

Scattering πN a bassa energia: le risonanze

5.1 Lo studio iniziale dell'interazione forte

Accanto alla diffusione elettrone-nucleo, governata dall'interazione elettromagnetica, e' possibile sondare le proprieta' di nuclei e nucleoni studiando le caratteristiche di processi di scattering dominati dall'interazione forte. Si usano quindi come proiettili e bersagli protoni, deutoni, nuclei.

Storicamente, anzi, questo e' stato il primo mezzo di indagine utilizzato in pratica, reso possibile dalla costruzione dei primi acceleratori: per ragioni di sviluppo tecnologico piu' rapido, le prime macchine acceleratrici di energia relativamente alta (centinaia di MeV) erano *sincrociclotroni*, capaci di accelerare protoni, deutoni o nuclei leggeri, ma non elettroni. Le macchine per elettroni di energia simile (*betatron*) sono intrinsecamente difficili da utilizzare per esperimenti in coincidenza.

Tutte queste particelle cariche (e stabili) sono capaci di interagire fortemente (il nome comune a tutte le particelle che sentono l'interazione forte e' *adroni*), quindi lo studio dei processi d'urto che le coinvolgono fornisce informazioni sulle proprieta' dell'interazione forte.

5.2 Proprieta' fondamentali dell'interazione forte

Come si ricordera', le proprieta' piu' importanti sono le seguenti:

- Elevata intensita'

L'energia di legame dei nucleoni nel nucleo (8 MeV in media) richiede forze molto intense fra i nucleoni per essere spiegata ($\approx 10-20$ volte le forze elettriche fra le stesse particelle)

- Corto raggio di azione

Le dimensioni dei nuclei sono ≈ 1 fermi

- Indipendenza dalla carica elettrica

Livelli energetici dei nuclei speculari \rightarrow forza pp \approx forza pn \approx forza nn

Occorre dire subito che le interazioni forti fra nucleoni, o fra adroni in genere, vengono oggi interpretate come dovute ad un'interazione *residua* (non veramente fondamentale, della quale sono solo le vestigia), alla stessa stregua delle interazioni fra atomi e molecole *neutre* (forze di van der Waals), pur essendo dovute esclusivamente all'interazione elettromagnetica, ne sono solo il residuo: questo avviene perche' oggi pensiamo che gli adroni siano singoletti di colore (ossia,

stati a colore netto nullo), quindi incapaci di interagire attraverso le forze di colore, che sono la vera interazione fondamentale, se non nella misura in cui esse si manifestano, appunto in qualche forma residua, anche fra stati "neutri".

E' utile ricordare che l'indipendenza dalla carica porta a introdurre una nuova proprieta' delle particelle a interazione forte, ossia l'*isospin*. In base a questa proprieta', le particelle vengono raccolte in *multipletti*, i componenti dei quali hanno proprieta' simili (inclusa la massa) e diversa carica elettrica. Come e' noto, Yukawa (1935) fece l'ipotesi che, in analogia all'interazione elettromagnetica - in cui la forza fra cariche e' dovuta allo scambio di fotoni virtuali, l'interazione fra due nucleoni fosse dovuta allo scambio di una nuova particella virtuale. Le principali differenze fra la particella prevista e il fotone sono:

- *massa a riposo* $\neq 0$
questo ha a che fare con il range limitato
- *spin* $\neq 1$
questo ha a che fare con l'interazione, solo attrattiva, fra particelle identiche
- carica sia $\neq 0$, sia $= 0$
questo ha a che fare con l'esistenza di interazioni (forti) uguali fra coppie di nucleoni di carica uguale e diversa (*pp*, *nn*, *pn*)

Giustificazione delle affermazioni precedenti

Spin pari e dispari

Lo scambio di particelle virtuali a spin pari (0,2,..) da' luogo solo a forze attrattive, sia fra coppie di particelle identiche, sia fra coppie particella/antiparticella; quello di particelle a spin dispari (1,3,..) a forze repulsive fra particelle identiche, attrattive fra particella e antiparticella. Questo e' un risultato generale della teoria dei campi

Massa a riposo e range

Il potenziale scalare (p.es. coulombiano) e' la componente temporale del 4-potenziale elettromagnetico A^μ , ciascuna componente del quale soddisfa separatamente l'eq. delle onde.

