

# Scattering

# Cinematica Relativistica

## II – Scattering in fisica classica

# Scattering - I

Mezzo sperimentale per eccellenza per ottenere informazioni sulla struttura dei sistemi fisici.

Usato ampiamente anche dalla natura

Archetipo di tutti gli esperimenti di scattering: *Visione*

*Sorgente di luce*

*Oggetto*

*Rivelatore di luce*

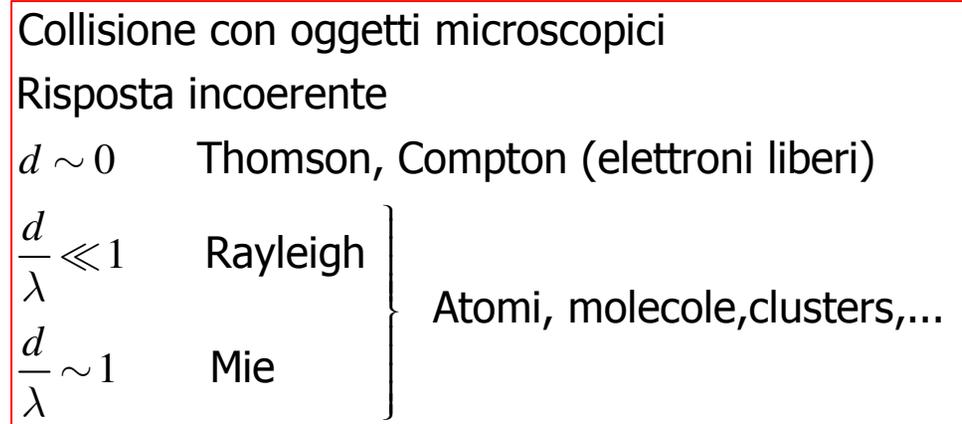
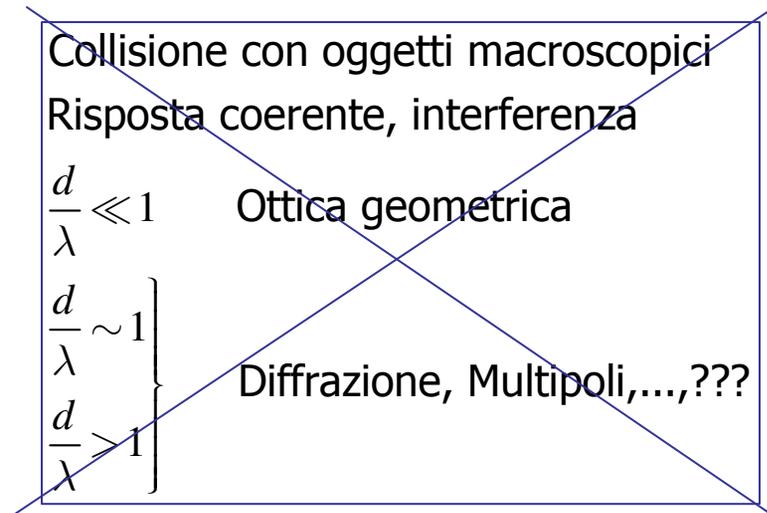
La luce visibile, generata dalla sorgente (Sole, lampada, LED, laser,...), viene diffusa dall'oggetto e raccolta dal rivelatore (Occhio, lastra fotografica, CCD, fotomoltiplicatore,..)

# Scattering - II

Modello fondamentale di ogni processo di scattering, sia corpuscolare sia ondulatorio: *Collisione*

Es: Scattering di Onde elettromagnetiche/Fotoni

Descrizione della collisione fortemente dipendente dal tipo di bersaglio e dal rapporto fra lunghezza d'onda e dimensioni del bersaglio



# Scattering - III

Effetti della collisione dipendenti da

Forma e dimensione  
Struttura interna } del bersaglio

Diffrazione: Forma/Dimensioni di uno schermo/apertura

Trattazione classica

Scattering: Forma/Dimensioni/Struttura di un bersaglio

Trattazione classica sufficiente in qualche caso (Es Antenne)

