# Scattering
# Cinematica Relativistica

VIII – Spazio delle fasi

# Processi relativistici - I

Richiamo: Matrice $S$ e matrice $T$ per transizioni non relativistiche

$$S_{fi} \equiv \delta_{fi} - 2\pi i \delta\left(E_f - E_i\right) T_{fi}$$

$$T_{fi} = \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{\left(E_a - E_i\right)} + \ldots$$

Estensione a processi relativistici:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\left(2\pi\right)^4 T_{fi} \; \delta^{(4)}\left(p_i - p_f\right)$$

$$T_{fi} = -i \langle f | \int d^4 x H' | i \rangle + \ldots$$

$H'$: *densita' volumetrica* di hamiltoniano di interazione

Al di la' della formale similarita': notevole cambiamento concettuale, e considerevole incremento della complicazione

# Processi relativistici - II

Probabilita' di transizione per unita' di tempo:

$$w_{fi} = V \cdot 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right)$$

$V =$ Volume box di normalizzazione: risultato dell'integrazione di $H'$ sullo spazio

Per stati finali appartenenti al continuo:

$$dw = V \cdot 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right) dn$$

$$dw = V \cdot 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} + \ldots \right|^2 \delta\left(E_f - E_i\right) \frac{dn}{dE_f} dE_f$$

$$w = V \cdot 2\pi \left| T_{if} \right|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_f = E_i}$$

Estensione al caso relativistico:

$$d\Gamma = V \cdot \left(2\pi\right)^4 \left| M \right|^2 \delta^4\left(p_f - p_i\right) dn$$

Densita'  di rate di interazione:

da integrare sullo spazio delle fasi accessibile allo stato finale

# Processi relativistici - III

Fattore densita' degli stati: deve essere cambiato

Per 1 particella nello stato finale:

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \ldots \to \underbrace{dn_x}_{incremento\ no.stati/incremento\ dp_x} = \frac{L}{2\pi} dp_x$$

$$\to dn = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dp_x dp_y dp_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}$$

Per $N$ particelle finali:

$$dn = \frac{Vd^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{Vd^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \ldots \frac{Vd^3\mathbf{p}_N}{(2\pi)^3} = V^N \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \ldots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{(2\pi)^3}$$

Espressione *non* invariante per trasformazioni di Lorentz:

*Volume (contrazione delle lunghezze longitudinali)*
*Impulsi longitudinali*

# Processi relativistici - IV

Considerando solo gli impulsi:

$d^3\mathbf{p} = 2\pi p_\perp dp_\perp dp_\parallel,$ cfr. elemento di volume in coord. cilindriche

$$\rightarrow d^3\mathbf{p}' = 2\pi p_\perp' dp_\perp' dp_\parallel' = 2\pi p_\perp' dp_\perp' \gamma\left(dp_\parallel + \beta dE\right)$$

$$\rightarrow d^3\mathbf{p}' = 2\pi p_\perp dp_\perp \gamma dp_\parallel \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_\parallel}\right) = 2\pi p_\perp dp_\perp \gamma dp_\parallel \left(1 + \beta \frac{p_\parallel}{E}\right) = 2\pi p_\perp dp_\perp \gamma dp_\parallel \left(\frac{E + \beta p_\parallel}{E}\right)$$

$$\rightarrow d^3\mathbf{p}' \neq d^3\mathbf{p}$$

Si vede pero' che:

$$\rightarrow d^3\mathbf{p}' = d^3\mathbf{p}\frac{E'}{E} \rightarrow \frac{d^3\mathbf{p}'}{E'} = \frac{d^3\mathbf{p}}{E}$$ Invariante

Per $N$ particelle finali, ridefiniamo:

$$dn = V^N \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\dots\frac{d^3\mathbf{p}_N}{(2\pi)^3 2E_N}$$ Fattori $2$: convenzionali

# Processi relativistici - V

Fattore di spazio delle fasi: ora contiene $N$ fattori extra $1/E_i$
Occorre compensarli da qualche altra parte:
Ridefinizione dell'elemento di matrice

$$a \to "1" + "2" + \ldots + "N" \qquad \text{Decadimento}$$

$$a + b \to "1" + "2" + \ldots + "N" \qquad \text{Reazione}$$

Si ha allora:

$$M_{fi} \to \left(2E_a\right)^{1/2} \left(2E_1\right)^{1/2} \ldots \left(2E_N\right)^{1/2} M_{fi} \qquad \text{Decadimento}$$

$$M_{fi} \to \left(2E_a\right)^{1/2} \left(2E_b\right)^{1/2} \left(2E_1\right)^{1/2} \ldots \left(2E_N\right)^{1/2} M_{fi} \qquad \text{Reazione}$$