$$\square A^\mu = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = -j^\mu$$

Si noti come ϕ sia un 3-scalare, ma non un 4-scalare. L'assenza di un termine di massa nell'equazione si traduce, come e' noto, nel range infinito dell'interazione e.m.; questo e' equivalente, dopo la quantizzazione, all'assenza di massa a riposo per il fotone. L'eq. per la componente tempo (potenziale scalare) e' allora:

$$\square\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = -\rho$$

Si consideri l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Essa e' un caso particolare (statico) dell'eq. delle onde per il potenziale scalare. La soluzione per una carica puntiforme (la funzione di Green) e' ben conosciuta:

$$\rho(r) = e\delta(r) \rightarrow \varphi(r) = \frac{e}{r} \quad \text{potenziale coulombiano}$$

Invece dell'equazione per il potenziale A^μ , si puo' considerare quella per un campo che sia un 4-scalare (v. equazione di Klein-Gordon), che si scrive:

$$(\square - m^2)\chi = -\gamma$$

dove γ (invariante di Lorentz) rappresenta il termine di sorgente per il campo, analogamente a j_μ per A^μ .

Considerando al solito il caso statico si ha:

$$\gamma(r) = g\delta(r) \rightarrow \chi = \frac{g}{r} e^{-mr}$$

Quindi χ e' una generalizzazione del potenziale Coulombiano, che si presenta come il caso limite per m che va a 0. E' evidente che il potenziale di Yukawa ha un range finito (smorzamento esponenziale per $r > > 1/m$), legato al valore della massa m .

Così come il fotone e' l'eccitazione elementare (a massa nulla) del campo elettromagnetico quantizzato, la quantizzazione del nuovo, ipotetico campo di Yukawa fa emergere una struttura particellare, fatta di quanti con massa diversa da zero, il cui scambio fra nucleoni da' luogo all'interazione forte. In linea con l'osservazione fatta piu' sopra, ci aspettiamo che la particella scambiata fra nucleoni debba avere spin pari, per generare sempre interazione attrattiva; il modello piu' semplice e' quindi quello con spin 0, come descritto appunto dall'eq. di Klein-Gordon.

La particella predetta da Yukawa nel 1935 fu effettivamente trovata nella radiazione cosmica una decina di anni dopo, e fu chiamata *mesone π* . Subito dopo, essa fu osservata essere abbondantemente prodotta nelle interazioni fra i protoni accelerati dai sincrociclotroni (a Chicago e Berkeley). L'esistenza del π in 3 distinti stati di carica porta ad assegnargli un valore di isospin uguale a 1 (particella *isovettoriale* - ossia, tripletto).

Le proprietà principali del pione sono:

massa: circa 135-139 MeV (neutro-carico)

carica: +va, -va, nulla

spin: 0

isospin: 1

decadimenti:

carico - stabile rispetto a interazioni forti; decade debolmente

neutro - stabile rispetto a interazione forte; decade elettromagneticamente

La spiegazione della stabilità rispetto ai decadimenti forti è molto semplice: non ci sono altri adroni con massa più piccola! Per una buona descrizione delle esperienze che condussero alla determinazione delle proprietà sopra citate, inclusi i lavori originali, si rinvia p.es. al testo di Cahn-Goldhaber.

L'interpretazione del π come mediatore della interazione forte fra nucleoni, unita alla sua relativa stabilità (leggi: vita media lunga, che consente di costruire *fasci di π* carichi di energia elevata agli acceleratori), suggerisce immediatamente la possibilità di utilizzarlo come *sonda* per studiare le proprietà dell'interazione forte: così come lo studio dello scattering γN (o eN) dà informazione sulla struttura elettromagnetica di nuclei e nucleoni, quello dello scattering πN dà informazioni sulla loro struttura forte.

5.3 Scattering πN ; risonanze

Lo studio sperimentale dello scattering πN riserva numerose sorprese. La più importante è l'andamento della sezione d'urto totale vs. l'energia: in figura è rappresentato sia per il π^+ , sia per il π^- .