Trattazione quantistica necessaria a livello microscopico

# Thomson - I

## Scattering Thomson

Diffusione di onde elettromagnetiche da elettroni liberi

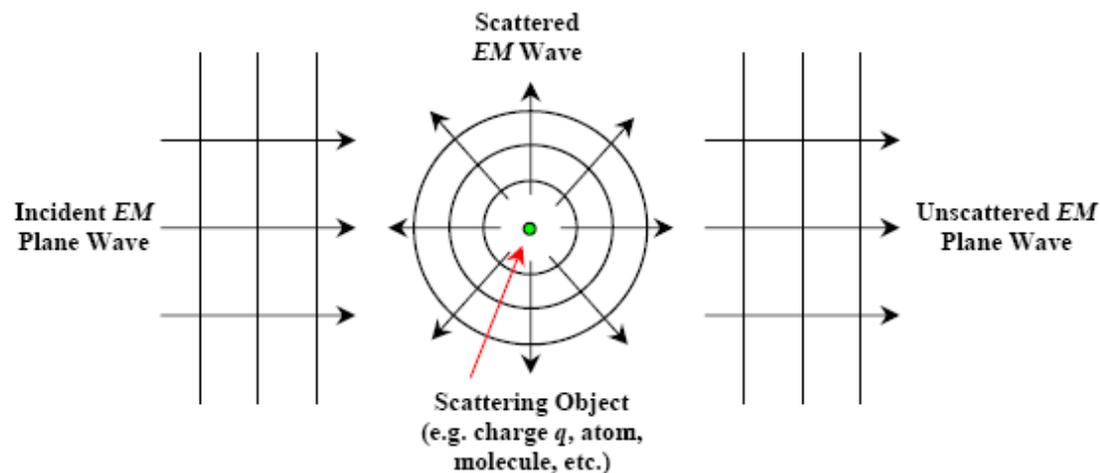
Onda elettromagnetica incidente: Piana

Azione su elettrone libero: Solo  $\mathbf{E}$ , se  $v \ll c$

Risultato:

Moto armonico  $\rightarrow$  Dipolo oscillante  $\rightarrow$  Radiazione (dipolo elettrico)

Onda elettromagnetica diffusa: Sferica



*Assorbimento + Riemissione di radiazione = Scattering*

# Thomson - II

$$\frac{dP_{rad}}{d\Omega} = \langle |\mathbf{S}_{rad}| \rangle \cdot r^2 \quad \text{Potenza media irraggiata/Angolo solido}$$

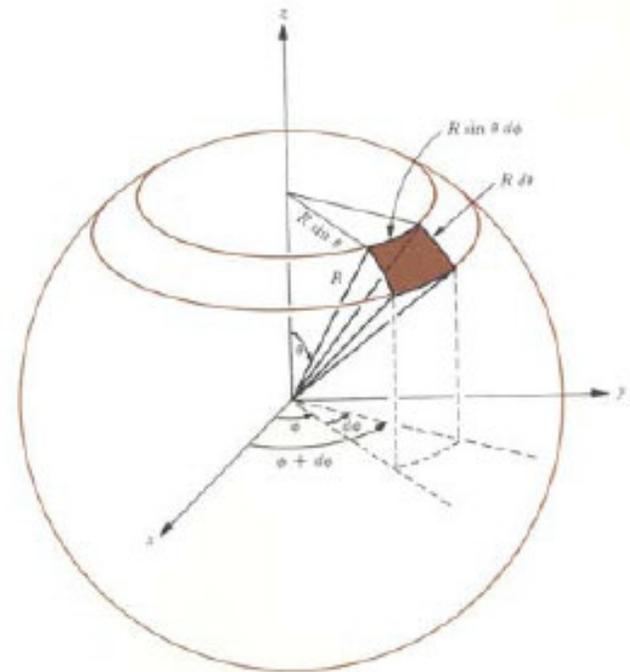
$$I_{inc} = \langle |\mathbf{S}_{inc}| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c \quad \text{Potenza media incidente per un. di superficie}$$

Definizione di sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I_{inc}} \frac{dP_{rad}}{d\Omega}$$

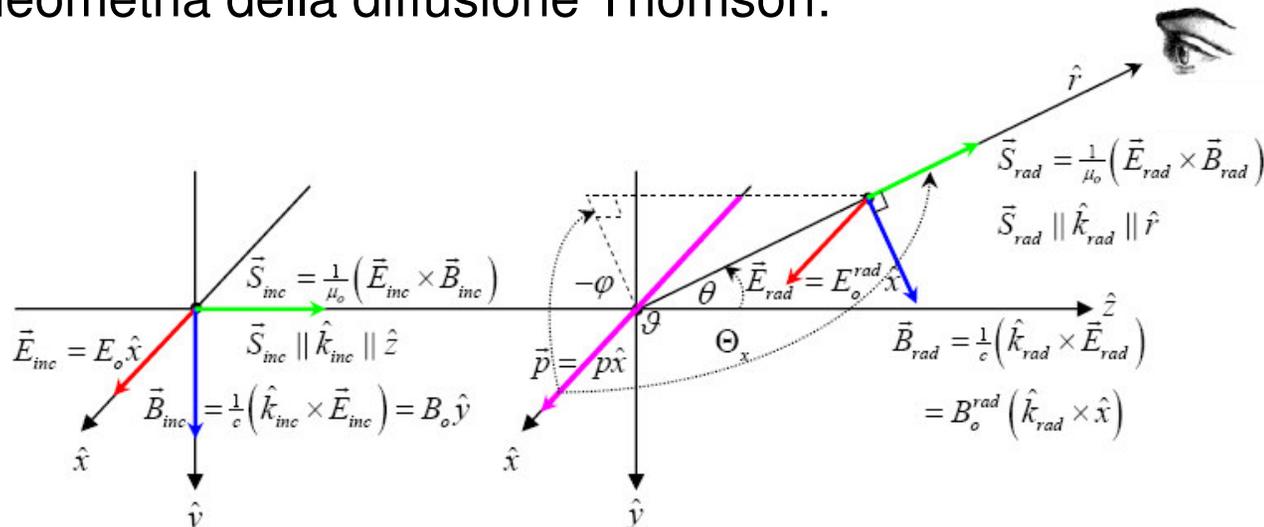
$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle |\mathbf{S}_{rad}| \rangle \cdot r^2}{\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c} \quad \text{Sez. d'urto differenziale}$$

