

Scattering Cinematica Relativistica

V – Trasformazioni di Lorentz, 4-vettori, impulsi e angoli

Trasformazioni di Lorentz

Per due riferimenti in configurazione tipica:

$$x' = x$$

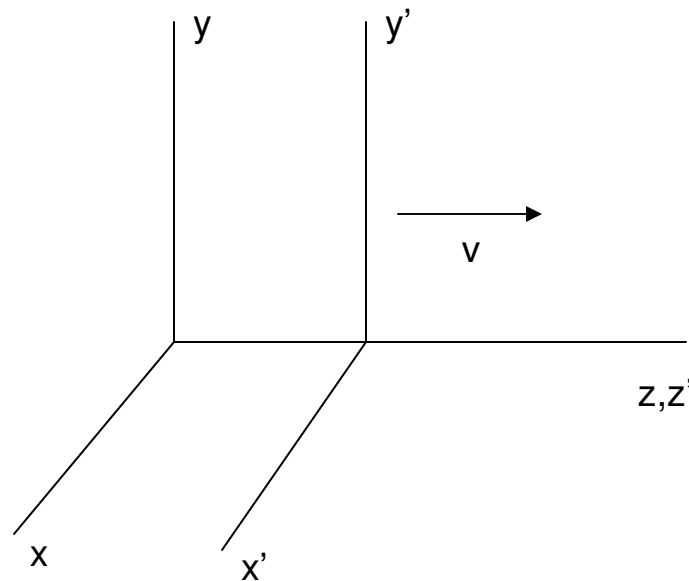
$$y' = y$$

$$z' = \gamma(z - \beta ct)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}z\right)$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



TdL: legano coordinate di un *evento* in due sistemi di riferimento

Estensione dell'idea di punto geometrico: Fenomeno localizzato nello spazio e nel tempo

Es.: Flash luminoso, decadimento di un atomo eccitato

TdL e rotazioni - I

Rotazione : lascia invariata la distanza fra P e O

$$r^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 = (x'_1)^2 + (y'_1)^2 + (z'_1)^2$$

r : Distanza euclidea

Trasformazione di Lorentz: lascia invariata l'intervallo fra E e O

$$s^2 = (ct_1)^2 - (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 = (ct'_1)^2 - (x'_1)^2 - (y'_1)^2 - (z'_1)^2$$

s : 4-intervallo

Forte analogia geometrica:

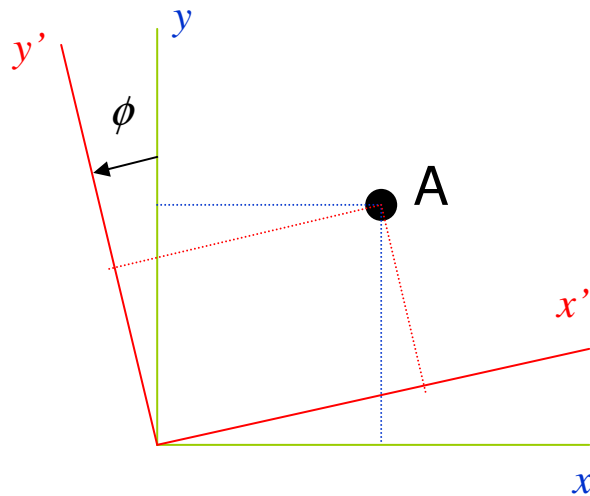
Forma quadratica in 3D vs 4D

Importante differenza:

Segno

TdL e rotazioni - II

Rotazioni in 2 dimensioni



$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}$$
$$\rightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

In forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TdL e rotazioni - III

Per un angolo infinitesimo:

$$\begin{cases} x' = x + \phi y \\ y' = -\phi x + y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Normalizzazione:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2 + y'^2$$

$$= (x + \phi y)^2 + (-\phi x + y)^2$$

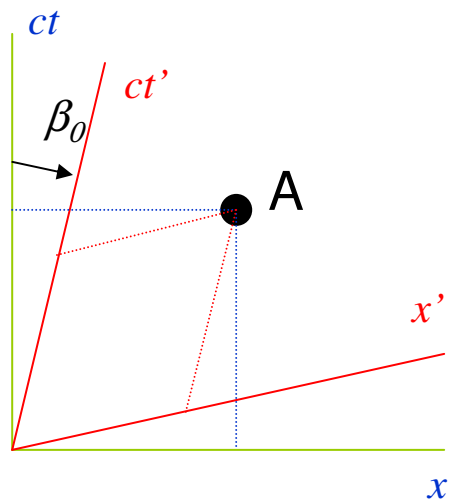
$$= (x^2 + y^2)(1 + \phi^2)$$

Rotazione infinitesima con normalizzazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TdL e rotazioni - IV

TdL infinitesima in 1 dim. spaziale + tempo



$$\begin{cases} x' = x - \beta_0 ct \\ ct' = -\beta_0 x + ct \end{cases}$$
$$\rightarrow c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2$$

In forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

β_0 e' la velocita' infinitesima di S' rispetto ad S

TdL e rotazioni - V

Normalizzazione:

$$a \cdot a = c^2 t^2 - x^2$$

$$a' \cdot a' = c^2 t'^2 - x'^2$$

$$= (ct - \beta_0 x)^2 - (x - \beta_0 ct)^2$$

$$= (c^2 t^2 - x^2)(1 - \beta_0^2)$$

TdL infinitesima con normalizzazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\beta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Che cos'è a ?

Equivalente, rispetto a TdL, del vettore posizione \mathbf{r} rispetto a rotazioni: coppia di numeri reali con prefissata legge di trasformazione rispetto a TdL. In 3+1 dimensioni viene chiamato *4-vettore*

TdL e rotazioni - VI

TdL finita:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\eta_0) & -S(\eta_0) \\ -S(\eta_0) & C(\eta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$a \cdot a = c^2 t^2 - x^2$$

$$a' \cdot a' = c^2 t'^2 - x'^2$$

$$= (ctC - xS)^2 - (xC - ctS)^2$$

$$= (c^2 t^2 - x^2)(C^2(\eta_0) - S^2(\eta_0))$$

TdL finita con normalizzazione:

$$C^2(\eta_0) - S^2(\eta_0) = 1$$

TdL e rotazioni - VII

Che cos'è η_0 ?

Osservazione:

Per 2 rotazioni in successione, gli angoli di rotazione si sommano:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

Per 2 TdL in successione, le velocità *non* si sommano (v. somma relativistica delle velocità)

$$\beta \neq \beta_1 + \beta_2$$

η_0 parametro *additivo* della TdL, per ora con significato non chiaro..

TdL e rotazioni - VIII

Funzioni adatte:

$$C(\eta_0) = \cosh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2}$$

$$S(\eta_0) = \sinh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta_0 & -\sinh \eta_0 \\ -\sinh \eta_0 & \cosh \eta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Limite infinitesimo:

$$e^{\pm \eta_0} = 1 \pm \eta_0 + \frac{1}{2} \eta_0^2 \pm \dots$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cosh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2} = 1 + \frac{1}{2} \eta_0^2 + \dots \\ \sinh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2} = \eta_0 + \dots \end{cases}$$

Proprietà' funzioni iperboliche:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = x + \dots$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$$

TdL e rotazioni - IX

η_0 si chiama *rapidita'*: come anticipato, parametro additivo della TdL

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \cosh \eta_0 \begin{pmatrix} 1 & -\tanh \eta_0 \\ -\tanh \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta_0}} \begin{pmatrix} 1 & -\tanh \eta_0 \\ -\tanh \eta_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \beta_0 = \frac{v}{c} = \tanh \eta_0$$

Verifica TdL infinitesime: Rapidita' infinitesima \sim Velocita'

$$\tanh \eta_0 = \eta_0 + \dots \quad \rightarrow \tanh \eta_0 = \beta_0 \sim \eta_0$$

