Scattering
Cinematica Relativistica

VII – Invarianti

Invarianti

(Quantita') invariante:

Grandezza fisica che ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento.

Esempi:

Norma di un 4-vettore
Massa (a riposo) di una particella
Prodotto scalare di due 4-vettori

Utili per trattare in modo abbreviato e semplice molti problemi di cinematica relativistica

Decadimento in tre corpi - I

Cinematica piu’ complicata rispetto al caso in due corpi:
Descrizione a mezzo di invarianti piu’ conveniente
Riconsiderando il caso a 2 corpi:

Numero gradi di liberta' dello stato finale:

$3 \times 2 = 6$ componenti degli impulsi

Conservazione del 4-impulso totale:

$$P = p_1 + p_2 \rightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 4 relazioni di conservazione = 4 vincoli

$\rightarrow$ 6 - 4 = 2 gradi di liberta'

Es.: Nel CM, angoli di decadimento θ^*, ϕ^*
Angolo azimutale non significativo (di solito)

$\rightarrow$ 1 sola variabile dinamicamente rilevante: θ^*

Decadimento in tre corpi - II

3 particelle nello stato finale:

$3\times3=9$ Componenti impulso di 3 particelle

Conservazione del 4-impulso totale:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \rightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 + E_3 \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 4 relazioni di conservazione = vincoli

$\rightarrow$ 9-4=5 gradi di liberta'

3 variabili non significative dinamicamente
(Es.: Orientamento della terna di assi nel CM (3 angoli) non rilevante)

$\rightarrow$ 2 variabili dinamicamente significative

Decadimento in tre corpi - III

Descrizione piu' ovvia in termini di invarianti:

$$m_{12}^2 = \left(p_1 + p_2\right)^2 = \left(E_1 + E_2\right)^2 - \left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\right)^2$$

$$\rightarrow m_{12}^2 = \left(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\right) - \left(\left|\mathbf{p}_1\right|^2 + \left|\mathbf{p}_2\right|^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2\right)$$

$$\rightarrow m_{12}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\left(E_1E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2\right)$$ Massa invariante di 1 e 2

Con 3 particelle finali:

$$m_{12}, m_{13}, m_{23}$$

Non tutte indipendenti:

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + M^2$$

$\rightarrow$ 2 masse invarianti (indipendenti) come gradi di liberta'

Decadimento in tre corpi - IV

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2$$
$$m_{13}^2 = (p_1 + p_3)^2 = (P - p_2)^2$$
$$m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2$$

Prendendo p. es. il caso 1-2:

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 = P^2 + p_3^2 - 2P \cdot p_3$$

Nel CM della particella madre:

$$P = (M, 0)$$
$$\rightarrow m_{12}^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3$$
$$\rightarrow m_{12}^2\Big|_{\max} = M^2 + m_3^2 - 2Mm_3 = (M - m_3)^2$$

Nel CM delle particelle 1 e 2:

$$p_1 + p_2 = (E'_1 + E'_2, 0)$$
$$\rightarrow m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (E'_1 + E'_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$
$$\rightarrow m_{12}^2\Big|_{\min} = (m_1 + m_2)^2$$

Limiti cinematici
alla regione di variabilita'

Decadimento in tre corpi - V

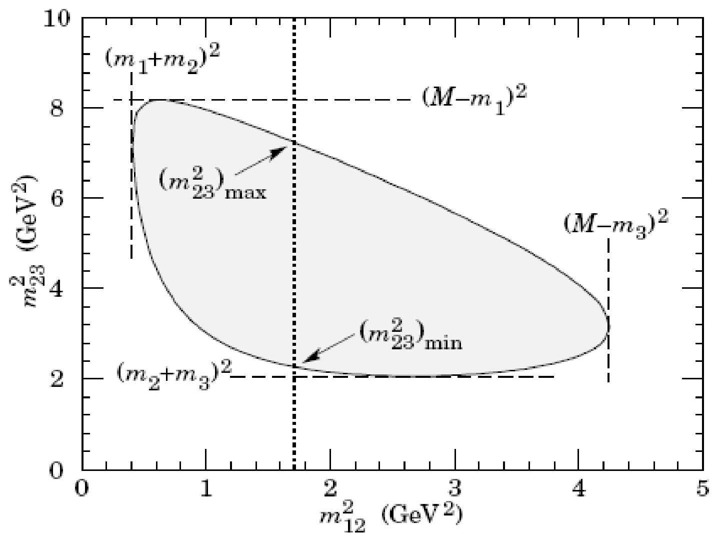
Regioni di variabilita' delle 3 masse invarianti:

