TRASFORMAZIONI DI LORENTZ CON UN ARBITRARIA LINEA DI MOTO

Estratto

- Questo articolo si propone di sviluppare le trasformate di Lorentz, dove la linea di moto di un generico osservatore B, non risulta essere allineata alla scelta degli assi x e y di un altro osservatore A che ne segue il moto dal suo sistema di coordinate. Viene mostrato che due sistemi ortogonali, sotto queste trasformazioni, appaiono non ortogonali tra di loro. Viene inoltre dimostrata l'utilità delle trasformazioni tramite l'applicazione di queste, a tre problemi tra cui quello della sbarra con fessura.

Introduzione

- Nella maggior parte delle trattazioni della relatività speciale la linea di movimento coincide con l’asse x. Quindi risulta che: ($y=y'$ e $z=z'$) ovvero y e z siano invarianti.
- Di casi in cui essa non coincide ne esistono molti nella realtà. Un caso pratico si ha durante il decollo e l’atterraggio di un aereo. In questo articolo la trattazione si limita ad un sistema bidimensionale che può essere esteso ad tre dimensioni.
- In due dimensioni l’algebra è più maneggevole. Essa diventa più complessa nello spazio tridimensionale e diventa conveniente allineare uno degli assi con la linea di moto.

Sviluppo di un generica trasformazione 2D di Lorentz

La trasformazione di una matrice per una rotazione planare di un angolo θ in direzione antioraria è data da:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Allora:

$x = x \cos\theta + y \sin\theta$ y $\qquad$ $y = -x \sin\theta + y$
$\cos\theta$

Con una formulazione inerziale, quando si aggiunge la coordinata temporale e si condera il fatto che la rotazione spaziale non ha effetto sulla coordinata temporale, aggiungiamo l'equazione t=t' . La matrice dunque diventa:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

Si usa il simbolo *Rθ* per denotare questa trasformazione, indicando la rotazione spaziale in senso antiorario di un angolo θ.

Similmente, la trasformazione di Lorentz lungo l'asse x genera la seguente matrice in due sistemi spaziali a due dimensioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v\gamma}{c^2} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

Dove $\gamma = 1/\sqrt[2]{1-(v^2/c^2)}$

La colonna di mezzo della matrice indica che $y' = y$ e i due zero nella colonna di mezzo indicano che non ci sono effetti incrociati di y su x o t. Si usa il simbolo *L*xv per denotare la trasformazione di grandezza *v* lungo l'asse x.

Quando la linea di movimento è inclinata di un angolo θ con l'asse x, si può utilizzare la trasformazione $R(-\theta)\ L x v R\theta$ tra i due spazi K e K' che osservano l'un l'altro muoversi alla velocità di $+v$ e $-v$, rispettivamente come è mostrato in figura 1:

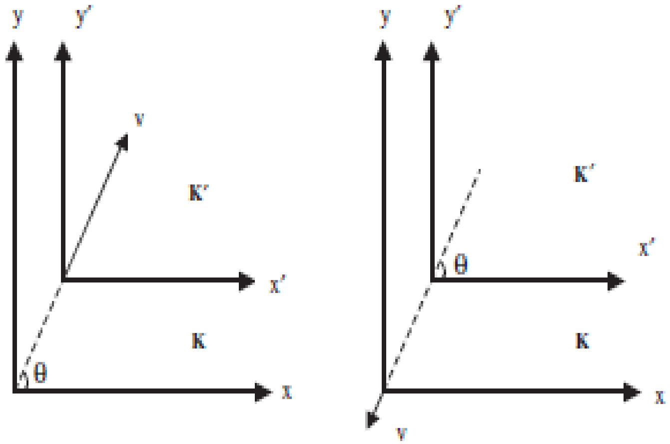

Figura 1

Come si osserva da entrambi i grafici il giusto angolo della linea di movimento è θ rispetto alla sua asse x. Ricordando che $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ otteniamo la matrice A per $R(-\theta)\ L x v\ R\theta$:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta . \cos\theta(\gamma \quad 1) & v\gamma\cos\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & \gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta & -v\gamma\sin\theta \\ \dfrac{-v\gamma\cos\theta}{c^2} & -\dfrac{v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

La matrice A trasforma le coordinate(x,y,t) dell'evento del grafico K in (x',y',t') del grafico K' quando K e K' si stanno muovendo di un proprio angolo *θ* (in senso anti orario in relazione alla rispettiva parte positiva degli assi x e x') e la velocità relativa di K' in relazione a K è +*v*.