Ulteriore relazione fra TdL e rotazioni:

$$\cosh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}}{2} = \frac{e^{-i(i\eta_0)} + e^{i(i\eta_0)}}{2} = \cos(i\eta_0)$$

$$\sinh \eta_0 = \frac{e^{\eta_0} - e^{-\eta_0}}{2} = \frac{e^{-i(i\eta_0)} - e^{i(i\eta_0)}}{2} = -i \sin(i\eta_0)$$

Le funzioni iperboliche sono equivalenti alle funzioni circolari di argomento (angolo) immaginario

4-vettori - I

Insieme di 3 grandezze che si trasformano per rotazioni come le 3 componenti di \mathbf{r} : *3-vettore* (spesso chiamato vettore)

Insieme di 4 grandezze che si trasformano per TdL come le coordinate spaziotemporali di un evento: *4-vettore* (a volte chiamato vettore)

Singola grandezza invariante per rotazioni: 3-scalare (spesso chiamato scalare)

Singola grandezza invariante per TdL: 4-scalare, invariante o scalare di Lorentz (spesso chiamato scalare)

Non tutta la storia:

- i) Insiemi piu' complicati di grandezze, che si trasformano come prodotti di componenti di 3- o 4-vettori: 3- o 4-tensori
- ii) Insiemi di grandezze che si trasformano per rotazioni o TdL in modo diverso dalle componenti di vettori: spinori

Importanti, ma non considerati in questo corso

Componenti co- e contro-varianti - I

In uno spazio qualsiasi (non necessariamente Euclideo):
Piu' di un tipo di componenti per ogni dato vettore

Es: Assi cartesiani obliqui nel piano

Per gli assi blu:

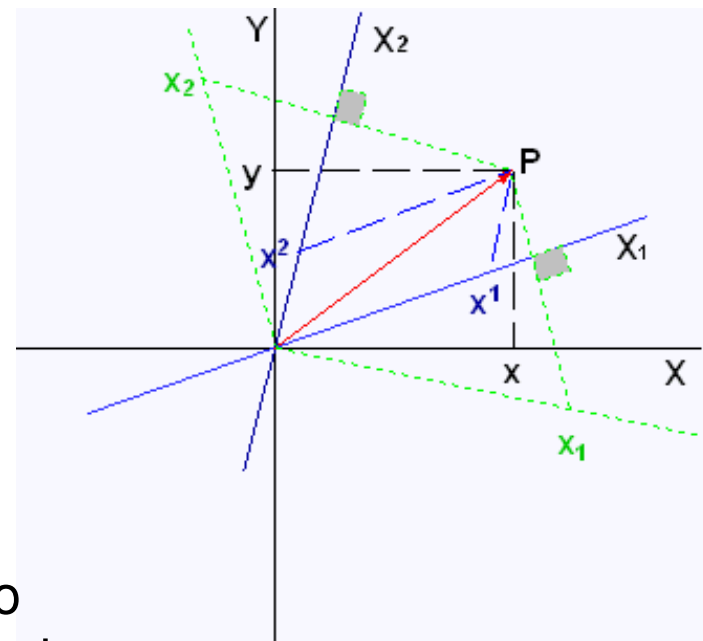
Componenti *controvarianti*: quelle in blu

Componenti *covarianti*: quelle verdi

Per gli assi verdi:

Componenti *controvarianti*: quelle verdi

Componenti *covarianti*: quelle blu



Spazio di Minkowski: Pseudo-Euclideo

Ogni 4-vettore ha due tipi di componenti

Componenti co- e contro-varianti - II

In termini delle componenti di un 3-vettore euclideo (v_x, v_y, v_z) :

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v_t, v_x, v_y, v_z) \quad \text{Controvarianti}$$

$$v_\mu = (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_t, -v_x, -v_y, -v_z) \quad \text{Covarianti}$$

$$v^2 = (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 = v^\mu v_\mu = v_\mu v^\mu \quad \text{Norma o modulo del 4-vettore}$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Tensore metrico}$$

$$\rightarrow v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu, v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu$$