$$(m_1 + m_2)^2 \le m_{12}^2 \le (M - m_3)^2$$

$$(m_1 + m_3)^2 \le m_{13}^2 \le (M - m_2)^2$$

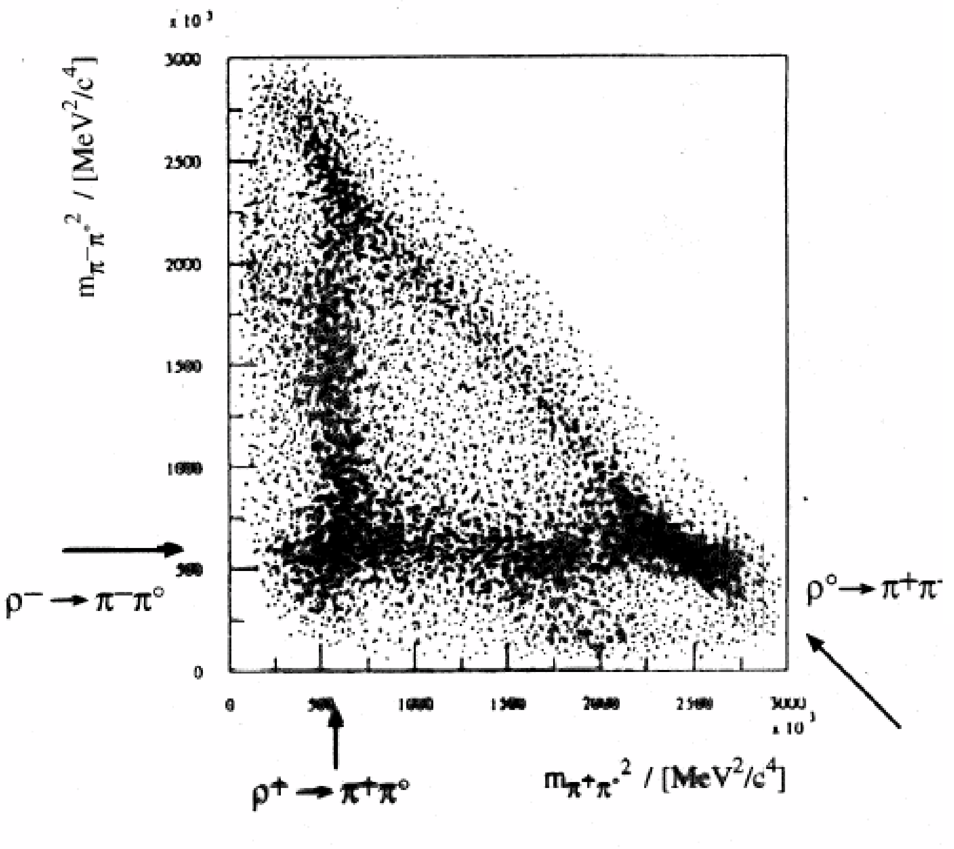
$$(m_2 + m_3)^2 \le m_{23}^2 \le (M - m_1)^2$$

Considerando le prime 2 come indipendenti:
La regione accessibile del piano m_{12}, m_{13} non e' un rettangolo



Dalitz plot - I

Modo di rappresentare le variabili dinamiche in una reazione con stato a finale 3 a corpi:

