Scattering
Cinematica Relativistica

IV – Scattering e decadimenti in meccanica quantistica

Scattering in meccanica quantistica

Diversi modi di descrivere I processi di collisione/decadimento:

Modo *indipendente* dal tempo
Descrizione in termini di *stati di scattering*, analoghi a quelli stazionari

Modo *dipendente* dal tempo
Descrizione in termini di *evoluzione temporale*

In entrambi i casi:
Richieste in realta’ diverse precisazioni piuttosto sottili

Senza troppe pretese di rigore:
Riducibile quasi sempre ad un’applicazione della regola d’oro n. 2

Regola d'oro e scattering - I

Probabilita' di transizione per unita' di tempo:

$|i\rangle, |f\rangle$ Stati iniziale e finale: particelle libere

H': Interazione

$$w_{fi} \simeq 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right)$$ Verso uno stato discreto

$$w \simeq 2\pi \left| \underbrace{\langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots}_{\text{El. di matrice}} \right|^2 \underbrace{\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_f = E_i}}_{\text{Spazio delle fasi}}$$ Verso uno stato del continuo

Stati iniziale e finale: Onde piane

Regola d'oro e scattering - II

Caso di diffusione elastica da un potenziale fisso

Sezione d'urto differenziale:

$$\frac{\text{Prob. di transizione/Unita' di tempo}}{\text{Dens. di corrente di probabilita' incidente}}$$

Eventualmente: Generalizzazione

Numeratore $\rightarrow$

$\rightarrow$ Prob. di trans./Unita' di ang. solido,Energia,...*Unita' di tempo

Es. Onde piane con direzione entro $d\Omega$ a (θ,ϕ)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{w}{\Phi}$$

Regola d'oro e scattering - III

Prob. di transizione: verso un gruppo di stati del continuo

$$w \simeq 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \dots \right|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_f = E_i}$$

$\Phi = j$ Densita' di corrente

$$j = -\frac{i}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz}, \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ikz}$$

$$\rightarrow j = -\frac{i}{2m}\left[\frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ikz} ik \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} - \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} (-ik) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ikz}\right]$$

$$\rightarrow j = -\frac{i}{2m} \frac{2ik}{V} = \frac{k}{mV}$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{mV}{k} 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \dots \right|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_f = E_i}$$

Regola d'oro e scattering - IV

Scattering elastico:

$$k = |\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}| = (2mE)^{1/2}$$

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2mE\sqrt{\frac{m}{2E}}dEd\Omega = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 m\sqrt{2mE}dEd\Omega$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{mV}{k}2\pi\left|\langle f|H'|i\rangle + \sum_a \frac{\langle f|H'|a\rangle\langle a|H'|i\rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots\right|^2 V\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 m^{3/2}2^{1/2}E^{1/2}$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^2}(m)^{3/2} 2^{1/2}E^{1/2}\frac{mV}{2^{1/2}m^{1/2}E^{1/2}}\left|\langle f|H'|i\rangle + \sum_a \frac{\langle f|H'|a\rangle\langle a|H'|i\rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots\right|^2$$

$$= V^2\frac{m^2}{(2\pi)^2}\left|\langle f|H'|i\rangle + \sum_a \frac{\langle f|H'|a\rangle\langle a|H'|i\rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots\right|^2$$

Al I ordine:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = V^2\frac{m^2}{(2\pi)^2}\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2$$

Regola d’oro e scattering - V

Elemento di matrice:

$$M_{fi} = \langle f | H' | i \rangle$$

Nella rappresentazione posizione:

$$\langle \mathbf{r} | i \rangle = \frac{1}{V^{1/2}} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}, \langle \mathbf{r} | f \rangle = \frac{1}{V^{1/2}} e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}}$$

$$\rightarrow \langle f | H' | i \rangle = \frac{1}{V} \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot \mathbf{r}} H' d^3\mathbf{r}$$

Sezione d’urto differenziale:
Approssimazione di Born

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = V^2 \frac{m^2}{(2\pi)^2} \left| \langle f | H' | i \rangle \right|^2 = V^2 \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{V^2} \left| \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot \mathbf{r}} H' d^3\mathbf{r} \right|^2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi)^2} \left| \int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot \mathbf{r}} H' d^3\mathbf{r} \right|^2}$$