$$\rightarrow \sigma = \int_{\text{Ang. solido}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad \text{Sez. d'urto totale}$$



# Thomson - III

Geometria della diffusione Thomson:



$$\cos \Theta_x = \hat{r} \cdot \hat{x} = \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \Theta_x &= 1 - \cos^2 \Theta_x = 1 - (\hat{r} \cdot \hat{x})^2 = 1 - (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi) = 1 - \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \varphi) \\ &= 1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \end{aligned}$$

# Thomson - IV

Sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma_T^{LPx}(\theta, \varphi)}{d\Omega} = \frac{1}{\langle |\vec{S}_{inc}(0, t_0)| \rangle} \frac{d\langle P_{rad}(\theta, \varphi, t_0) \rangle}{d\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 c} \frac{\mu_0 \frac{1}{2} \left( \frac{q^4 \mathcal{E}_0^2}{m^2} \right)}{16\pi^2 c} \sin^2 \Theta_x$$

$$= \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta_x$$

$$\frac{d\sigma_T^{LPx}(\theta, \varphi)}{d\Omega} \simeq \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta_x = \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \quad (m^2/sr)$$

Sezione d'urto totale:

$$: r_e \equiv e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \simeq 2.82 \times 10^{-15} m, \text{ Raggio classico dell'elettrone}$$

$$\sigma_T^{LPx} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 (m^2)$$

Indipendente da

Frequenza della radiazione incidente  
 Ampiezza

# Rayleigh - I

Scattering su atomi e molecole: Elettroni legati  
Nuclei pesanti, non risentono del campo elettrico dell'onda

Modello supersemplificato:  
Legame elastico + Termine di smorzamento

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -i\omega x(t), \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

# Rayleigh - II

$$-x(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega x = -e \frac{E_0}{m}$$

$$x_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega x_0 = e \frac{E_0}{m}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

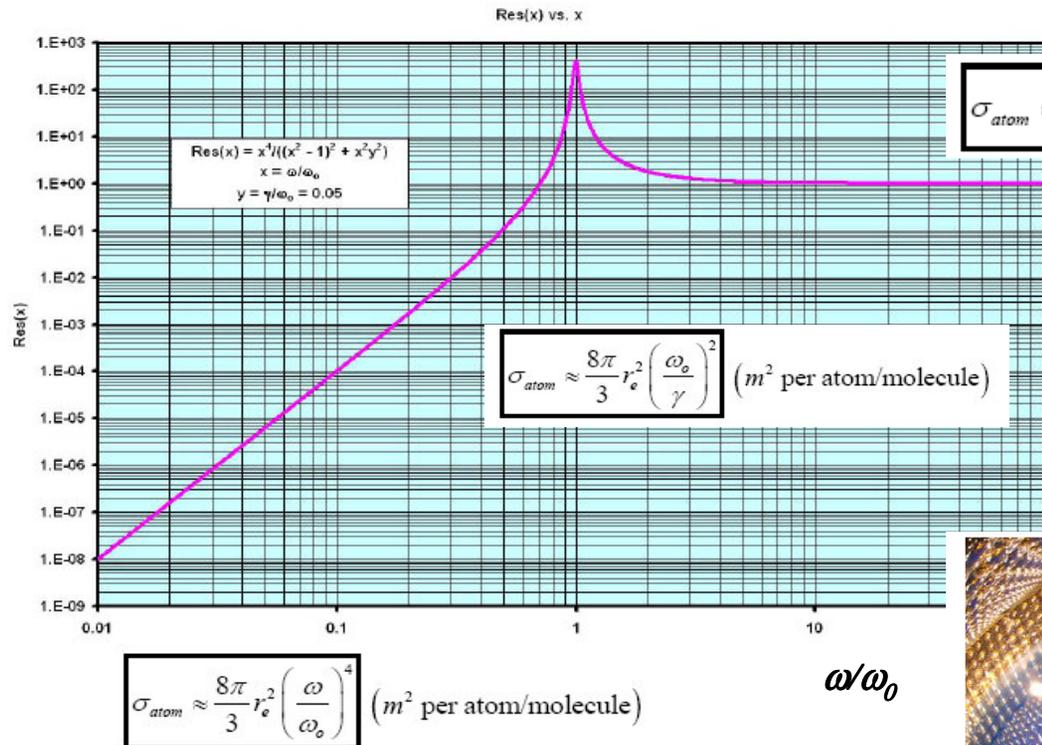
$$\frac{dP_r^{rad}(\theta, \varphi, t_0)}{d\Omega} = \bar{S}^{rad}(r, \theta, \varphi, t_0) \cdot r^2 \hat{r} = \frac{\mu_0 \ddot{p}_{tot}^2(0, t_0)}{16\pi^2 c} (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \left( \frac{\text{Watts}}{\text{steradian}} \right)$$