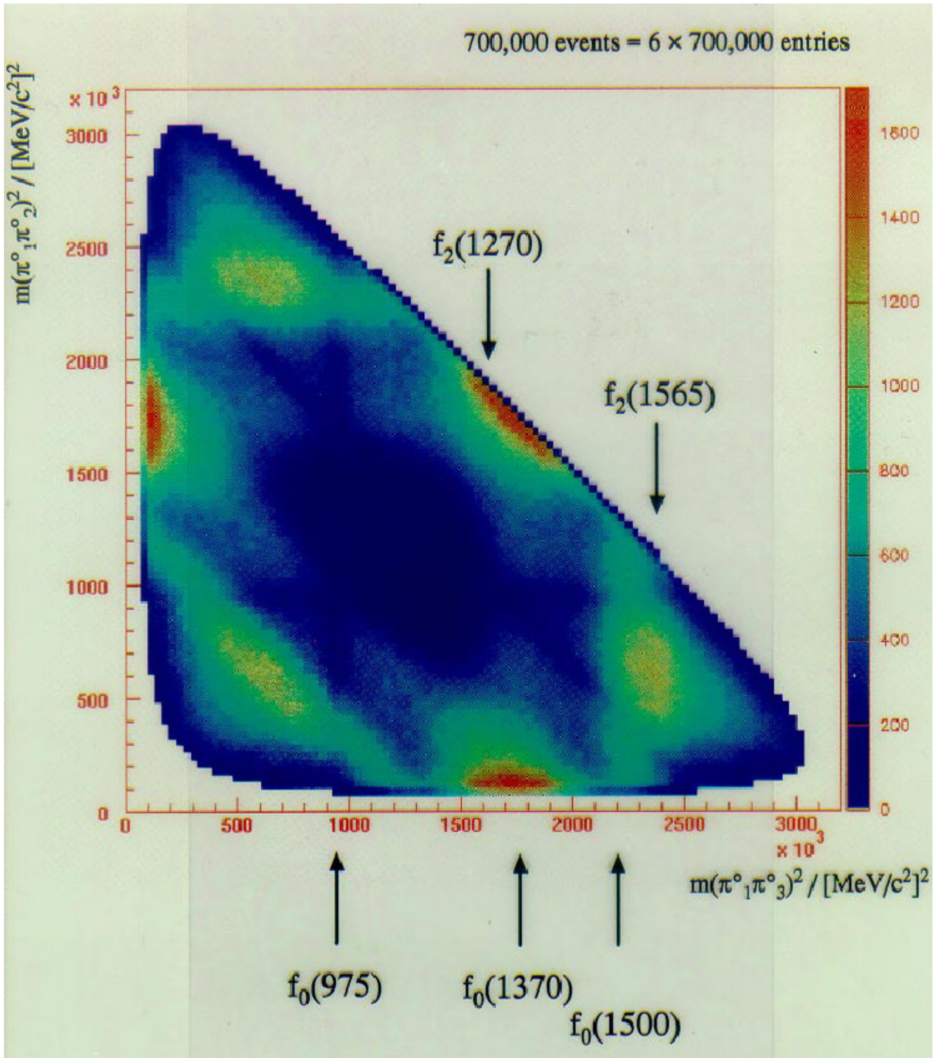


$\pi^+\pi^-\pi^0$ Dalitz plot

Ogni evento: un punto

Modo interessante per individuare la produzione di stati instabili (risonanze), che si individua dall' accumulo di eventi in certe regioni

Dalitz plot - II



$R \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$

$M_R \sim 3\ GeV$

Stato finale totalmente simmetrico nei tre pioni identici

Reazioni a due corpi

Per la generica reazione a 2 corpi

$$1+2 \rightarrow 3+4$$

la conservazione del 4-impulso totale

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

si puo' scrivere nelle componenti LAB (2 in quiete) oppure CM

LAB						**CM**					
	P	p_1	p_2	p_3	p_4		P	p_1	p_2	p_3	p_4
E	E_1+m_2	E_1	m_2	E_3	E_4	E^*	$E^*_1+E^*_2$	E^*_1	E^*_2	E^*_3	E^*_4
p_x	0	0	0	p_{x3}	p_{x4}	p_x^*	0	0	0	p'^*_x	$-p'^*_x$
p_y	0	0	0	p_{y3}	p_{y4}	p_y^*	0	0	0	p'^*_y	$-p'^*_y$
p_z	p_1	p_1	0	p_{z3}	p_{z4}	p_z^*	0	p^*	$-p^*$	p'^*_z	$-p'^*_z$

Invarianti utili - I

4-impulso totale:

$$P = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$s = P^2 = \left(p_1 + p_2 \right)^2 = \left(p_3 + p_4 \right)^2$$

Tramite componenti nel CM:

$$\begin{cases} s = \left(E_1^* + E_2^* \right)^{2\;2} \\ s = \left(E_3^* + E_4^* \right) \end{cases}$$

(Energia totale nel CM)^2

Tramite componenti nel LAB:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_2 E_1$$

$$s = m_3^2 + m_4^2 + 2\left(E_3 E_4 - \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 \right)$$

Invarianti utili - II

4-impulso trasferito n.1:

$$q = p_1 - p_3$$

$$t = q^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(E_1 E_3 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3\right)$$

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(E_1^* E_3^* - \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}'^*\right)$$

4-impulso trasferito n.2:

$$r = p_1 - p_4$$

$$u = r^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2\left(E_1 E_4 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4\right)$$

$$u = m_1^2 + m_4^2 - 2\left(E_1^* E_4^* + \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p}'^*\right)$$

