Scattering
Cinematica Relativistica

I – Unita' naturali

Grandezze

Grandezze fisiche: doppia personalita'

Quantita' suscettibili di misura
Elementi di un modello matematico di ogni sistema fisico

Esempi di sistemi fisici per i quali si puo' costruire un modello matematico:

Grave in caduta nel campo gravitazionale terrestre
Movimento a orologeria di un cronometro meccanico
Circuito elettrico di un cronometro a quarzo
Modello atomico di Fermi-Thomas
Modello a particelle indipendenti di un nucleo
Modello Standard dell' Universo

Misure

Idea molto antica: Origini all'alba delle attivita' commerciali

Sempre: <u>Diretta</u>

Confronto

Es: *Peso*

Eventualmente: <u>Diretta</u> + <u>Indiretta</u>

Confronto + Procedura matematica

Es: *Velocita' media*

Risultato della misura: espresso come *numero & unita'*

Unita' - I

Confronto: Necessita' di un campione di riferimento
Risultato: Espresso come *rapporto* fra grandezza e campione

In principio:

Ogni grandezza ha il suo campione di riferimento, indipendente da quello delle altre grandezze

Es:

Lunghezza in *braccia*
Area in *pelli di vacca*
Volume in *noci di cocco*
Tempo in *lune*
Velocita' in *nodi*

Unita' - II

Ogni individuo puo' scegliere il suo campione:

Lunghezza in *piedi*
Area in *acri*
Volume in *pinte*
Tempo in *clessidre*
Velocita' in *leghe al giorno*

Per confronti fra individui diversi: *Fattori di conversione*
Numeri che esprimono il rapporto fra la grandezza dei campioni

Osservazione centrale:

Non e' necessario assegnare alle grandezze una dimensione; e' sufficiente un'unita' di misura

Modello

Ma:

Esistono *relazioni matematiche* fra grandezze diverse, che sono espressione di *leggi fisiche* derivate dall'esperienza

Es.

Area di un quadrato = (Lunghezza del lato)^2

La geometria e' prima di tutto una parte della fisica

Velocita' = Spazio/Tempo

Legge fondamentale della dinamica: $\boldsymbol{F} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$

I Principio della Termodinamica: $dU = \delta Q - \delta L$

Eq. di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Dimensioni - I

Legge fisica: mette in relazione due o piu' grandezze diverse

A titolo di esempio, si consideri:

$$\boldsymbol{F} = km\boldsymbol{a}$$

Questa relazione e' vera qualunque sia l'insieme di unita' di misura scelto per masse, accelerazioni e forze, ogni unita' essendo scelta in modo indipendente dalle altre. La quantita' k e' un opportuno fattore di conversione. *In questo caso non e' necessario assegnare dimensioni alle grandezze fisiche*

La relazione consente pero' di scegliere unita' di misura per forze, masse e accelerazioni tali da poter porre $k = 1$

Dimensioni - II

Si vuole di solito ridurre al minimo il numero di fattori di conversione

1) Vengono scelte alcune grandezze fra loro indipendenti, che si considerano come *fondamentali*: Per esse si determinano delle arbitrarie unita' di misura.

Il numero di grandezze fondamentali e' maggiore o uguale al minimo necessario alla completa descrizione matematica di un insieme di sistemi fisici (p.es. quelli meccanici). Si noti che in questo senso il numero puo' evolvere: p es, quando si scoprono le proprieta' elettriche dei sistemi puo' risultare conveniente introdurre nuove grandezze fondamentali.

La scelta di quante (almeno in numero uguale al minimo) e quali grandezze considerare fondamentali e' arbitraria

Dimensioni - III

2) Tutte le altre grandezze sono considerate come *derivate*, ossia definite in base a definizioni o leggi fisiche.

Leggi fisiche, incluse le definizioni, usate per esprimere le unita' derivate in termini di quelle fondamentali: anch'esse scelte in modo arbitrario.

