Scattering
Cinematica Relativistica

III – Evoluzione temporale, perturbazioni, regola d'oro n. 2

Scattering in MQ

Scattering:
Mezzo principale per lo studio della struttura dei sistemi microscopici
Sistemi microscopici:
Richiedono l'uso della meccanica quantistica

Due approcci diversi per un unico problema:

Formalismo *indipendente dal tempo*

Processo stazionario (fittizio, 'somma' di tanti processi non stazionari))

Formalismo *dipendente dal tempo*

Processo non stazionario (reale)

Evoluzione temporale in MQ - I

Stati e osservabili:
Diverse descrizioni equivalenti per l'evoluzione temporale

Tutte forniscono gli stessi elementi di matrice per le osservabili, uniche quantita' fisiche confrontabili con le misure

Operatore fondamentale:

$U\left(t,t_0\right)$ Operatore di evoluzione

Unitario, noto anche come *propagatore*

Poprieta' generali di simmetria portano a specificare U

Evoluzione temporale in MQ - II

Eq. differenziale cui soddisfa l'operatore U

$$i\hbar\frac{\partial U\left(t,t_0\right)}{\partial t}=HU\left(t,t_0\right)$$ Eq. differenziale

$$U\left(t_0,t_0\right)=1$$ Condizione iniziale

Caso 1: H *non dipende da t*

$$\rightarrow U\left(t,t_0\right)=e^{-\frac{i}{\hbar}H\left(t-t_0\right)}$$

Caso 2: H dipende da t, e $[H(t_1),H(t_2)]=0$

$$\rightarrow U\left(t,t_0\right)=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}H\left(t'\right)dt'}$$

Caso 3: H dipende da t, e $[H(t_1),H(t_2)]\#0$

$$\rightarrow U\left(t,t_0\right)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nH\left(t_1\right)H\left(t_2\right)\cdots H\left(t_n\right)$$

Evoluzione temporale in MQ - III

Es.: $H = a\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ costante

$$\rightarrow U\left(t,t_0\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}H\left(t-t_0\right)} = e^{-\frac{ia}{\hbar}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\left(t-t_0\right)}$$

Es.: $H = a\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ variabile in modulo, costante in direzione

$$\rightarrow U\left(t,t_0\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H\left(t'\right)dt'} = e^{-\frac{ia}{\hbar}\left[\sigma_x \int_{t_0}^{t} B_x\left(t'\right)dt' + \sigma_y \int_{t_0}^{t} B_x\left(t'\right)dt' + \sigma_z \int_{t_0}^{t} B_z\left(t'\right)dt'\right]}$$

Es.: $H = a\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ variabile in modulo e in direzione

Non discusso (v. prima)

Evoluzione temporale in MQ - III

Descrizione di Schrodinger:
Gli stati evolvono nel tempo
Le osservabili (operatori) restano costanti

$$\boxed{\left|\psi(t)\right\rangle_S = U(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle}$$

L'operatore di evoluzione agisce sugli *stati*

$$\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(U(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle\Big) = H\Big(U(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle\Big)$$ Eq. di Schrodinger

$$\rightarrow \left|\psi(t)\right\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\left|\psi(t_0)\right\rangle$$

$$\boxed{O_S(t) = O(t_0)}$$

$$\rightarrow {}_S\left\langle\psi(t)\right|O_S(t)\left|\psi(t)\right\rangle_S = {}_S\left\langle\psi(t)\right|O(t_0)\left|\psi(t)\right\rangle_S = \left\langle\psi(t_0)\right|U^\dagger(t,t_0)O(t_0)U(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle$$

$$\rightarrow {}_S\left\langle\psi(t)\right|O_S(t)\left|\psi(t)\right\rangle_S = \left\langle\psi(t_0)\right|e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}O(t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\left|\psi(t_0)\right\rangle$$