$$\frac{d\sigma_{atom}^{LPx}(\theta, \varphi)}{d\Omega} = r_e^2 \frac{\omega^4}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]} (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \quad (m^2/sr \text{ per atom/molecule})$$

$$\sigma_{atom} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]} \quad (m^2 \text{ per atom/molecule}).$$

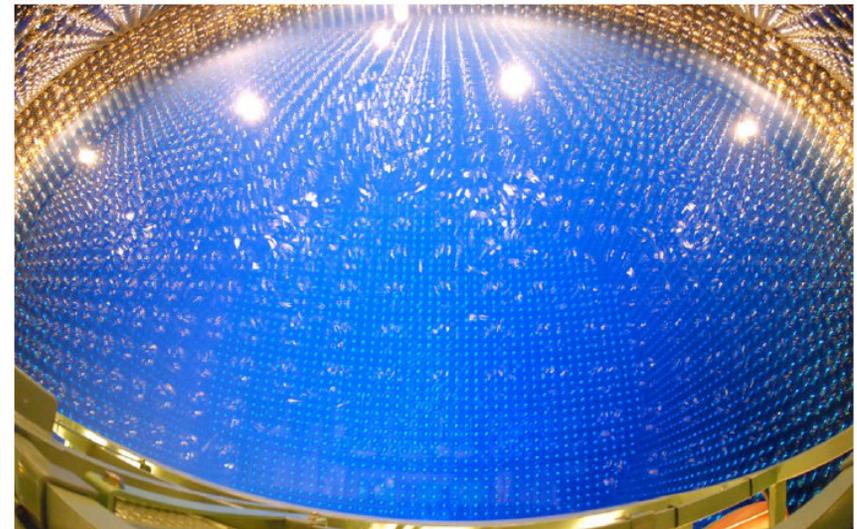
Forte dipendenza da frequenza

# Rayleigh - III



$$\sigma_{atom} \approx \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (m^2 \text{ per atom/molecule})$$

Luce diffusa a SuperK



# Estensione a processi qualunque - I

Concetto di sezione d'urto facilmente esteso a collisioni qualsiasi:  
Interazione non necessariamente elettromagnetica

Esempio piu' semplice: Scattering elastico da potenziale

$\Phi_{inc}$ : Flusso incidente

Particelle incidenti:

Stessa energia, stessa direzione

$$dn_{inc} = \Phi_{inc} dA dt$$

Particelle incidenti su elemento d'area nell'elemento di tempo

$\Phi_{diff}(\theta, \phi)$ : Flusso diffuso

Particelle diffuse:

Stessa energia, direzione diversa

$$dn_{diff}(\theta, \varphi) = \Phi_{diff}(\theta, \varphi) d\Omega dt$$

Particelle diffuse in elemento di ang. solido nell'elemento di tempo

# Estensione a processi qualunque - II

$\Phi_{inc}$  *Particelle / Area \* Tempo*

$\Phi_{diff}(\theta, \varphi)$  *Particelle / Ang.Sol.\* Tempo*

$$P_{inc} = \Phi_{inc} E_{inc}$$

$$P_{diff}(\theta, \varphi) = \Phi_{diff}(\theta, \varphi) E_{diff}$$

$$E_{inc} = E_{diff}$$

$$\rightarrow \left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega} \right|_{(\theta, \varphi)} = \frac{P_{diff}(\theta, \varphi)}{P_{inc}} = \frac{\Phi_{diff}(\theta, \varphi)}{\Phi_{inc}}$$

Sezione d'urto differenziale:

*Rapporto fra flusso diffuso e flusso incidente*

# Estensione a processi qualunque - III

Esempio piu' complicato: Scattering anelastico  
 Energia particella diffusa: variabile