TdL vs. Rotazioni

Trasformazioni lineari di coordinate

Rotazioni: in 3D

TdL: in 4D

3-vettori		4-vettori	
Operazione: <i>Rotazione degli assi</i> Metrica: <i>euclidea</i> Tipi di componenti: <i>1</i>	Invariante: <i>Distanza fra 2 punti</i> Segno: <i>+,0</i> <i>Cartesiane</i>	Operazione: <i>Trasf. di Lorentz</i> Metrica: <i>pseudo-euclidea</i> Tipi di componenti: <i>2</i>	Invariante: <i>Intervallo fra 2 eventi</i> Segno: <i>+,0,-</i> <i>Controvarianti, covarianti</i>

4-impulso

4-vettore piu' importante in reazioni relativistiche: 4-impulso

$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ impulso relativistico

$E = m^2c^4 + p^2c^2$ energia totale relativistica

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}c)$$

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = m^2c^4$$

TdL delle componenti del 4-impulso: caso tipico $S' = \text{CM}$, $S = \text{LAB}$

$S \rightarrow S'$

$$p_\perp' = p_\perp$$

$$p_\parallel' = \gamma(p_\parallel - \beta E)$$

$$E' = \gamma(E - \beta p_\parallel)$$

$S' \rightarrow S$

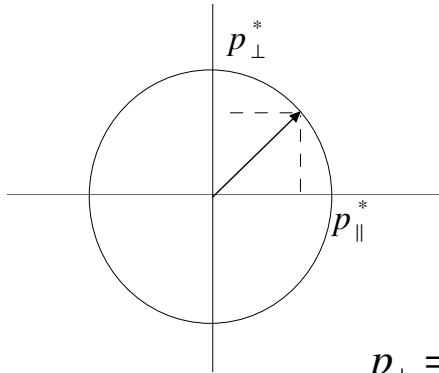
$$p_\perp = p_\perp'$$

$$p_\parallel = \gamma(p_\parallel' + \beta E')$$

$$E = \gamma(E' + \beta p_\parallel')$$

Trasformazione del 3-impulso - I

3-impulso: modulo fisso, direzione qualsiasi nel sistema $S^* = \text{CM}$



Sfera degli impulsi in S^*

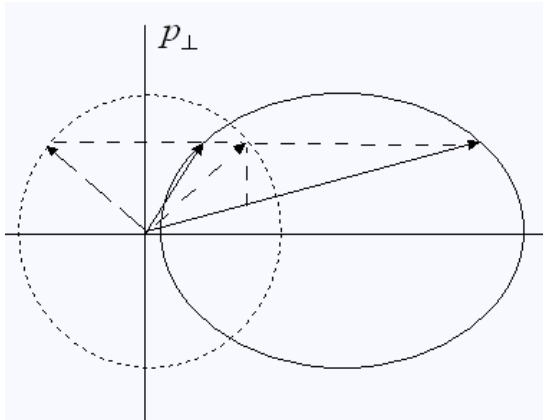
$$p_{\perp}^{*2} + p_{\parallel}^{*2} = p_x^{*2} + p_y^{*2} + p_z^{*2} = k^2$$

$$p_{\perp} = p_{\perp}^*$$

TdL:

$$p_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel}^* + \beta E^*) \rightarrow p_{\parallel}^* = \frac{1}{\gamma} p_{\parallel} - \beta E^*$$