Principio generale:

Il rapporto fra due grandezze omogenee deve essere indipendente dall'unita' usata

$\rightarrow$ La generica grandezza derivata *f*, funzione delle grandezze fondamentali

$$f = f\left(l_1, l_2, .., l_p; m_1, m_2, ..., m_q; t_1, t_2, ...t_r\right)$$

e' omogenea nelle *l*, nelle *m*, nelle *t*,… quindi in tutte le grandezze fondamentali.

Dimensioni - IV

Il grado di omogeneita' di *f* in ciascuna di esse (α,β,γ,…) si chiama la *dimensione* di *f* rispetto a *l,m,t,…*

In particolare, ogni grandezza fondamentale ha dimensione 1 rispetto a se stessa:

$m = m^1$ Dimensione di $m : [M]$

Ogni grandezza acquista un attributo extra, ossia la sua dimensione fisica

Ma:

La dimensione di ogni grandezza non e' un attributo assoluto: dipende dal sistema di unita' di misura adottato

SI e cgs

cgs (1874)
Sistema di unita’ di misura a orientamento teorico/sperimentale:
3 grandezze fondamentali
Carica elettrica: Grandezza derivata $\rightarrow$ Dimensione $Q = [M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}]$

SI (1971)
Sistema di unita’ di misura a orientamento ingegneristico:
7 grandezze fondamentali
Corrente elettrica: Grandezza fondamentale $\rightarrow$ Dimensione $Q = [I][T]$

Entrambi fortemente ancorati nella fisica classica

Ingnorano relativita’, meccanica quantistica, struttura granulare della materia

Sistema gaussiano

Come rappresentiamo le leggi dell'elettromagnetismo nel sistema cgs?
Diverse possibilita', ognuna con pregi e difetti
Migliore soluzione: Sistema di unita' gaussiano
Basicamente:

Maxwell's Equations
Gaussian Units

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad \mathbf{J}_b = c\nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$W = Ri^2 \qquad U = \frac{1}{2}Cv^2 \qquad U = \frac{1}{2}Li^2$$

Sistema di Heaviside - Lorentz

Sistema di unita' gaussiano razionalizzato (come anche il SI):

Gli onnipresenti fattori 4π vengono confinati nelle soluzioni, e non nelle equazioni

Es: Il teorema di Gauss lega il flusso di E attraverso una superficie alla carica totale contenuta
Carica puntiforme, superficie sferica concentrica:

$$\Phi_{sfera}(\boldsymbol{E}) = q \rightarrow 4\pi r^2 E = q \rightarrow E = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r^2}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ Razionalizzato

$$\Phi_{sfera}(\boldsymbol{E}) = 4\pi q \rightarrow 4\pi r^2 E = 4\pi q \rightarrow E = \frac{q}{r^2}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ Non razionalizzato

Maxwell's Equations
Heaviside-Lorentz Units

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad \mathbf{J}_b = c\nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$W = Ri^2 \qquad U = \frac{1}{2}Cv^2 \qquad U = \frac{1}{2}Li^2$$

Costanti universali - I

Fissato il sistema di unita', compaiono in alcune leggi fisiche delle costanti sperimentali, non legate a particolarita' di sostanze, stati di aggregazione, etc: *Costanti universali*

Il valore di molte costanti universali dipende dal sistema di unita' usato

Es Gravitazione

$$\boldsymbol{F} = G\frac{mm'}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

La dimensione e l'unita' di forza essendo definite nel SI da

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad Dim\ \boldsymbol{F} = [M][L][T^{-2}]$$

G e' una quantita' sperimentale con valore $6.674\ 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$ e dimensione $[M\text{-}1][L^3][T^{-2}]$

Alternativamente, si potrebbe usare la legge di gravitazione per definire una differente unita' di forza (magari chiamandola l' "unita' di forza gravitazionale", con dimensione $[M^2][L^{-2}]$), in cui $G = 1$ con dimensione *zero*: G sarebbe un (banale) fattore di conversione

Costanti universali - II

Quantita' come G: Compaiono in diverse equazioni di validita' generale
Doppia possibilita':

Costanti universali: Dimensione non nulla, valore dall'esperimento
oppure
Fattori di conversione: Senza dimensione, valore che si puo' porre = 1

La scelta dipende ovviamente da come viene costruito il sistema di unita'.