Evoluzione temporale in MQ - IV

Descrizione di Heisenberg:
Gli stati restano costanti
Le osservabili (operatori) evolvono nel tempo

$$\boxed{\left|\psi(t)\right\rangle_H = \left|\psi(t_0)\right\rangle}$$

$$\boxed{O_H(t) = U(t,t_0)\,O(t_0)\,U^\dagger(t,t_0)}$$

L'operatore di evoluzione agisce sugli *operatori*

$$\rightarrow O_H(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,O(t_0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{dO_H(t)}{dt} = \left[O_H(t),H\right]$$ Eq. di Heisenberg

$$\rightarrow {}_H\left\langle\psi(t)\right|O_H(t)\left|\psi(t)\right\rangle_H = \left\langle\psi(t_0)\right|e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,O(t_0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\left|\psi(t_0)\right\rangle$$

Evoluzione temporale in MQ - V

Esempio: Mom. magnetico in c. esterno costante

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

$$B = (B,0,0) \rightarrow H = -\frac{1}{2}\mu B \sigma_x = -\frac{1}{2}\mu B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operatore di evoluzione:

$$U(t) = e^{-iHt} = e^{i\frac{\mu Bt}{2}\sigma_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(i\frac{\mu B}{2}t\right)^n (\sigma_x)^n$$

$$\rightarrow U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(i\frac{\mu B}{2}t\right)^{2n} (\sigma_x)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(i\frac{\mu B}{2}t\right)^{2n+1} (\sigma_x)^{2n+1}$$

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x^{2n} = 1 \\ \sigma_x^{2n+1} = \sigma_x \end{matrix}\right\} \rightarrow U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(i\frac{\mu B}{2}t\right)^{2n} \cdot 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(i\frac{\mu B}{2}t\right)^{2n+1} \cdot \sigma_x$$

$$\rightarrow U(t) = \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \cdot 1 + \sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \cdot \sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

Evoluzione temporale in MQ - VI

Descrizione alla Schrodinger:

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t)\left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left|\psi(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}, \left\langle\psi(t)\right| = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right), & -i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$s_z(t) = s_z(0) = \frac{\sigma_z}{2}$$

$$\rightarrow \left\langle\psi(t)\right|s_z(t)\left|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right|\frac{\sigma_z}{2}\left|\psi(t)\right\rangle$$

$$\rightarrow \left\langle\psi(t)\right|\frac{\sigma_z}{2}\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right), & -i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left\langle\psi(t)\right|\frac{\sigma_z}{2}\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\cos^2\left(\frac{\mu B}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\mu B}{2}t\right)\right] = \frac{1}{2}\cos(\mu B t)$$

Evoluzione temporale in MQ - VII

Descrizione alla Heisenberg:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_z(t) = U^\dagger(t) s_z(0) U(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & -i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ -i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\mu B}{2}t\right) & \cos\left(\frac{\mu B}{2}t\right) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow s_z(t) = \frac{1}{2}\left[\cos(\mu B t)\sigma_z - \sin(\mu B t)\sigma_y\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\mu B t) & i\sin(\mu B t) \\ -i\sin(\mu B t) & -\cos(\mu B t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left\langle \psi(0) \right| s_z(t) \left| \psi(0) \right\rangle = \frac{1}{2}\cos\mu B t$$

Stati e operatori evolvono diversamente
Gli elementi di matrice sono identici

Rappresentazione di interazione

Rapp. di interazione (Dirac):
Intermedia fra descrizione di Schrodinger e di Heisenberg
Utile quando

$$H = H_0 + H'$$

H_0 termine libero
H' termine di interazione

Evoluzione di osservabili e stati:
Entrambe le categorie variano nel tempo

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle_I = H_I'\left|\psi(t)\right\rangle_I$$

$$\frac{dO_I}{dt} = i\left[H_0, O_I\right]$$

Sviluppo perturbativo - I

Operatore di evoluzione: diverso per stati e osservabili

Evoluzione osservabili: generata da Hamiltoniano imperturbato

$$O_I(t) = U_I^{(o)\dagger}(t,t_0)\,O_I(t_0)\,U_I^{(o)}(t,t_0) = e^{iH_0 t}\,O_I(t_0)\,e^{-iH_0 t}$$

$$H_I' = e^{iH_0 t}\,H'\,e^{-iH_0 t}$$

Evoluzione stati: generata da perturbazione

$$i\frac{d}{dt}U_I^{(s)}(t,t_0) = H_I'\,U_I^{(s)}(t,t_0)$$

Eq. differenziale per U_I: ??
Senso chiaro se si considerano i suoi elementi di matrice:
Normali funzioni di t