Esempio: Potenziale di Yukawa - I

$$H' = V(r), \mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$$

$$\int e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{r}} H' d^3\mathbf{r} = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) d^3\mathbf{r}$$ Trasformata di Fourier di $V(r)$

$$\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) d^3\mathbf{r} = \int e^{iqr\cos\theta} V(r) r^2 d(\cos\theta) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 V(r) dr \int_{-1}^{+1} e^{iqr\cos\theta} d(\cos\theta) = 2\pi \int_0^\infty r^2 V(r) dr \frac{1}{iqr} e^{iqr\cos\theta}\Big|_{-1}^{+1}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r^2 V(r) \frac{\overbrace{e^{iqr} - e^{-iqr}}^{2i\sin qr}}{iqr} dr = 4\pi \int_0^\infty r^2 V(r) \frac{\sin qr}{qr} dr = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin qr dr$$

$$V(r) = -g^2 \frac{e^{-\beta r}}{r}$$

$$\rightarrow \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r V(r) \sin qr dr = -g^2 \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty e^{-\beta r} \sin qr dr$$

Esempio: Potenziale di Yukawa - II

$$-g^2\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty e^{-\beta r}\sin qr dr=-g^2\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty e^{-\beta r}\frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{2i}dr$$

$$=-g^2\frac{4\pi}{2iq}\int_0^\infty\left[e^{i(q+i\beta)r}-e^{-i(q-i\beta)r}\right]dr$$

$$=-g^2\frac{4\pi}{2iq}\left[\frac{1}{i(q+i\beta)}e^{i(q+i\beta)r}+\frac{1}{i(q-i\beta)}e^{-i(q-i\beta)r}\right]_0^\infty$$

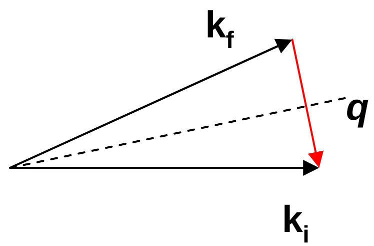
$$=g^2\frac{2\pi}{q}\left[-\frac{1}{(q+i\beta)}-\frac{1}{(q-i\beta)}\right]$$

$$=-g^2\frac{2\pi}{q}\frac{2q}{q^2+\beta^2}=-4\pi g^2\frac{1}{q^2+\beta^2}$$

$$\rightarrow\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{m^2}{(2\pi)^2}\left|\int e^{i(\mathbf{k}_i-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{r}}H'd^3\mathbf{r}\right|^2=\frac{m^2}{(2\pi)^2}\left(-4\pi g^2\frac{1}{q^2+\beta^2}\right)^2$$

Esempio: Potenziale di Yukawa - III

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{16\pi^2 g^4 m^2}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{q^2+\beta^2}\right)^2=4g^4m^2\left(\frac{1}{q^2+\beta^2}\right)^2$$



$$q=2k\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=4g^4m^2\left(\frac{1}{q^2+\beta^2}\right)^2=4g^4m^2\left(\frac{1}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\beta^2}\right)^2$$

Per $\beta \to 0$: Pot. Coulombiano

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\to 4g^4m^2\left(\frac{1}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^2=\frac{g^4}{4}\frac{m^2}{k^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$ Sez. d'urto di Rutherford

Scattering fra particelle

Esempio considerato: interazione *particella – potenziale*
Esempi piu' realistici: interazione *particella – particella*

Regola generale per collisioni non relativistiche:

Conservazione/Non conservazione *energia cinetica totale*
Scattering *elastico/anelastico*

Significato diverso da quello del corrispondente caso classico:
No dissipazione, piuttosto eccitazione di *gradi di liberta' interni* di proiettile/bersaglio

Conservazione *quantita' di moto totale*
Conservazione *mom. angolare totale:*
Scattering: Stati iniziale e finale non hanno di solito mom. angolare definito
Decadimenti: Stati iniziale e finale hanno mom. angolare definito

Elastico vs. Anelastico

Per collisioni e decadimenti in approssimazione non relativistica

Scattering <u>elastico</u>:
Lo stato interno di proiettile e bersaglio restano invariati nella collisione

Conservazione della massa
Conservazione dell'energia totale (cinetica)
Conservazione della quantita' di moto totale

Scattering <u>anelastico</u>:
Lo stato interno di proiettile e/o bersaglio cambia nella collisione

Conservazione della massa
Conservazione dell'energia totale (cinetica+potenziale)
Conservazione della quantita' di moto totale