Sistemi di unita' 'naturali': basati sulla seconda scelta

Nell'esempio, l'unita' 'naturale' di forza gravitazionale e' quella che si esercita fra due unita' di massa a distanza unitaria. Misurare le forze in questa unita' equivale a porre $G = 1$, adimensionale.

Usualmente non lo si fa (es: ne' in cgs, ne' in SI): non c'e' solo la forza gravitazionale

Costanti universali - III

SI: Unita’ legate alla pratica ingegneristica

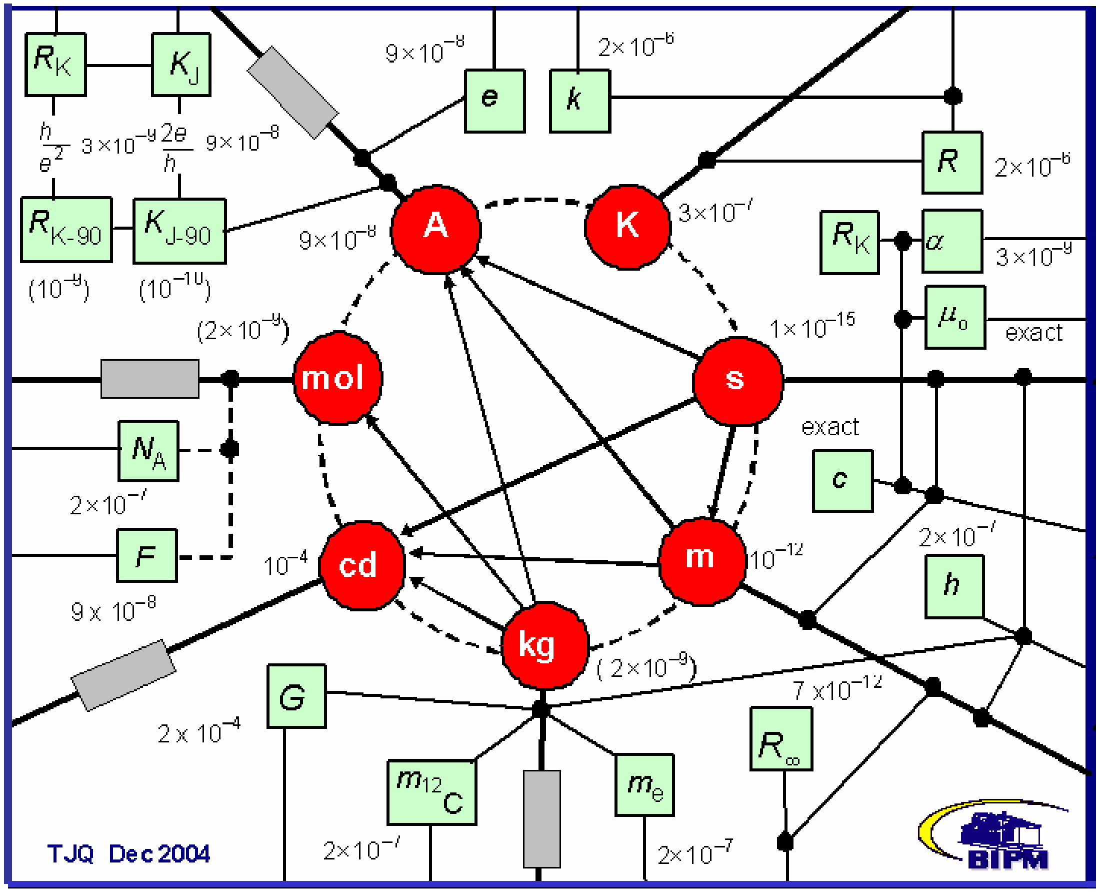
Dimensione ‘umana’ (o quasi…)
Slegate da proprieta’ dei costituenti elementari della materia
Slegate da proprieta’ delle interazioni fondamentali