Cond. iniziale:

$U(t_0,t_0) = 1$ Op. identita'

Soluzione esatta difficile da trovare, tranne in pochi casi
Quindi: Approssimazioni successive

Sviluppo perturbativo - II

Trasformazione:
Eq. differenziale + Cond. iniziale → Eq. integrale

$$\left.\begin{array}{l} i\dfrac{d}{dt}U_I^{(s)}\left(t,t_0\right)=H\,'U_I^{(s)}\left(t,t_0\right) \\ U_I^{(s)}\left(t_0,t_0\right)=1 \end{array}\right\}\rightarrow U_I^{(s)}\left(t,t_0\right)=1-i\int_{t_0}^{t}H_I\,'\left(t\,'\right)U_I^{(s)}\left(t\,',t_0\right)dt\,'$$

Eq. integrale: Soluzione iterativa

Si sostituisce nell'integrale a $U_I^{(s)}$ una sua approssimazione

Ordine *0*: $U_I^{(s)}=1$

Sviluppo perturbativo - III

Operatore di evoluzione come somma di contributi perturbativi:

$$U_I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t)$$

Per semplicita' di scrittura:

$t_0 = 0, \cancel{(s)}$

$\rightarrow U_I^{(s)}(t, t_0) \rightarrow U_I(t)$

Ordine 0: Si prende nell'integrale $U_I(t') = 0$

$$\rightarrow U_I^{(0)}(t) = 1$$

Ordine 1: Si prende nell'integrale $U_I(t') = U_I^{(0)}(t) = 1$

$$\rightarrow U_I^{(1)}(t) = -i \int_0^t dt_1 H_I'(t_1)$$

Ordine 2: Si prende nell'integrale $U_I(t') = U_I^{(1)}(t) = -i \int_0^{t'} dt_1 H_I'(t_1)$

$$\rightarrow U_I^{(2)}(t) = (-i)^2 \int_0^t dt_1 H_I'(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 H_I'(t_2)$$

etc

Sviluppo perturbativo - IV

Interazione a tempi lunghi, nel passato e nel futuro: nulla
Quindi:

$\left|i\right\rangle,\left|f\right\rangle$: Stati asintotici, autostati di H_0

Ampiezza di transizione fra $\left|i\right\rangle$ e $\left|f\right\rangle$:

$$e^{-iH_0t_0}\left|i\right\rangle = e^{-iE_it_0}\left|i\right\rangle$$

$$\left\langle f\right|e^{+iH_0t} = \left\langle f\right|e^{+iE_ft}$$

$$A_{fi}\left(t,t_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{fi}^{(n)}\left(t,t_0\right) = \left\langle f\right|U_I\left(t,t_0\right)\left|i\right\rangle$$

$$H_I'\left(t\right) = e^{iH_0t}H'\left(t\right)e^{-iH_0t}$$

Sviluppo perturbativo - V

Primi termini nello sviluppo perturbativo dell'ampiezza di transizione:

$$A_{fi}^{(0)}(t,t_0) = \langle f|1|i\rangle e^{+i\left(E_f t - E_i t_0\right)} = \delta_{fi} e^{+iE_i(t-t_0)}$$

$$A_{fi}^{(1)}(t,t_0) = -i\langle f|\int_{t_0}^{t} dt_1 e^{+iE_f t_1} H'(t_1) e^{-iE_i t_1}|i\rangle$$

$$A_{fi}^{(2)}(t,t_0) = (-i)^2 \langle f|\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{+iE_f t_1} H'(t_1) e^{-iH_0 t_1} e^{+iH_0 t_2} H'(t_2) e^{-iE_i t_2} dt_2 |i\rangle =$$

$$e^{-iH_0(t_1-t_2)} = \sum_a e^{-iE_a(t_1-t_2)} |a\rangle\langle a| \quad \{|a\rangle, a = 0,1,...\}:$$ Insieme completo di stati base

$$A_{fi}^{(2)}(t,t_0) = (-i)^2 \sum_a \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 e^{+i\left(E_f - E_a\right)t_1} \langle f|H'(t_1)|a\rangle e^{+i(E_a - E_i)t_2} \langle a|H'(t_2)|i\rangle$$