L'inverso della matrice A, chiamata B, è ottenuta sostituendo *–v* a *+v.*

$$B = \begin{pmatrix} \gamma \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta(\gamma - 1) & v\gamma\cos\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\theta & (\gamma - 1)\gamma\sin^2\theta + \cos^2\theta & v\gamma\sin\theta \\ \dfrac{v\gamma\cos\theta}{c^2} & \dfrac{v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

La matrice B trasforma le coordinate(x’,y’,t’) dell’evento del grafico K’ in (x,y,t) del grafico K, quando k e K’ si muovono di un proprio angolo (in senso antiorario in relazione alla rispettiva parte positiva degli assi x e x’) e la relativa velocità di K in relazione a K’ è – *v.* Sfruttando le identità trigonometriche, può essere verificato che AB=BA=I, la matrice identità.

Cosi se definiamo K come $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$ e K’ come $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t' \end{pmatrix}$ abbiamo che:

K’= *A*K e K = *B*K’

Per visualizzare l’asse x’ come visto da K lasciando y’=0 (questo è un istante in K, tutti i punti y’=0). Per la condizioneche K’=AK si ha la seguente equazione:

$a21 * x + a22 * y = 0$

La pendenza di questa retta è $-a21/a22 = \sin\theta \cdot \cos\theta(1 - v)/[v \sin2\theta + \cos2\theta]$

Conclusioni

- Si può facilmente vericare che la retta ha pendenza negativa e non è allineata con l’asse x;
- Il proprio angolo tra la linea di movimento e l’asse x è lo stesso in K e K’;
- Anche la pendenza di y’ e y osservate da K e K’ sono anch’esse negative;

Appendice: non ortogonalità dei due sistemi

Il grafico 2 esplica il modo in cui due sistemi ortogonali appaiono non ortogonali tra di loro. In generale, i quadranti del grafico “in movimento” attraverso cui la linea di movimento(disegnata passante per l’origine) passa, si espandono; gli altri due quadranti del grafico “in movimento” si contraggono, come notato da un osservatore in co-movimento rispetto all’grafico stazion

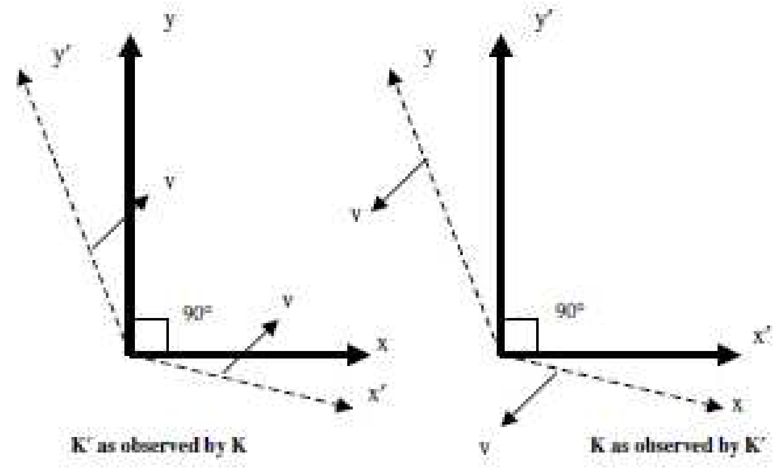

Figure 2. Observations from K (on left) and K' (on right): orthogonal proper systems appear non-orthogonal.

v

Applicazione di una trasformazione ad un oggetto che si muove di un angolo rispetto ad una bacchetta.

Si considera una bacchetta di lunghezza propria L.

Un oggetto si sta muovendo con velocità v e con un angolo θ rispetto all'asse di questa(come osservato dal sistema della bacchetta anch'esso in movimento inerziale).

Come verrà vista la lunghezza apparente della bacchetta da un osservatore in movimento con il sistema inerziale dell'oggetto?

- Si ha un sistema di coordinate in movimento con la bacchetta come mostrato in figura 3. In questo sistema l’asse x è sulla lunghezza della bacchetta e un’estremità di questa ha coordinate nell’origine. L’altra ha x=L e Y=0.