$\Phi_{inc}$  Particelle / Area \* Tempo

$$\left. \frac{d\Phi_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} \quad \text{Particelle / Energia * Ang.Sol. * Tempo}$$

$$P_{inc} = \Phi_{inc} E_{inc}$$

$$\left. \frac{dP_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} = \left. \frac{d\Phi_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} E_{diff}$$

$$E_{inc} \neq E_{diff}$$

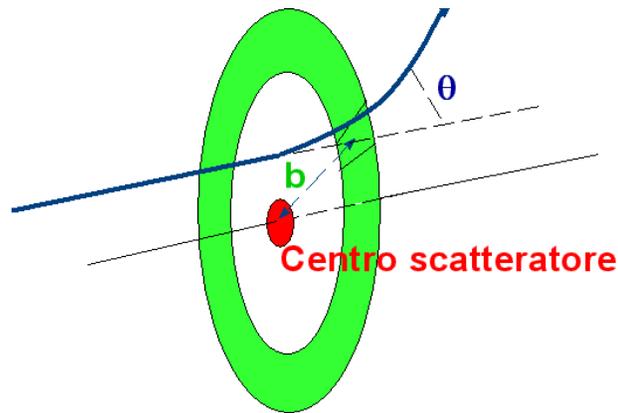
$$\rightarrow \left. \frac{d^3\sigma}{d\Omega dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} = \frac{1}{P_{inc}} \left. \frac{dP_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} = \frac{1}{\Phi_{inc} E_{inc}} \left. \frac{d\Phi_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} E_{diff}$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{(\theta, \varphi)} = \int_{E_{diff}^{\min}}^{E_{diff}^{\max}} \left. \frac{d^3\sigma}{d\Omega dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} dE_{diff} = \frac{1}{\Phi_{inc} E_{inc}} \int_{E_{diff}^{\min}}^{E_{diff}^{\max}} \left. \frac{d\Phi_{diff}}{dE_{diff}} \right|_{(\theta, \varphi, E_{diff})} E_{diff} dE_{diff}$$

# Interpretazione classica di $\sigma$

Relazione fra parametro d'urto e angolo di scattering:  $b = b(\theta)$

Particelle deflesse in  $d\Omega$  ( $\leftarrow$  con angolo polare fra  $\theta$  e  $\theta+d\theta$ , angolo azimutale fra  $\phi$  e  $\phi+d\phi$ ): Sono quelle che incidono in  $d\sigma$  ( $\leftarrow$  con par. d'urto fra  $b$  e  $b+db$ , angolo azimutale fra  $\phi$  e  $\phi+d\phi$ )



$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$d\sigma = b db d\phi$$

$$\rightarrow b db d\phi = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

$b(\theta)$  dipende dalla forma dell'interazione

Sezione d'urto: *Superficie (totale o differenziale) trasversale alla velocità relativa fra proiettile e bersaglio.*

Parametri d'urto inferiori al raggio della superficie  $\rightarrow$  Interazione

# Rutherford - I

Problema classico dei 2 corpi: Potenziale repulsivo

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

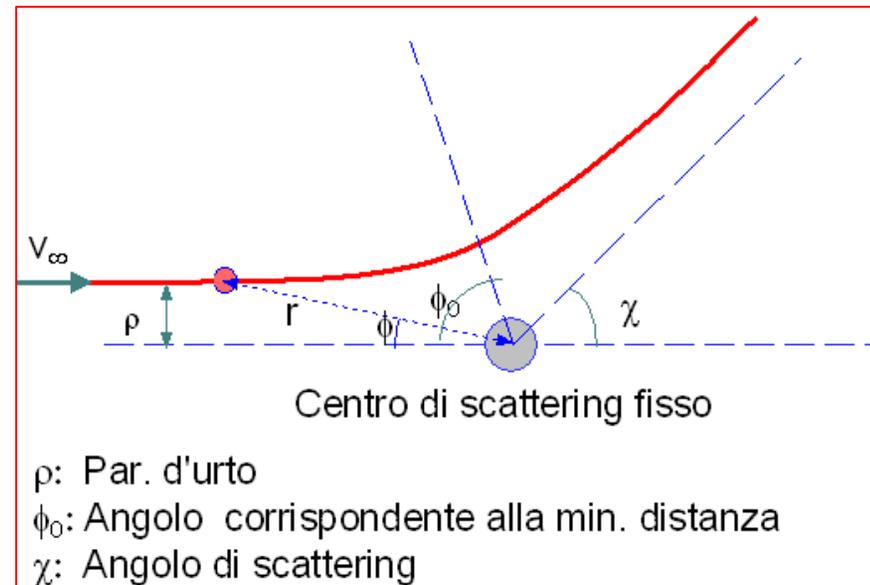
$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = m\rho v_\infty$$

$$\phi_0 = \frac{\pi - \chi}{2} \quad \text{Prop. generale pot. centrale}$$

$$\phi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{cost}$$

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{rmv_\infty^2}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}} \rightarrow \rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{tg}^2 \phi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \text{ctg} \frac{\chi}{2}$$