3-impulso: modulo dipendente da direzione nel sistema $S = \text{LAB}$

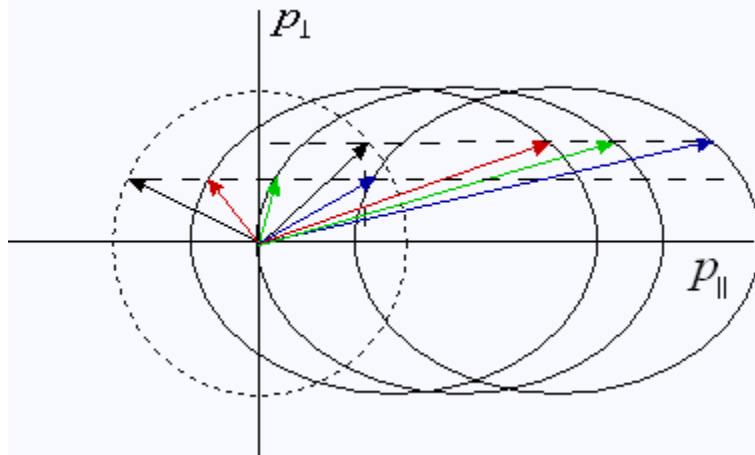


Ellissoide degli impulsi in S

$$p_{\perp}^2 + \left(\frac{p_{\parallel}}{\gamma} - \beta E^* \right)^2 = k^2$$

$$\rightarrow \frac{p_{\perp}^2}{k^2} + \frac{(p_{\parallel} - \beta \gamma E^*)^2}{\gamma^2 k^2} = 1$$

Trasformazione del 3-impulso - II



Sfera → Ellissoide

Spostata: Centro $\beta\gamma E^*$
 Distorta: Fattore γ lungo z

3 situazioni possibili:

$\beta < \beta^*$: Ellissoide interseca piano \mathbf{p}_\perp

Relazione impulso-angolo: 1-1

$\beta > \beta^*$: Ellissoide non interseca piano \mathbf{p}_\perp

Relazione impulso-angolo: 2-1

$\beta = \beta^*$: Ellissoide tangente piano \mathbf{p}_\perp

Caso limite fra i due precedenti

β : vel. TdL

$\beta^* = \frac{|\mathbf{p}|^*}{E^*}$: vel. particella nel CM

Trasformazione degli angoli - I

$$\cos \theta^* = \frac{p_{\parallel}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}, \sin \theta^* = \frac{p_{\perp}^*}{\sqrt{p_{\parallel}^{*2} + p_{\perp}^{*2}}}, \tan \varphi^* = \frac{p_y^*}{p_x^*}$$

$$\cos \theta = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}, \sin \theta = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}}, \tan \varphi = \frac{p_y}{p_x}$$

Angoli in S^* in termini di quantita' misurate in S :

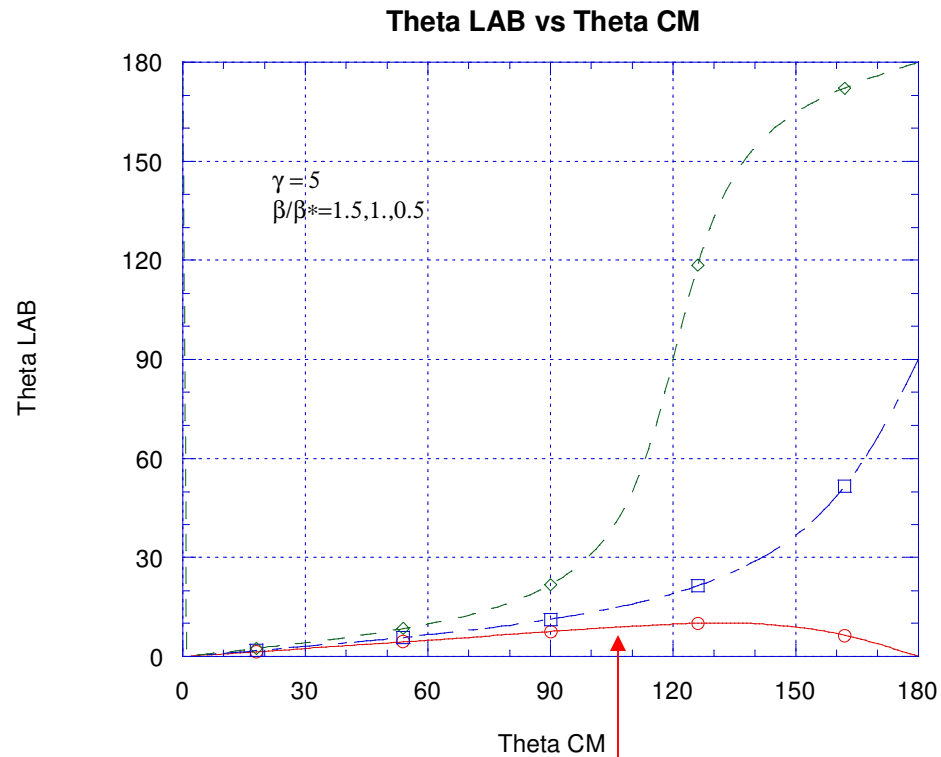
$$\cos \theta^* = \frac{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}, \sin \theta^* = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}}, \tan \varphi^* = \frac{p_y^*}{p_x^*} = \frac{p_y}{p_x} = \tan \varphi$$