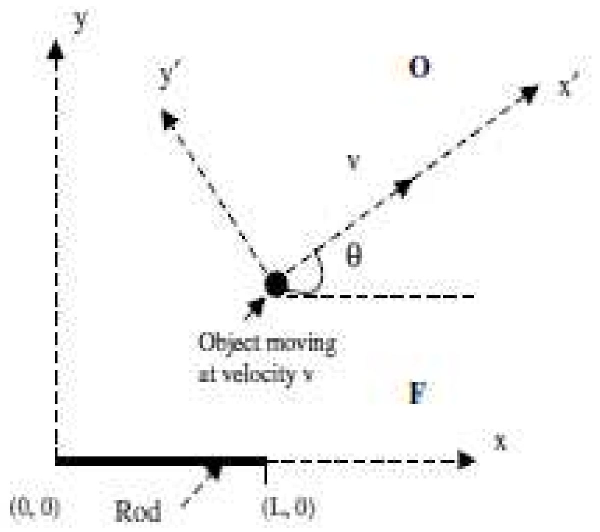

Figure 3. Rod in frame F and object in frame O moving at velocity v.

Le coordinate spaziali delle due estremità ad un tempo arbitrario sono: t1(0,0,t) e t2(L,0,t). É possibile visualizzare un sistema di coordinate O in movimento con l’oggetto con l’asse x allineato con la linea del moto relativo. Per poter trasformare F in O viene utilizzata la trasformazione [*L*xv*Rθ*] come specificato nell prime due equazioni. La risultante trasformazione sarà

$$T = LxvR\theta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -v\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v\gamma}{c^2} & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\cos\theta & \gamma\sin\theta & -v\gamma \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \frac{-v\gamma\cos\theta}{c^2} & \frac{-v\gamma\sin\theta}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

È possibile applicare la matriceT come si può vedere dall’ultima equazione per trasformare le coordinate dell’evento da F a O. un capo della bacchetta a t=0 in F ha coordinate(0,0,0) e si trasforma in (0,0,0) in O. Questo corrisponde a t’=0. Per far si che si possa osservare l’altro capo della sbarra dal sistema inerziale O a t’=0, si trasformano le coordinate dell’altro capo ad un certo istante t nel grafico F mettendo t’=0

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi:

$x' = L\gamma \cos\theta - v\gamma t$

$y' = -L\sin\theta$

$0 = -(Lv\gamma \cos\theta)/c2 + \gamma t.$

Risolvendo l'ultima equazione per t e sostituendo il valore nella prima si ottiene: $x' = L\cos\theta/\gamma$.

Cosi all'istante t'=0 in O un'estremità della bacchetta ha coordinate x'=0; y'=0 mentre l'altra estremità ha coordinate x'= Lcos θ/γ e y'=−Lsin θ. Quindi la lunghezza apparente della bacchetta osservata da O è: $\sqrt[2]{(\cos 2\ \theta/\gamma\ 2) + \sin 2\ \theta}.$

L*

Conclusioni

- Questa quantità è uguale a L quando $\gamma = 1$ (non c'è moto relativo),
- è uguale L/γ quando $\theta = 0$(tradizionali trasformazioni di Lorentz lungo la linea di moviemento),
- è infine uguale a L quando $\theta = 90$(non c'è variazione di lunghezza perpendicolare alla linea di movimento).

Tutti questi risultati sono coerenti con i rinomati concetti delle contrazioni Lorentziane.

Applicazioni delle trasformazioni al problema della collisione di bacchette inclinate

In questo caso abbiamo due bacchette parallele(con angoli propri) in moto relativo con gli assi di entrambe le bacchette che formano un angolo θ con la retta del moto relativo. Se entrambe gli oggetti scelgono i loro rispettivi assi x' e x è possibile utilizzare le trasformazioni A e B nelle equazioni precedenti come trasformazione diretta e inversa tra i due sistemi inerziali. Nel grafico 4 la collisione del fondo è presa nell'origine(0,0,0) in entrambi i grafici K e K'. Quella della cima ha coordinate(L,0,t) in K e (L,0,t') in K'.