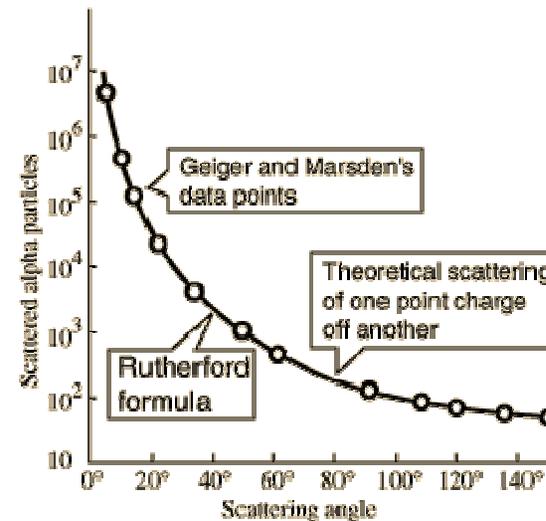
# Rutherford - II

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} \rightarrow \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\cot \frac{\chi}{2}}{\sin \chi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{\frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}}}{2 \sin \frac{\chi}{2} \cos \frac{\chi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} = \left( \frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

SCATTERING OF ALPHA PARTICLES BY GOLD  
(Experimental test by Geiger and Marsden)

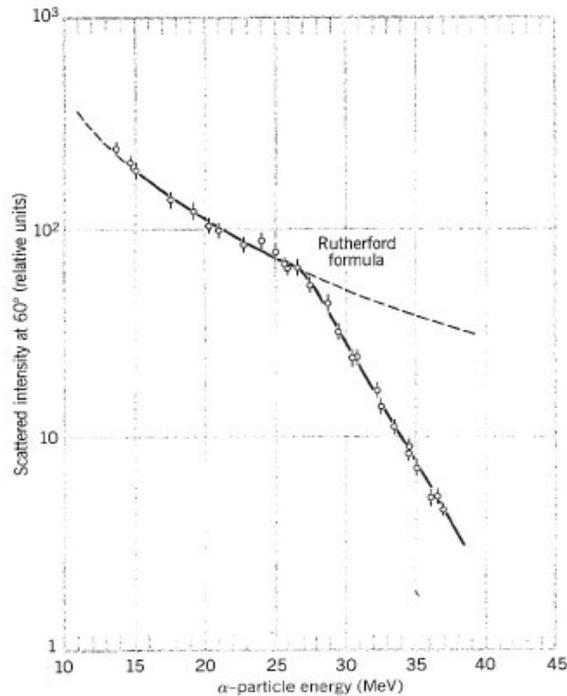
EXPERIMENTAL MEASUREMENTS		TEST OF THEORETICAL PREDICTION	
Angle of Deflection* A	Experimental Count† N	Proportion predicted (on a special scale)	The test N proportion predicted
150°	33	1.15	29
135°	43	1.15	31
120°	52	1.79	29
105°	69.5	2.53	28
75°	211	7.25	29
60°	477	16.0	30
45°	1 435	46.6	31
30°	7 800	223	33
15°	120 570	3 445	35
10°	502 570	17 330	29
5°	8 289 000	276 300	30