$$\rightarrow \tan \theta^* = \frac{p_{\perp}}{\sqrt{\gamma(p_{\parallel} - \beta E)^2 + p_{\perp}^2}} = \frac{p \sin \theta}{\gamma(p \cos \theta - \beta E)} \rightarrow \tan \theta^* = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \beta/\beta_{part})}$$

...e viceversa:

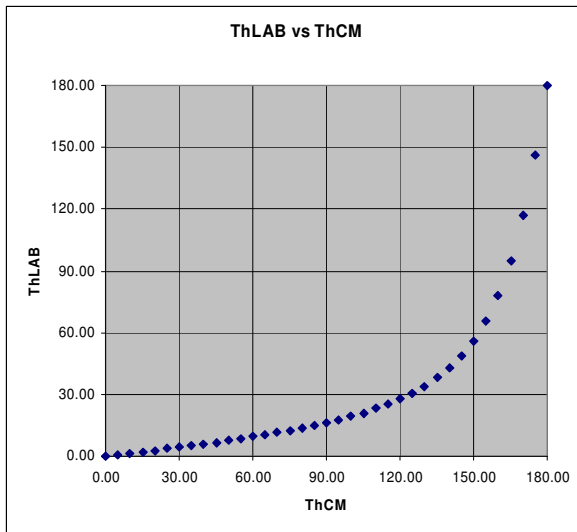
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma(\cos \theta^* + \beta/\beta_{part}^*)}$$