Invarianti utili - III

$$E_1 = \frac{1}{2m_2}\left(s - m_1^2 - m_2^2\right)$$

$$p_1 = \frac{1}{2m_2}\lambda^{1/2}\left(s, m_1^2, m_2^2\right)$$

$$p^* = p_1 \frac{m_2}{\sqrt{s}}$$

$$E_{1,2}^* = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(m_{1,2}^2 + m_2 E_1\right)$$

$$\cos\theta_3 = \frac{1}{|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|}\left[\frac{1}{2}\left(t - m_1^2 - m_3^2\right) + E_1 E_3\right]$$

$$\cos\theta_3^* = \frac{1}{|\mathbf{p}*||\mathbf{p}'*|}\left[\frac{1}{2}\left(t - m_1^2 - m_3^2\right) + E_1^* E_3^*\right]$$

Invarianti utili - IV

Relazione fondamentale per i processi a 2 corpi:

$$s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$$

Due sole grandezze indipendenti: spesso utilizzate s e t

Ampiezza di transizione: funzione delle variabili dinamiche
Possibile esprimerla come funzione di (s,t)

Energia di soglia

$\sqrt{s}$: quantita' molto importante nel caso di reazioni con produzione di particelle

En. totale nel CM minima perche' possa avvenire una data reazione, con produzione di n particelle di masse a riposo $m_1, m_2, .., m_n$:

$$\sqrt{s} \geq \sum_{i=1}^{n} m_i$$ Energia di soglia per la reazione

Soglia per $\sqrt{s}$ $\rightarrow$ Soglia per p_{LAB}

Collider (simmetrici)

Stato iniziale della collisione

$$s = \left(E_1^* + E_2^*\right)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1$$

Confronto fra bersaglio fisso e collider:
Stessa energia di fascio

LAB $\simeq$ CM per un collider simmetrico

$$s_{\text{bersaglio fisso}} = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_{fascio} \underset{\text{Alta energia}}{\longrightarrow} \sqrt{s} \approx \sqrt{2m_2E_{fascio}}$$

$$s_{\text{collider simmetrico}} = \left(E_{fascio} + E_{fascio}\right)^2 = \left(2E_{fascio}\right)^2 \rightarrow \sqrt{s} = 2E_{fascio}$$

Quindi: a parita' di energia di fascio, l'en. totale nel CM cresce con $\sqrt{E}$ / E

Evidente vantaggio con il collider
Problema principale: Luminosita' elevata difficile da ottenere

Collider (asimmetrici)

Diversa energia dei due fasci

4-impulso totale:

$$P = p_1 + p_2$$

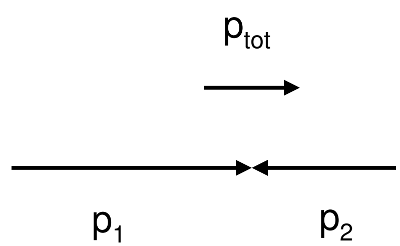
$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1),\, p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$$

$$P = (E_1 + E_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

$$s = P^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$$

Se $m \ll E$:

$$s \simeq 2(E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 4E_1E_2 \rightarrow \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1E_2}$$



$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2| = E_1 - E_2$$

$$E = E_1 + E_2$$

$\rightarrow \beta_{CM} = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$ Il CM si muove nel LAB

Vantaggio decisivo nello studio delle simmetrie delle int. deboli

Dalitz plot e reazioni

Reazione:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$$

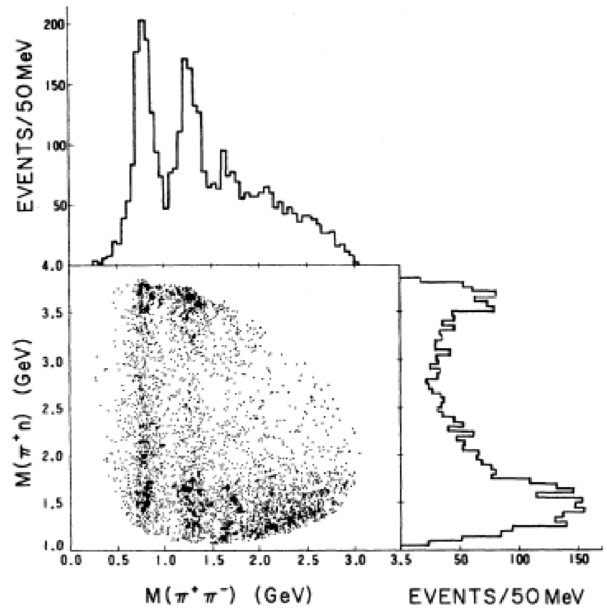


FIG. 2. Scatter plot of $M(\pi^+\pi^-)$ versus $M(\pi^+n)$ with the projections on both axes.

Utile per mettere in evidenza la produzione di *stati risonanti*