Poco adatte ai modelli matematici relativi alla struttura atomica, nucleare, subnucleare

Risultati:

Molte costanti universali dimensionate
Relazione complicata fra proprieta’ elementari, costanti universali, unita’ di misura

Costanti universali e standard del SI



Relazioni fra costanti universali e campioni delle unita’ fondamentali nel SI
Box grigie: Effetti poco noti di instabilita’ a lungo termine del campione del kg
(Fonte: Bureau International des Poids et des Mesures)

Relativita' ristretta, Meccanica quantistica

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= c^2t^2 - (d\mathbf{r})^2 \\ m^2c^4 &= E^2 - p^2c^2 \end{aligned}\right\}$$ Invarianti fondamentali, equivalenti

$$[q, p] = i\hbar$$ Commutatore fondamentale

Relazioni che valgono all'interno di ogni teoria quantistica e relativistica (Es Modello Standard)

Consentono una scelta alternativa di unita' fondamentali

Per semplicita': Riferimento a unita' e dimensioni del sistema cgs

Unita' naturali

Quantita' c,h possono essere poste = 1, con dimensione zero.
Conseguenze:

$$\left.\begin{array}{l} \dim\ l = \dim\ t \\ \dim\ E = \dim\ m = \dim\ p \\ \dim\ l = \dim\ p^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sopravvive una sola dimensione}$$

Scelta normalmente fatta:

Energia come unica grandezza fondamentale

Dettata dalle applicazioni tipiche: Sistemi microscopici
Per un sistema microscopico, l'energia e' quasi sempre molto piu' accessibile delle dimensioni lineari, o delle durate (entrambe molto piccole)

Grandezze fisiche in unita' naturali

Quantity	Symbol	natural units	MKSA
Length	ℓ	1/eV	$1.9732705 \cdot 10^{-7}$ m $\approx 0.2\ \mu$m
Mass	m	1 eV	$1.7826627 \cdot 10^{-36}$ kg
Time	t	1/eV	$6.5821220 \cdot 10^{-16}$ s $\approx .66$ fs
Frequency	ν	1 eV	$1.5192669 \cdot 10^{15}$ Hz
Speed	v	1	$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
Momentum	p	1 eV	$5.3442883 \cdot 10^{-28}$ kg·m/s
Force	F	1 eV^2	$8.1194003 \cdot 10^{-13}$ N
Power	P	1 eV^2	0.24341350 mW
Energy	E	1 eV	$1.6021773 \cdot 10^{-19}$ J
Charge	q	1	$1.8755468 \cdot 10^{-18}$ C
Charge density	ρ	1 eV^3	244.10013 $\mathrm{C/m^3}$
Current	I	1 eV	2.8494561 mA
Current density	J	1 eV^3	$7.3179379 \cdot 10^{10}$ $\mathrm{A/m^2}$
Electric field	E	1 eV^2	432.90844 V/mm
Potential	Φ	1 eV	85.424546 mV
Polarization	P	1 eV^2	$4.8167560 \cdot 10^{-5}$ $\mathrm{C/m^2}$
Conductivity	σ	1 eV	$1.6904124 \cdot 10^{5}$ S/m
Resistance	R	1	29.979246 Ω
Capacitance	C	1/eV	$2.1955596 \cdot 10^{-17}$ F
Magnetic flux	ϕ	1	$5.6227478 \cdot 10^{-17}$ Wb
Magnetic induction	B	1 eV^2	1.4440271 mT
Magnetization	M	1 eV^2	$1.4440271 \cdot 10^{4}$ A/m
Inductance	L	1/eV	$1.9732705 \cdot 10^{-14}$ H