Usando la matrice A che trasforma (L,0,t) e eguagliando il risultato a (L,0,t’) si ottengono le seguenti equazioni:

$$(\gamma \cos^2\theta + \sin^2\theta)L - (v\gamma \cos\theta)t = L$$

$$L\sin\theta \cos\theta(\gamma - 1) - (v\gamma \sin\theta)t = 0$$

$$-(v\gamma / c^2)L \cos\theta + \gamma t = t'$$

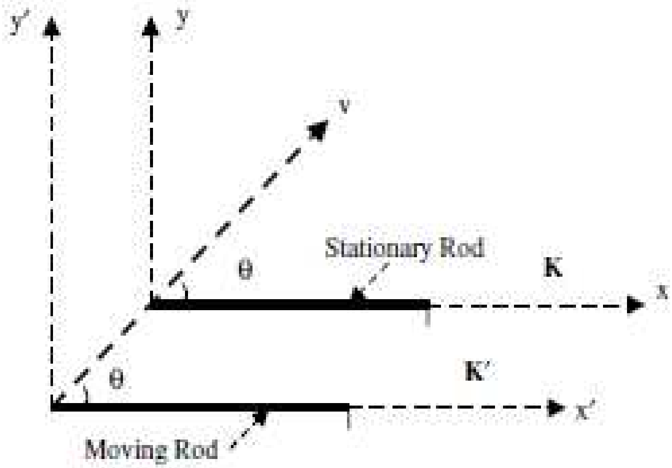

Figure 4. Rod in frame K′ moves towards stationary rod in frame K at velocity v.

Figura 4: rappresentazione grafica del problema delle bacchette

Conclusioni

- Dalle ultime due equazioni si ottiene lo stesso risultato di fatto $t = (L/v) \cos \theta[1 - (1/\gamma)]$.

  Questa ridondanza è dovuta alla precedente assunzione che l'estremità superiore della prima sbarra collide con l'altra estremità superiore della seconda sbarra.

- Sostituendo questo risultato nell'ultima equazione otteniamo $t' = (L/v) \cos \theta[(1/\gamma) - 1]$.

  Questo è coerente con il risultato ottenuto in precedenza e conferma la reversibilità nell'ordine temporale delle collisioni delle estremità superiori e inferiori nei due sistemi inerziali in co-movimento con ognuna delle due sbarre rispettivamente.

Applicazione della trasformazione al problema della bacchetta *e della fessura*

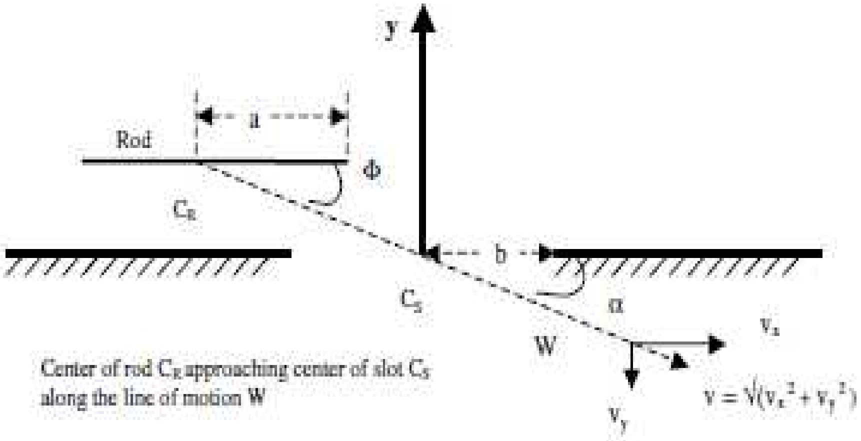

Figure 5. Initial conditions of the rod-slot problem.

In questo caso gli angoli propri sono diversi e questo presenta una ancor più generale applicazione. Nello scenario la bacchetta si muove in due direzioni, ma solo con velocità costante. Inoltre, la linea di movimento(che è, la linea che unisce i centri della sbarra e la fessura) non è allineata con uno degli assi della bacchetta o della fessura, non c'è gravità, e cosi non c'è spinta o propagazione di essa.

Si assume che l’angolo proprio dell’asse della bacchetta con la linea di movimento sia Φ e che quello della fessura sia α. La bacchetta ha un sistema di coordinate con l’asse x lungo l’asse della bacchetta e l’origine al centro della bacchetta.

Similmente la fessura ha il sistema di coordinate con l’asse x lungo l’asse della fessura e l’origine al centro della fessura. L’incontro dei centri della bacchetta e della fessura è l’origine con $(x,y,t)=(x',y',t')=(0,0,0)$.

La bacchetta è parallela alla fessura($\Phi=\alpha$) ma in generale $\Phi\neq\alpha$. Quando si passa dal grafico di riferimento della bacchetta a quello della fessura occorre utilizzare in sequenza queste trasformazioni:

$R(-\Phi)$ è la prima trasformazione che allinea alla retta di movimento con l’asse x.