Trasformazione degli angoli - II

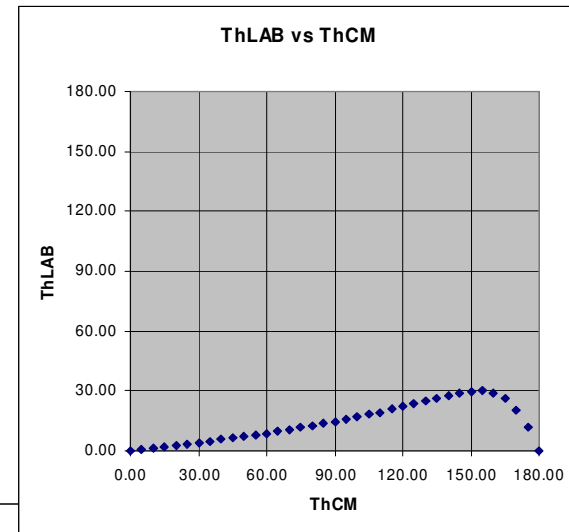


2 diversi angoli nel CM per ogni angolo nel LAB
Angolo limite nel LAB

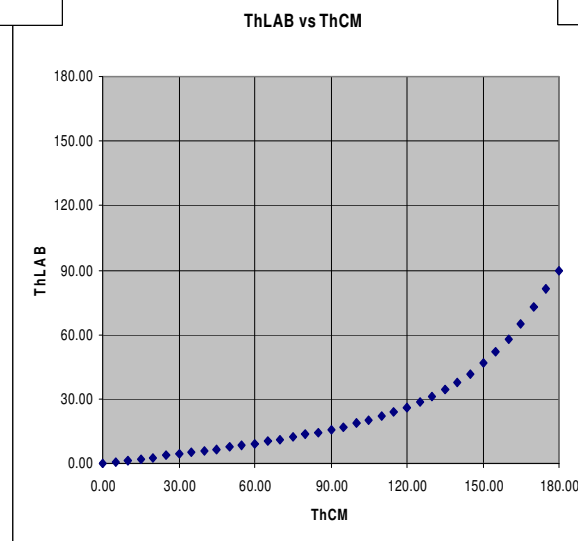
Esempi



ep – 22.5 GeV



dp – 22.5 GeV



pp – 22.5 GeV

Relazione impulso – angolo nel LAB - I

Per una particella emessa nel CM con angolo qualsiasi e impulso fissato (p.es. decadimento o scattering in 2 corpi)

$$p_{\perp} = p_{\perp}^*$$

$$p_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel}^* + \beta E^*)$$

$$E = \gamma(E^* + \beta p_{\parallel}^*)$$

$$E^* = -\gamma\beta p_{\parallel} + \gamma E$$

$$\rightarrow E^* = -\gamma\beta p \cos \theta + \gamma E = -\gamma\beta p \cos \theta + \gamma\sqrt{m^2 + p^2}$$

Attraverso una certa quantita' di algebra estrema:

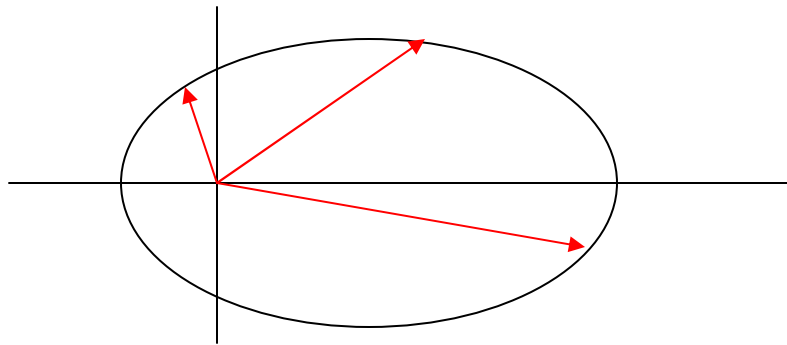
$$p = p^* \frac{\cos \theta}{\gamma(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \left(\frac{\beta}{\beta^*} \pm \sqrt{1 + \gamma^2 \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta^*} \right)^2 \right) \tan^2 \theta} \right)$$

Relazione impulso – angolo nel LAB - II

$\beta^* > \beta$: 1 soluzione reale e +va

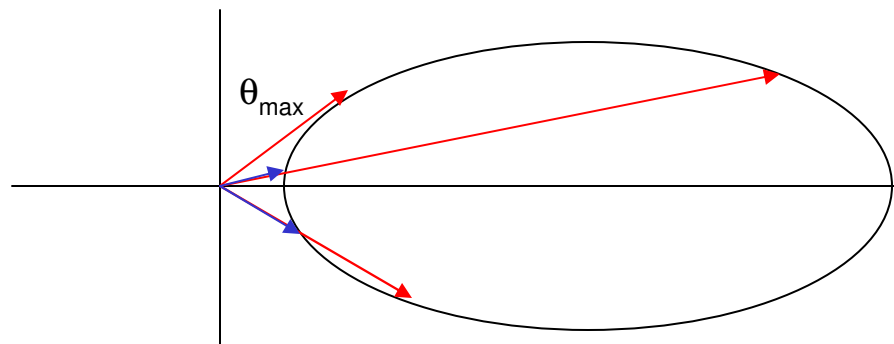
→ 1 valore di impulso per ogni angolo, $0 < \theta < \pi$

