\ 2}, J_y\right] = i\frac{A}{\hbar^2}\left\{\left[3J_z^{\ 2}, J_z\right] - \left[J^2, J_z\right] + \left[\eta J_x^{\ 2}, J_z\right] - \left[\eta J_y^{\ 2}, J_z\right]\right\} =$$

$$= i\frac{A}{\hbar^2}\left\{\left[\eta J_x^{\ 2}, J_z\right] - \left[\eta J_y^{\ 2}, J_z\right]\right\} = i\frac{A}{\hbar^2}\left\{-\eta i J_x J_y - i\eta J_x J_y - i\eta J_x J_y - i\eta J_x J_y\right\} = \frac{4A}{\hbar^2}\eta J_x J_y$$

Per riassumere

$$\frac{dJ_z}{dt} = \frac{4A}{\hbar^2}\eta J_x J_y \,.$$

6) Derivazione della costante K e della relazione successiva (slides 14 e 15)

L'espressione ottenuta in fondo alla slide 14 è frutto delle considerazioni fatte sulla forma che abbiamo fatto assumere al tensore che descrive le variazioni delle tre componenti di ***E***. Si ricorda che questo tensore risulta essere diagonale, ossia gli elementi esterni alla diagonale principale sono nulli; ciò significa, in termini utili per l'uso che ne dobbiamo fare noi, che se $i \neq j$ l'elemento del tensore è nullo. Si fa inoltre menzione al fatto che J^2 e $J_i J_j \partial E_i / \partial x_j$ sono *integrali del moto*: in parole estremamente povere significa che il valore assunto da queste grandezze rimane costante indipendentemente dal percorso seguito.

Alla luce di queste (piccolissime) considerazioni, possiamo scrivere dunque

$$J_x^2(\eta - 1) + J_y^2(-\eta - 1) + 2J_z^2 = K \Rightarrow (\eta - 1)\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + (-\eta - 1)\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + 2\cos^2(\theta) = K$$

Per valutare il valore di K, imponiamo che $\varphi = \pi/2$ e $\theta = \theta_0$: la relazione diviene semplicemente

$$(-\eta - 1)\sin^2(\theta_0) + 2\cos^2(\theta_0) = (-\eta - 1)\sin^2(\theta\ ) + 2 - 2\sin^2(\theta_0) = K \Rightarrow K = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0)$$

Per riassumere

$$K = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0).$$

È ora possibile, attraverso un minimo di algebra, trovare la relazione presentata nella slide 15.

$$(\eta - 1)\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + (-\eta - 1)\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + 2\cos^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - \sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + 2\cos^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta)\left[\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right] + 2\cos^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta)\left[1 - \sin^2(\phi)\right] - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta) + 2\cos^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta) + 2\left[1 - \sin^2(\theta)\right] = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta) + 2 - 2\sin^2(\theta) = 2 - (\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\sin^2(\theta) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \eta\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sin^2(\theta) - 2\sin^2(\theta) = -(\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2(\theta)\left[\eta - \eta\sin^2(\phi) - \eta\sin^2(\phi) - 1 - 2\right] = -(\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2(\theta)\left[\eta - 2\eta\sin^2(\phi) - 3\right] = -(\eta + 3)\sin^2(\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2(\theta) = \frac{-(\eta + 3)\sin^2(\theta_0)}{\left[\eta - 2\eta\sin^2(\phi) - 3\right]} = \frac{(\eta + 3)}{3 - \eta + 2\eta\sin^2(\phi)}\sin^2(\theta_0)$$