In seguito si compie una trasformazione di Lorentz di valore –v per cambiare il grafico di riferimento della fessura; è definita come: $L_x(-v)$.

Le coordinate risultanti sono nel grafico di riferimento della fessura ma con l’asse x allineato alla linea di movimento.

Dal momento che la fessura ha un sistema privilegiato con l’asse x allineata all’asse della fessura occorre compiere una trasformazione $R(\alpha)$.

Cosi complessivamente si avra la trasformazione:

$$R(\alpha)L_x(-v)R(-\Phi).$$

Chiamata tale trasformazione D, si ottiene gli elementi di D come segue:

$$D=\begin{pmatrix} \gamma\cos\varphi\cos\alpha + \sin\alpha\sin\varphi & -\gamma\sin\varphi\cos\alpha & +\sin\alpha\cos\varphi v\gamma\cos\alpha \\ -\gamma\cos\varphi\sin\alpha + \cos\alpha\sin\varphi & \gamma\sin\varphi\sin\alpha & +\cos\varphi\cos\alpha - v\gamma\sin\alpha \\ v\gamma\cos\frac{\varphi}{c^2} & -v\gamma\sin\frac{\varphi}{c^2} & \gamma \end{pmatrix}$$

a denota la mezza lunghezza della sbarra, e *b* la mezza lunghezza della fessura.

Il limite principale della sbarra sono le coordinate x=a; y=0 per un tempo arbitrario t nel grafico della sbarra.

Questo può essere connotato da (a,0,t). Similmente il limite frontale della fessura ha le coordinate (b,0,t’) nel grafico della fessura per un tempo arbitrario t’ nel grafico della fessura.

Per far si che la sbarra oltrepassi la fessura, (a,0,t) deve trasformarsi in (b,0,t') per un valore di t.

$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = D$$

Questo da luogo alle seguenti tre equazioni:

$$a\,\gamma \cos\Phi \cos\alpha + a \sin\alpha \sin\Phi + vt\gamma \cos\alpha = b$$

$$-a\gamma \cos\Phi \sin\alpha + a\cos a \sin\Phi - vt\gamma \sin\alpha = 0$$

$$(av\gamma / c^2) \cos\Phi + \gamma\, t = t'$$

Dalla seconda si ottiene:

$$t = (a \cos \alpha \sin\Phi - a\gamma \cos\Phi \sin \alpha)/(v\gamma \sin \alpha)$$

Sostituendo a t nella prima equazione si ha:

$a\gamma \cos\Phi \cos \alpha + a \sin \alpha \sin\Phi + (a \cos \alpha \sin\Phi - a\gamma \cos\Phi \sin \alpha) \quad \cos \alpha / \sin \alpha = b$

moltiplicando entrambi i membri per il $\sin\alpha$ e semplificando si ottiene:

$$a \sin \Phi(\sin2 \alpha + \cos2 \alpha) = b \sin \alpha$$

oppure:

$$a \sin\Phi = b \sin \alpha$$

Cosi si è trovato che per far si che la sbarra attraversi appena la fessura si deve ottenere una condizione che dipende solamente da una delle proprie quantita, che sono:

la lunghezza propria della sbarra e della fessura e gli angoli propri tra la linea di movimento e l’asse della sbarra o della fessura.

Inoltre, è facile dedurre che ogniqualvolta $a\sin\Phi < b\sin\alpha$, la sbarra passa attraverso la fessura. Può essere inoltre dedotto, dalla precedente discussione, che se la linea di movimento passa attraverso il centro della sbarra non interseca la fessura nel suo centro, ma divide la fessura in due lunghezze diverse una dall’altra: b1 e b2. Le condizioni della sbarra che passa attraverso la fessura sono date da:

Conclusioni Finali

Si è ottenuto una generale trasformazione di Lorentz in due dimensioni con un’arbitraria linea di moto. Si è applicata a tre problemi e si è visto che portava alle medisime conclusioni già stabilite dalla precedente letteratura. Tali problemi hanno illustrato la convenienza nello scegliere il sistema di coordinate in ciascuno dei sistemi di riferimento. Cosi si è visto in alcuni esempi il merito di aver usato la trasformata di Lorentz con la linea di moto non coincidente con uno degli assi. Questo metodo può essere esteso alle spazio tridemensionale con la linea di moto arbitrale. L’algebra diventa però più complessa ed è per questa ragione che viene fatta coincidere la linea di moto con gli assi quando si utilizza la trasformata di Lorentz.