Costanti universali in unita' naturali

Planck's quantum	$\hbar$	1	$1.05457266 \cdot 10^{-34}$ J·s
$h = 2\pi\hbar$	h	2π	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$ J·s
Charge of electron	e	$8.5424546 \cdot 10^{-2}$	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C
Bohr radius, $\hbar^2/me^2$	a_0	$2.6817268 \cdot 10^{-4}/\mathrm{eV}$	$5.29177249 \cdot 10^{-11}$ m
Energy 1 electron Volt	eV	1 eV	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ J
Rydberg energy, $e^2/2a_0$	E_{Ryd}	13.605698 eV	$2.1798741 \cdot 10^{-18}$ J
Hartree energy, e^2/a_0	E_{h}	27.211396 eV	$4.3597482 \cdot 10^{-18}$ J
Speed of light	c	1	$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
Permeability of vacuum	μ_0	4π	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Permittivity of vacuum	ε_0	$1/4\pi$	$8.854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m
Bohr magneton	μ_B	$8.3585815 \cdot 10^{-8}/\mathrm{eV}$	$9.2740154 \cdot 10^{-24}$ J/T
Mass of electron	m_e	510.99906 keV	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Mass of proton	m_p	938.27234 MeV	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
Mass of neutron	m_n	939.56563 MeV	$1.6749286 \cdot 10^{-27}$ kg
Gravitation constant	G	$6.70711 \cdot 10^{-57}/\mathrm{eV}^2$	$6.67259 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2

Costanti universali a dimensione 0 - 1

Nel sistema cgs, la costante di struttura fina e':

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}, \dim \alpha = 0$$

Quindi α ha lo stesso valore nel sistema cgs, o in ogni altro sistema di unita'

Status diverso da quello di altre costanti universali come c, G e h:
Non si puo' ridurla a fattore di conversione ridefinendo le unita' di misura

Perche' α e' importante?
Oltre a determinare la struttura dei livelli dell'atomo di idrogeno, nel Modello Standard ha il ruolo di *costante di accoppiamento* dell'interazione elettromagnetica

Costanti universali a dimensione 0 - 2

Stessa situazione con la costante di accoppiamento gravitazionale:

$$\alpha_g(e) = \frac{G m_e^2}{\hbar c}$$

NB α_g dipende dalla massa di riferimento, in questo caso scelta come quella dell'elettrone.

Situazione (solo superficialmente!) simile per le costanti di accoppiamento elettrodebole e forte:

Le 'costanti' variano con l'energia

Modello Standard

Nel Modello Standard: 25 costanti

6 masse dei quark
6 masse dei leptoni
4 angoli di mixing dei quark
4 angoli di mixing dei leptoni
2 coupling
1 angolo di Weinberg
1 massa del W
1 massa dell'H

11 parametri adimensionali

- gauge sector (2 parameters)
  elementary charge e
  weak mixing angle θ_W, $\cos\theta_\mathrm{W} = \frac{M_\mathrm{W}}{M_\mathrm{Z}}$
- Higgs sector (2 parameters)
  Higgs-boson mass M_H
  W-boson mass M_W
- fermion sector (9+4 parameters)
  fermion masses $m_\mathrm{e}, m_\mu, m_\tau$
  $m_\mathrm{u}\, m_\mathrm{d}, m_\mathrm{c}, m_\mathrm{s}, m_\mathrm{t}, m_\mathrm{b}$
  quark-mixing matrix (V_{ij}) $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta_\mathrm{CP}$
  if right-handed neutrino is included in addition
  neutrino masses $m_{\nu_\mathrm{e}}, m_{\nu_\mu}, m_{\nu_\tau}$
  lepton-mixing matrix $\theta^l_{12}, \theta^l_{23}, \theta^l_{13}, \delta^l_\mathrm{CP}$
  $\Rightarrow$ 12+8 parameters