La somma su a e' sugli *stati intermedi* in cui si puo' trovare il sistema fra le 2 interazioni con la perturbazione

Sviluppo perturbativo - VI

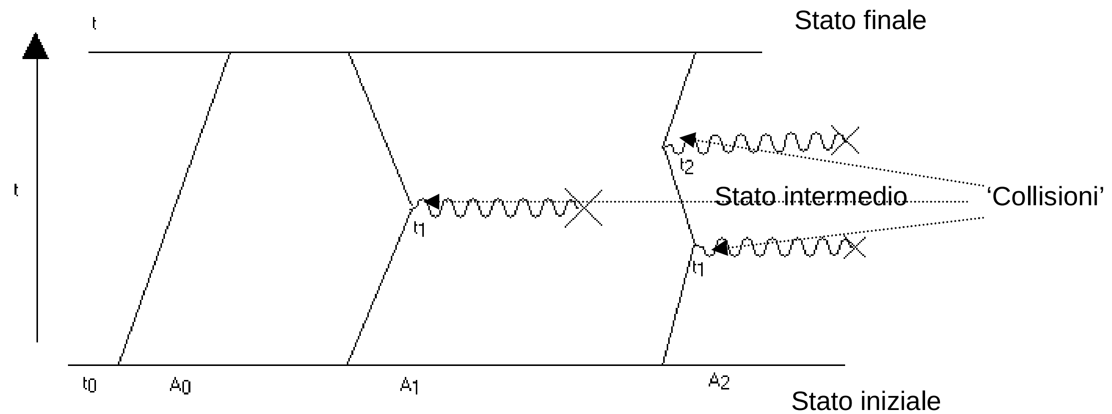
Quadro semplificato:

•*All'ordine perturbativo* n*-esimo, il sistema evolve liberamente, interagendo attraverso* n *'collisioni' istantanee con la perturbazione*

•*Gli istanti delle 'collisioni' non sono definiti, quindi si somma su tutti gli istanti possibili*

•*Per* $n \geq 2$*, il sistema rimane, fra due 'collisioni' successive, in uno stato intermedio (virtuale) violando la conservazione dell'energia*

•*Lo stato intermedio non e' definito, quindi si somma su tutti gli stati possibili*



Perturbazione costante

Si considera il caso in cui *H'* non dipende da *t*:

$$A_{fi}^{(1)}(t,t_0) = A_{fi}^{(1)}(t,t_0) = -i\langle f\,|\int_{t_0}^{t} dt_1 e^{+iE_f t_1} H' e^{-iE_i t_1}\,|i\rangle$$

$$\rightarrow A_{fi}^{(1)}(t,t_0) = -i\langle f\,|H'|i\rangle \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{+i(E_f - E_i)t_1}$$

$$A_{fi}^{(2)}(t,t_0) = (-i)^2 \sum_a \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 e^{+i(E_f - E_a)t_1} \langle f\,|H'|a\rangle e^{+i(E_a - E_i)t_2} \langle a|H'|i\rangle$$

$$\rightarrow A_{fi}^{(2)}(t,t_0) = (-i)^2 \sum_a \langle f\,|H'|a\rangle\langle a|H'|i\rangle \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 e^{+i(E_a - E_i)t_1} e^{+i(E_f - E_a)t_2}$$

Matrice S

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{fi}^{(n)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} A_{fi}^{(n)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{fi}^{(n)}$$

Per il caso della perturbazione costante:

$$S_{fi}^{(0)} = \langle f | i \rangle = \delta_{fi}$$

$$S_{fi}^{(1)} = -i \langle f | H' | i \rangle \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{+i(E_f - E_i)t_1}$$