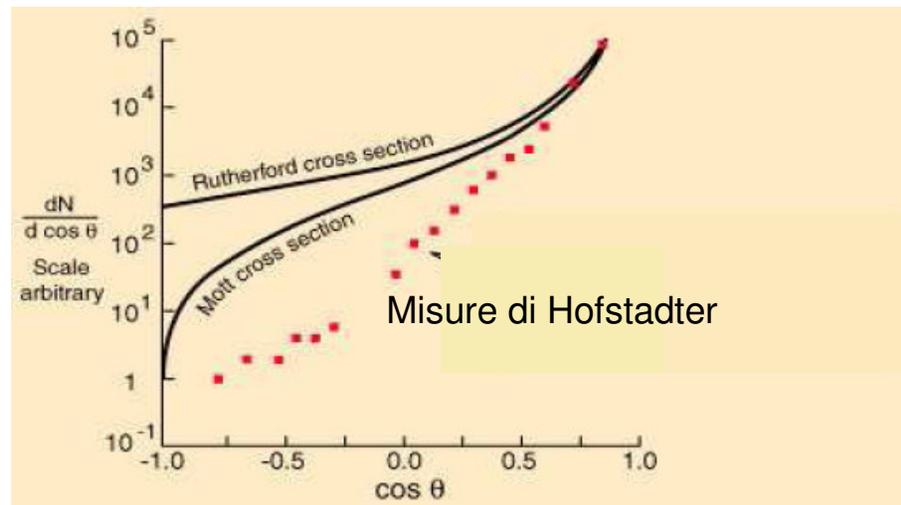
# Oltre Rutherford

Effetto della dimensione finita del nucleo

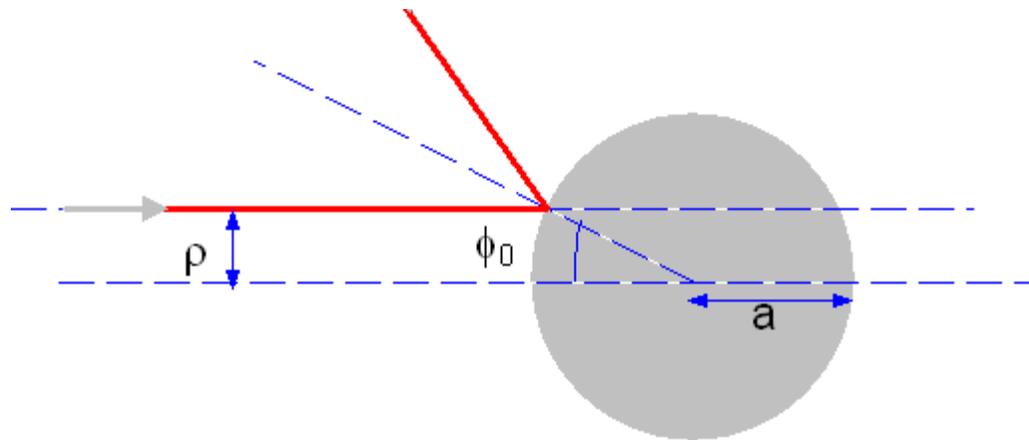
Scattering di  $\alpha$



Scattering di  $e$



# Sfera rigida



$$\rho = a \sin \phi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega$$

$$\sigma = \pi a^2$$

# Attenuazione - I

Propagazione di un fascio in uno spessore di materiale  
Decremento nel flusso dopo attraversamento dello spessore  $dx$ :

$$d\Phi = -\Phi k N dx$$

$N$  densita' volumetrica di centri di scattering

$$N = \frac{\rho}{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho \text{ densita' volumetrica di massa} \\ A \text{ massa molecolare} \end{array} \right\} \rightarrow [N dx] = [L^{-2}]$$

$$\rightarrow [k] = [L^2]$$

$$\rightarrow \frac{d\Phi}{\Phi} = -k \frac{\rho}{A} dx$$

$$\rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-k \frac{\rho}{A} x}$$

# Attenuazione - II

$k$ : Identificato con la sezione d'urto totale

$$k = \sigma$$

Quantita' spesso usate:

$$\lambda = \frac{A}{\sigma \rho} = \frac{1}{\mu}$$

$\mu$ : Coefficiente di attenuazione

$\lambda$ : Cammino libero medio

$$\text{Prob. di sopravvivenza} = e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x} = e^{-\mu x} = e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$\text{Prob. di interazione} = 1 - e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x} = 1 - e^{-\mu x} = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

# Attenuazione - III

Attenuazione del flusso e cammino libero medio:

$$d\Phi = -\Phi k N dx \quad [k] = [l^2] = [\sigma]$$

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -k \frac{\rho}{A} dx \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-k \frac{\rho}{A} x}$$

$k \equiv \sigma$  Sezione d'urto totale

$$\lambda = \frac{A}{\sigma \rho} \text{ Cammino libero medio}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \text{ Coefficiente di attenuazione lineare}$$

Sezione d'urto differenziale vs. totale:

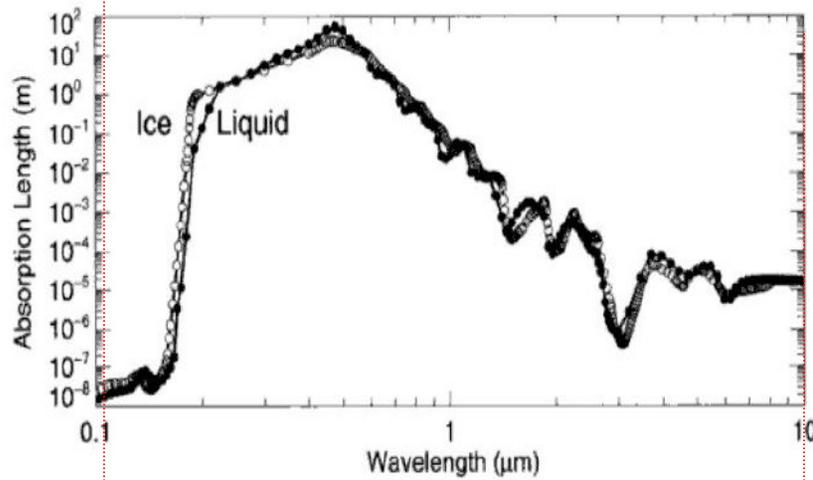
$$R = a \Phi$$

$$\rightarrow \frac{d\dot{n}}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Phi$$