Rates totali nei 2 casi:

$$\Gamma_{fi} = \frac{\left(2\pi\right)^{4-3N} V^N \cdot V}{2E_a} \int \left|M_{fi}\right|^2 \delta^4\left(p_f - p_i\right) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \ldots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N} \qquad \text{Prob. decadimento/tempo}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{\left(2\pi\right)^{4-3N} V^N \cdot V}{2E_a 2E_b} \int \left|M_{fi}\right|^2 \delta^4\left(p_f - p_i\right) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \ldots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N} \qquad \text{Prob. Interazione/tempo}$$

# Processi relativistici - VI

Rate totale:
OK per decadimento = Inverso della vita media
KO per reazione, non direttamente misurabile
Piu' utile: sezione d'urto totale

$$\sigma = \frac{\Gamma}{\text{flusso incidente}}$$

Flusso:

$$\Phi = \frac{\text{particelle}}{\text{area} \times \text{tempo}} = j$$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} \rightarrow j = -\frac{i}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) = -\frac{i}{2mV}\left[e^{-ikz} ike^{ikz} - e^{-ikz}(-ik)e^{ikz}\right]$$

$$\rightarrow j = -\frac{i}{2mV} 2ik = \frac{k}{mV^2} = \frac{v}{V}$$

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|} = \frac{V \cdot V^N (2\pi)^{4-3N} \cdot V}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b} \int |M_{fi}|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \cdots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

# Processi relativistici - VII

$M$: Contiene le funzioni d'onda delle particelle iniziali e finali

Decadimenti:

$N+1$ fattori $\frac{1}{\sqrt{V}} \rightarrow \left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{N+1}{2}}$

$$\left|M\right|^2 = \left|F\right|^2 \left[\left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{N+1}{2}}\right]^2 = \left|F\right|^2 V^{-(N+1)}$$

Reazioni:

$N+2$ fattori $\frac{1}{\sqrt{V}} \rightarrow \left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{N+2}{2}} = \left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{N}{2}+1}$

$$\left|M\right|^2 = \left|F\right|^2 \left[\left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{N}{2}+1}\right]^2 = \left|F\right|^2 V^{-(N+2)}$$

# Processi relativistici - VIII

Decadimenti:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^{4-3N} V^N V^{-(N+1)} \cdot V}{2E_a} \int |F|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$ Prob. decadimento/tempo

Reazioni:

$$\sigma = \frac{V \cdot V^N (2\pi)^{4-3N} V^{-(N+2)} \cdot V}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b} \int |F|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b} \int |F|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

$$|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b = \left| \frac{\mathbf{p}_a}{E_a} - \frac{\mathbf{p}_b}{E_b} \right| 2E_a 2E_b \equiv 4\left[ (p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 \right]^{1/2}$$ Flusso invariante

$$\rightarrow \sigma = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{4\left[ (p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 \right]^{1/2}} \int |F|^2 \delta^4 (p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$ Sez. d'urto totale

$\rightarrow$ Rate e sez. d'urto: indipendenti dal volume di normalizzazione

# Quantita' invarianti e non

Si osservi:

$\sigma:$ Sez. d'urto totale = Invariante di Lorentz

Significato classico: Area efficace intercettata dal proiettile

$\rightarrow$ Area: Non dipende dal riferimento (grandezza trasversale)

$\Gamma$: Rate totale di decadimento # Invariante di Lorentz

$\tau = 1/\Gamma:$ Vita media

$\rightarrow$ Vita media: Dipende dal riferimento (v. dilatazione dei tempi)

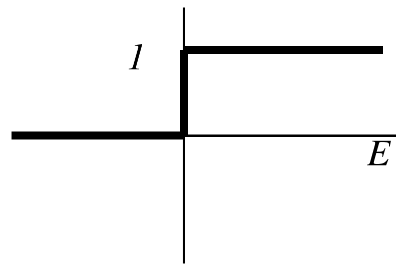
# Spazio delle fasi

Fattore di spazio della fasi:
Calcolato assumendo costante l'elemento di matrice

$$R_n(E) = \int \delta^4 (P - p_1 - p_2 - \ldots - p_n) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \ldots \frac{d^3\mathbf{p}_n}{2E_2}$$