$$= -i(2\pi)\delta(E_i - E_f)\langle f | H' | i \rangle$$

Limiti un po' complicati…
Si possono fare con vari trucchi

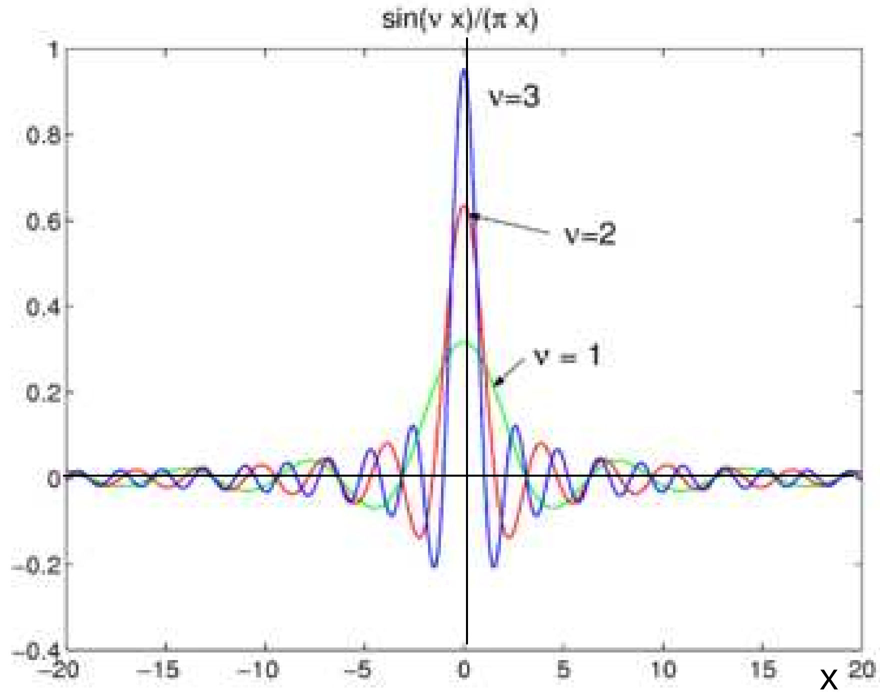
$$S_{fi}^{(2)} = (-i)^2 \sum_a \langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 e^{+i(E_f - E_a)t_2} e^{+i(E_a - E_i)t_1}$$

$$= (-i)^2 (2\pi)(-i)\delta(E_i - E_f) \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i - E_a}$$

……….

Una rappresentazione della δ

$$\delta\left(x\right)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sin\nu x}{\pi x}$$



x

Matrice T

Si possono (in pratica solo idealmente) sommare tutti i contributi perturbativi, ottenendo:

$$S_{fi} \equiv \delta_{fi} - 2\pi i \delta\left(E_f - E_i\right) T_{fi} \equiv \delta_{fi} - M_{fi}$$

T e' la *matrice di transizione*
Nella matrice T, scorporati:

Contributo di non interazione
Fattore cinematico legato a conservazione dell'energia

Limitandosi ai primi 2 ordini perturbativi:

$$T_{fi} \simeq \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{\left(E_a - E_i\right)} + \ldots$$

Probabilita' di transizione - I

$$A_{fi}^{(0)}(t,t_0)=\langle f|1|i\rangle e^{-i\left(E_f t-E_i t_0\right)}=\delta_{fi}e^{-iE_i(t-t_0)}$$

$$\to\left|A_{fi}^{(0)}(t,t_0)\right|^2=1$$

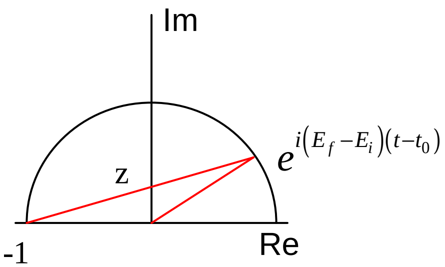
All'ordine 0 la transizione avviene solo se $i = f$,
Ossia: Ordine 0 = Nessuna transizione

$$A_{fi}^{(1)}(t,t_0)=-i\int_{t_0}^{t}dt_1 e^{-iE_f(t-t_1)}\langle f|H'|i\rangle e^{-iE_i(t_1-t_0)}=\frac{e^{-iE_i(t-t_0)}-e^{-iE_f(t-t_0)}}{E_f-E_i}\langle f|H'|i\rangle$$

$$\left|A_{fi}^{(1)}(t,t_0)\right|=\left|\langle f|H'|i\rangle\right|\left|\frac{e^{-iE_f(t-t_0)}\left(e^{-i\left[E_i(t-t_0)-E_f(t-t_0)\right]}-1\right)}{E_f-E_i}\right|$$