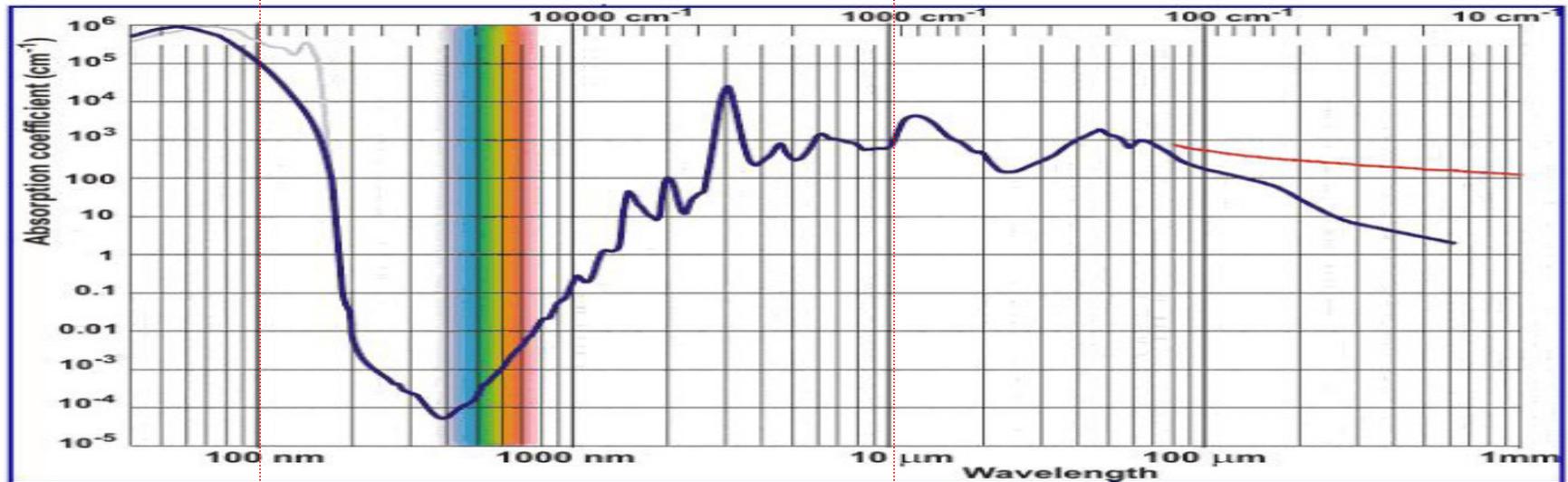
$$\sigma = \int_{\Delta\Omega=4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$\begin{aligned} [\Phi] &= [\text{particles}] [l^{-2}] [t^{-1}] \\ [R] &= [\text{particles}] [sr^{-1}] [t^{-1}] \\ [\sigma] &= [l^2] \end{aligned}$$

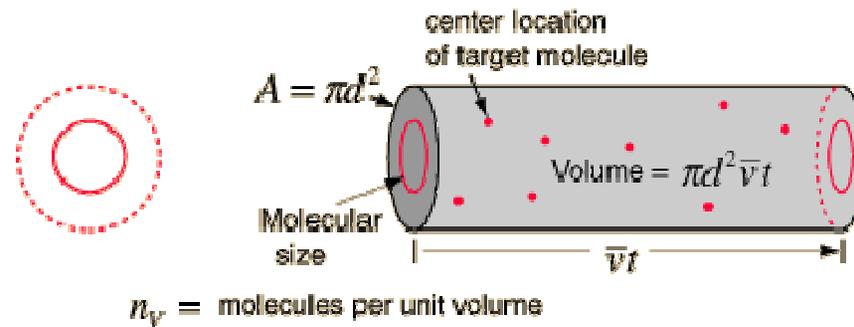
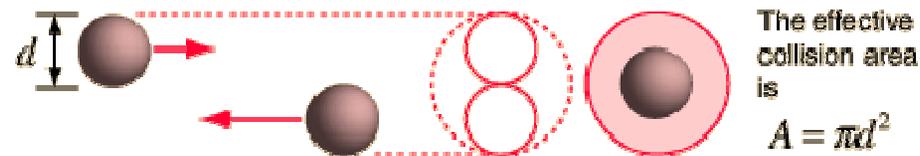
# Attenuazione - IV



$\text{H}_2\text{O}$



# Significato geometrico



$$\text{Mean free path estimate} = \frac{\text{Distance traveled } \bar{v}t}{\underbrace{\pi d^2 \bar{v}t}_{\text{Volume of interaction}} n_V} = \frac{1}{\underbrace{\pi d^2}_{\text{Mean distance per collision}} n_V}$$