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{2E} = \int d^4 p \vartheta(E) \delta\left(p^2 - m^2\right)$$

$\theta(E)$: funzione a gradino




$$\delta\left[f(x)\right] = \sum_{zeri\ di\ f} \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i}}$$

$$f(x): p^2 - m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2$$

$$zeri: E_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial E}\right|_{E_\pm} = 2E$$

$$\delta\left(p^2 - m^2\right) = \frac{\delta(E - E_+) + \delta(E - E_-)}{2E}$$

$$\int d^4 p \vartheta(E) \delta\left(p^2 - m^2\right) = d^3\mathbf{p} \int dE \vartheta(E) \frac{\delta(E - E_+) + \delta(E - E_-)}{2E} = \frac{d^3\mathbf{p}}{2E}$$

# Spazio delle fasi a 2 corpi - I

$$R_2(E)=\int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{2E_1}\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{2E_2}\delta^4(P-p_1-p_2)=\int \delta^4(P-p_1-p_2)\delta\left[p_1^2-m_1^2\right]\delta\left[p_2^2-m_2^2\right]d^4p_1d^4p_2$$

$$R_2(E)=\int \delta^4(P-p_1-p_2)\delta\left[p_1^2-m_1^2\right]\delta\left[p_2^2-m_2^2\right]d^4p_1d^4p_2$$

$$=\int \delta\left[p_1^2-m_1^2\right]\delta\left[(P-p_1)^2-m_2^2\right]d^4p_1$$

$$\delta\left[(P-p_1)^2-m_2^2\right]=\delta\left[\left(M-E_1^*\right)^2-\boldsymbol{p}_1^{*2}-m_2^2\right]$$ CM della particella madre

$$=\delta\left[\left(M^2+E_1^{*2}-2ME_1^*\right)-\boldsymbol{p}_1^{*2}-m_2^2\right]$$

$$=\delta\left[M^2-2ME_1^*+m_1^2-m_2^2\right]$$

$$R_2(E)=\int \delta\left[p_1^2-m_1^2\right]\delta\left[(P-p_1)^2-m_2^2\right]d^4p_1$$

$$=\int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1^*}{2E_1^*}\delta\left[M^2-2ME_1^*+m_1^2-m_2^2\right]$$

# Spazio delle fasi a 2 corpi - II

$$E^2 = p^2 + m^2 \rightarrow EdE = pdp \rightarrow dp = \frac{E}{p} dE$$

$$d^3\boldsymbol{p} = p^2 dp d\Omega = p^2 \frac{E}{p} dE d\Omega = pEdEd\Omega$$

$$R_2(E) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1^*}{2E_1^*} \delta\left[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2\right] = \int \frac{p_1^* E_1^*}{2E_1^*} \delta\left[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2\right] dE_1^* d\Omega_1^*$$

$$R_2(E) = \frac{1}{2} \int p_1^* \delta\left[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2\right] dE_1^* d\Omega_1^*$$

Solita proprieta' della $\delta$

$$E_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \rightarrow \delta\left[M^2 - 2ME_1^* + m_1^2 - m_2^2\right] = \frac{1}{2M} \delta\left[E_1^* - \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}\right]$$

$$p_1^* = \sqrt{E_1^{*2} - m_1^2} = P^* = \sqrt{\frac{\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4m_1^2 M^2}{4M^2}} = \sqrt{\frac{\left(M^2 - m_1^2 - m_2^2\right)^2}{4M^2}} = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2M}$$

$$\rightarrow R_2(E) = \frac{P^*}{4M} \int d\Omega_1^*$$

# Spazio delle fasi a 2 corpi - III

$$R_2(E) = \frac{P^*}{4M}\int d\Omega_1^*, P^* = P_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = P_2^*$$

$$\rightarrow R_2(E) = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{8M^2}\int d\Omega_1^* = \frac{\pi\left(M^2 + m_1^2 - m_2^2\right)}{2M^2} = \frac{\pi P^*}{2M}$$

$$\frac{dR_2(E)}{d\Omega_1^*} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{8M^2} \rightarrow \frac{dP}{d\Omega_1^*} = \frac{1}{4\pi}$$

Distribuzione angolare

Spazio delle fasi: Fattore statistico, distribuzione angolare uniforme