$$=\left|\langle f|H'|i\rangle\right|\left|\frac{e^{+i\left[\left(E_f-E_i\right)(t-t_0)\right]}-1}{E_f-E_i}\right|$$

$$\to\left|A_{fi}^{(1)}(t,t_0)\right|^2=\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2\frac{\sin^2\frac{\left(E_f-E_i\right)\left(t-t_0\right)}{2}}{\left(\frac{E_f-E_i}{2}\right)^2}$$



$$z=e^{i\left(E_f-E_i\right)(t-t_0)}-1$$

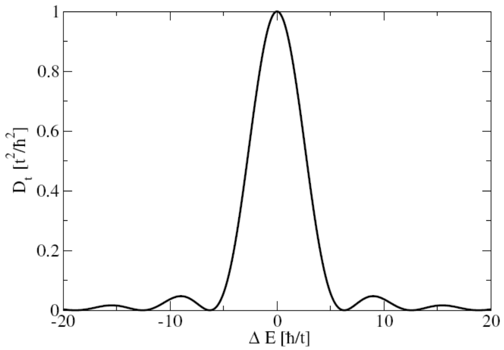
$$|z|=2\cos\left[\frac{\pi-(E_f-E_i)(t-t_0)}{2}\right]$$

$$=2\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(E_f-E_i)(t-t_0)}{2}\right]$$

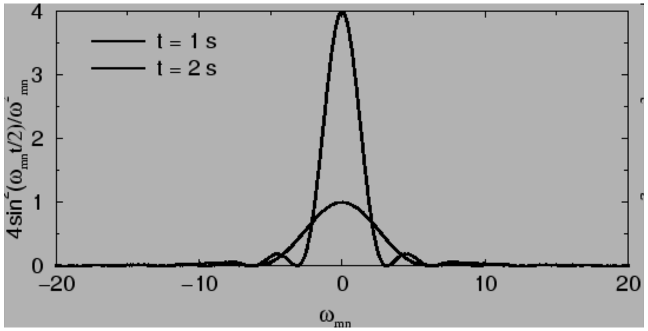
$$=2\sin\left[\frac{(E_f-E_i)(t-t_0)}{2}\right]$$

Probabilita' di transizione - II

$$\left|A_{fi}^{(1)}(t,t_0)\right|^2 = \left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2 \frac{\sin^2\frac{(E_f-E_i)(t-t_0)}{2}}{\left(\frac{E_f-E_i}{2}\right)^2}$$



$$W_{fi} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} \left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2 \frac{\sin^2\left[\frac{E_f-E_i}{2}(t-t_0)\right]}{\left(\frac{E_f-E_i}{2}\right)^2}$$



$$\rightarrow W_{fi} = 2\pi(t-t_0)\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2 \delta(E_f-E_i)$$

Prob. di transizione per unita' di tempo:

$$\rightarrow w_{fi} = \frac{W_{fi}}{t-t_0} = 2\pi\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2 \delta(E_f-E_i)$$

All'ordine 1 la transizione avviene se $E_i = E_f$

Probabilita' di transizione - III

Prob. di transizione per unita' di tempo, al II ordine perturbativo:

$$w_{fi} = 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right)$$

Quando e' importante considerare ordini perturbativi > 1 ?

a)Quando l'elemento di matrice al I ordine e' = 0
(P.es. per motivi di simmetria)
b) Quando e' necessaria elevata accuratezza

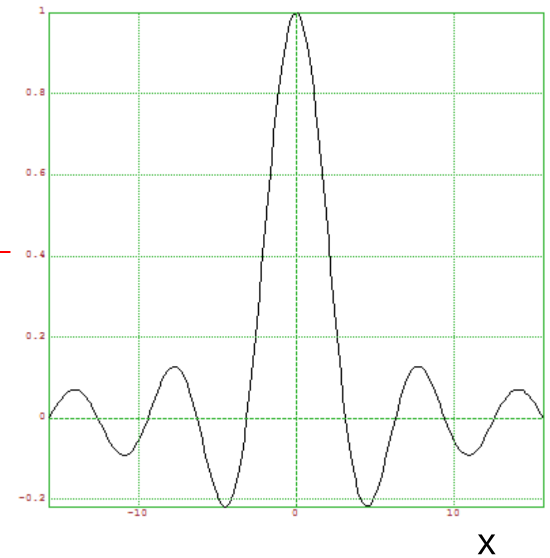
Nota importante:

Tutti gli elementi di matrice di processi relativistici fra particelle reali sono come minimo del II ordine; quelli del I ordine non conservano $E,\mathbf{p}$

L’arte del gioco di prestigio

Ricordando:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sin\nu x}{\pi x}=\delta(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\nu x}{\pi x}=\frac{\nu}{\pi}$$



Si trova, in modo *poco* rigoroso:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\nu x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\nu x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}}=\delta\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\nu x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}}=2\delta(x)\frac{\sin\left(\frac{\nu x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}}=2\frac{\nu}{\pi}\delta(x)$$

$$\to\lim_{(t-t_0)\to\infty}\frac{\sin^2\left[\frac{E_f-E_i}{2}(t-t_0)\right]}{\left(\frac{E_f-E_i}{2}\right)^2}=2\pi(t-t_0)\delta\left(E_f-E_i\right)$$

1) Avere a fattore la δ costringe la funzione ad assumere il suo valore limite per $x\to 0$
Hmmm….
2) Il limite per $t-t_0\to\infty$ contiene il fattore $t-t_0$, evidentemente divergente: ma questa e’ solo l’approssimazione all’ordine 1
Hmmm…

Regola d'oro n. 2 - I

Trattazione svolta: Stati $\left|In\right\rangle$ e $\left|Out\right\rangle$ appartenenti allo spettro discreto
Molto spesso: $\left|Out\right\rangle$ appartenente allo spettro continuo (cfr. scattering)

In questo caso:

Prob. di transizione verso uno stato $\rightarrow$ *Prob. di transizione verso un gruppo di stati*

Es.: Diversi stati finali con la stessa energia E_f. Allora:

$$W = \sum_{n=1,N} w_{f(n)i} = \sum_{n=1,N} 2\pi \left| \left\langle f(n) \middle| V \middle| i \right\rangle \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right)$$

NB Nel caso di transizioni verso lo spettro discreto, la presenza della δ e' ovviamente alquanto fastidiosa…

Regola d'oro n. 2 - II

Se gli stati finali costituiscono un continuo:
Prob. (infinitesima) di transizione verso un "intervallo (infinitesimo) di stati"
Al I ordine: regola d'oro n. 2 (Dirac, Fermi)

$$dW = 2\pi \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right) dn \quad n$$ variabile continua

$$\rightarrow W = \int_{stati} 2\pi \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right) dn = \int_{\substack{energia\\ finale}} 2\pi \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right) \frac{dn}{dE_f} dE_f$$

$$\rightarrow \boxed{W = 2\pi \left|\langle f|V|i\rangle\right|^2 \left.\frac{dn}{dE_f}\right|_{E_f = E_i}}$$

Nel caso di transizioni verso lo spettro continuo la δ di fatto scompare

$\frac{dn}{dE_f}$ Densita' di stati finali/Intervallo di energia; Fattore di spazio delle fasi

Fattore puramente cinematico (non dinamico) caratteristico dello stato finale
Incremento del numero di stati finali accessibili al sistema per incremento unitario dell'energia disponibile

Il fattore di spazio delle fasi - I

Significato:

Incremento del numero di stati finali accessibili al sistema per incremento unitario dell'energia disponibile

Esempio 1: Mode counting

Stato finale : particella libera, vincolata "in un segmento" 1-dimensionale di lunghezza L

$\psi(0)=\psi(L)$ Cond. al contorno periodiche $\rightarrow e^{ik0}=1=e^{ikL}$

$$\rightarrow kL=2n\pi \rightarrow k=\frac{2\pi}{L}n$$

$$\rightarrow p=hk=\frac{2\pi\hbar}{L}n \rightarrow n=\frac{L}{2\pi\hbar}p \rightarrow dn=\frac{L}{2\pi\hbar}dp$$

Fattore di densita' degli stati:

$$E=\frac{p^2}{2m} \rightarrow p=\sqrt{2mE} \rightarrow dp=\sqrt{\frac{m}{2E}}dE \rightarrow dn=\frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}dE \rightarrow \frac{dn}{dE}=\frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Il fattore di spazio delle fasi - II