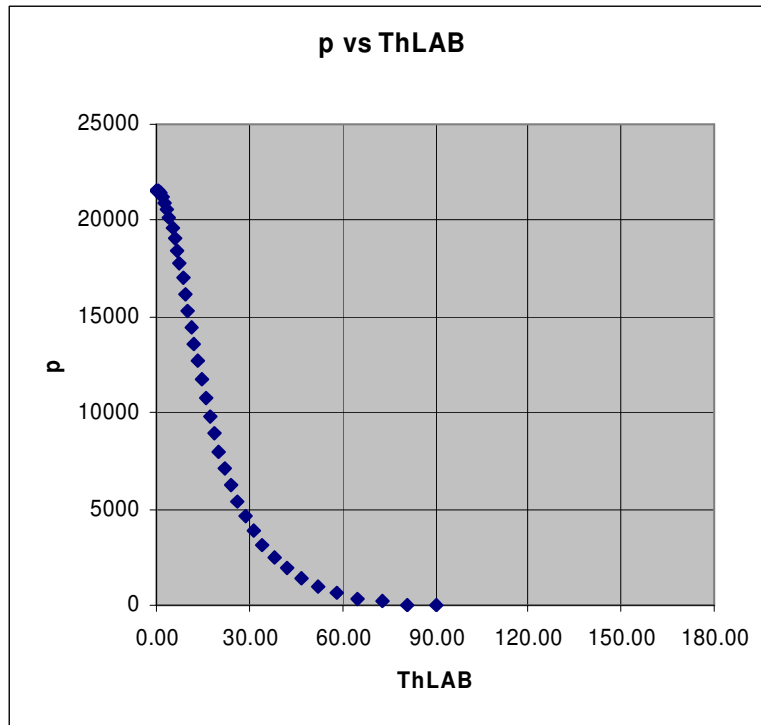
Condizione sempre verificata quando la particella ha massa zero: fotoni, neutrini



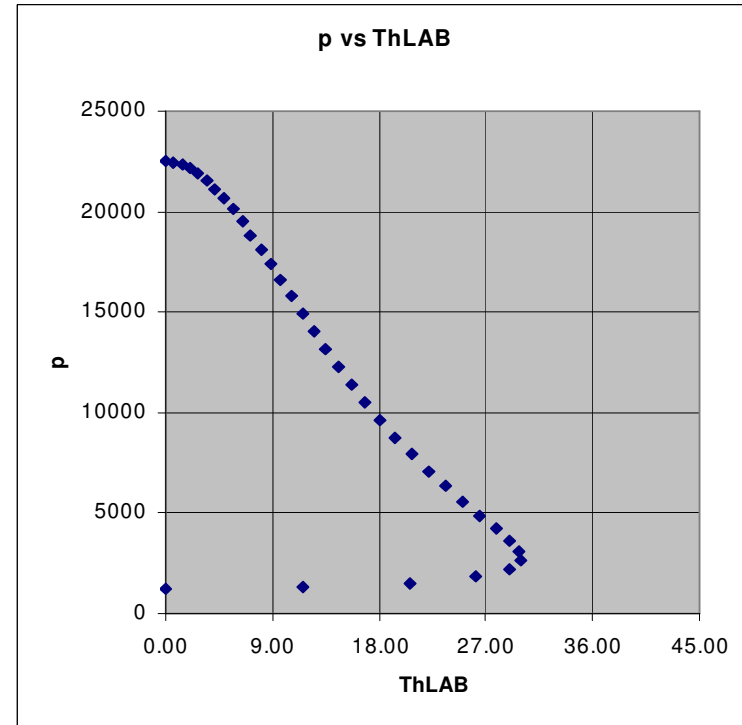
$\beta^* < \beta$: 2 soluzioni reali e +ve

→ 2 valori di impulso per ogni angolo, $0 < \theta < \theta_{\max}$





pp – 22.5 GeV



dp – 22.5 GeV