Esempio 2: Mode counting
Stato finale: Particella libera in una 'scatola' 3D

$$\psi(0,y,z)=\psi(L,y,z) \ \text{ Cond. al contorno periodiche} \rightarrow e^{ik_x 0}=1=e^{ik_x L}$$

$$\rightarrow k_x L = 2n_x\pi \rightarrow k_x = \frac{2\pi}{L}n_x$$

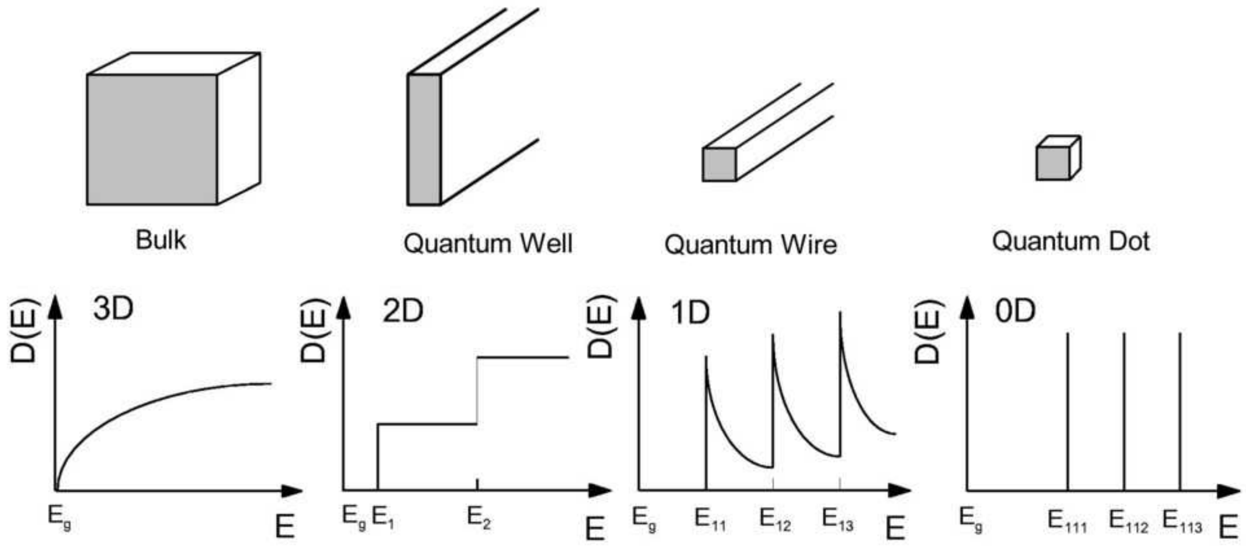
$$\rightarrow \begin{cases} p_x = hk_x = \dfrac{2\pi\hbar}{L}n_x \rightarrow n_x = \dfrac{L}{2\pi\hbar}p_x \rightarrow dn_x = \dfrac{L}{2\pi\hbar}dp_x \\ p_y = hk_y = \dfrac{2\pi\hbar}{L}n_y \rightarrow n_y = \dfrac{L}{2\pi\hbar}p_y \rightarrow dn_y = \dfrac{L}{2\pi\hbar}dp_y \rightarrow dn = \left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^3 d^3\mathbf{p} = \left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 dp d\Omega \\ p_z = hk_z = \dfrac{2\pi\hbar}{L}n_z \rightarrow n_z = \dfrac{L}{2\pi\hbar}p_z \rightarrow dn_z = \dfrac{L}{2\pi\hbar}dp_z \end{cases}$$

Fattore di densita' degli stati (unita' naturali):

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mE} \rightarrow dp = \sqrt{\frac{m}{2E}}dE$$

$$\rightarrow dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2mE\sqrt{\frac{m}{2E}}dEd\Omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 m\sqrt{2mE}\,dEd\Omega$$

Il fattore di spazio delle fasi - III



Density of states in three-dimensional (3D), two-dimensional (2D), one-dimensional (1D) and zero-dimensional solids (e.g., artificial semiconductor structures)

The density of states of a solid (a metal, semiconductor, magnet, or superconductor) largely determines its physical properties