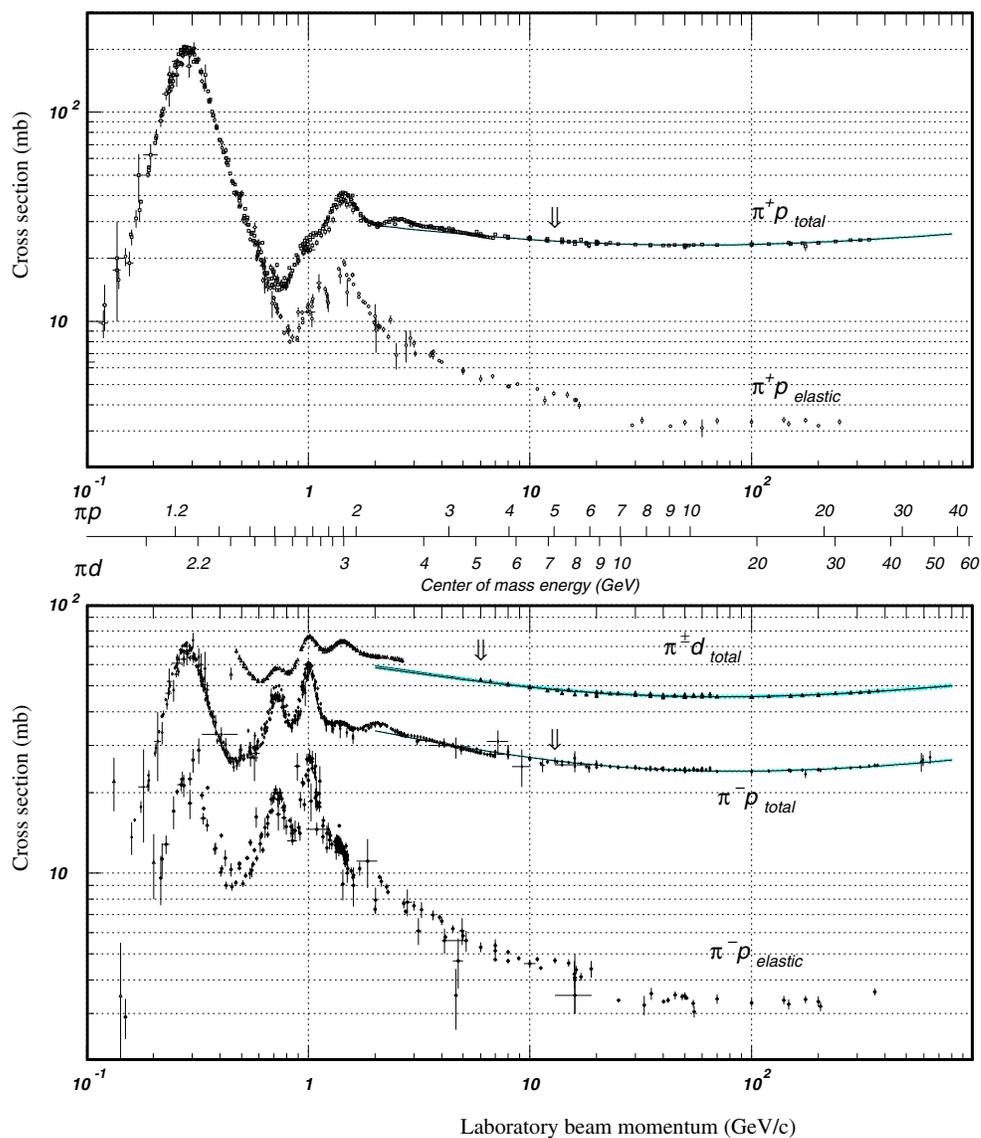


Figure 39.14: Total and elastic cross sections for $\pi^\pm p$ and $\pi^\pm d$ (total only) collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding computer-readable data files may be found at <http://pdg.lbl.gov/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS Group, IHEP, Protvino, Russia, August 2001.)

Come si vede facilmente, la sezione d'urto totale presenta una ricca struttura, totalmente inaspettata a priori. I picchi osservati nella sezione d'urto totale in corrispondenza di particolari valori per l'energia totale nel CM sono interpretati come *stati risonanti* (v. note sulla teoria dello scattering). In sostanza, uno stato risonante, pur non facendo parte della famiglia degli stati legati del sistema fisico considerato, ha alcune caratteristiche abbastanza simili: vita media relativamente

"lunga", distribuzione spaziale dei componenti relativamente "delimitata", eventualmente diversi modi di decadimento in competizione. E' anche possibile assegnare allo stato risonante dei numeri quantici come si fa per una particella stabile (massa a riposo, vita media, momento angolare, parita', etc). Nel caso delle risonanze nello scattering πN , le principali differenze con eventuali stati legati consistono nella vita media molto breve e nella massa a riposo $>$ della somma delle masse dei componenti. Si puo' osservare come la larghezza del picco risonante sia elevata (in senso lato, dello stesso ordine dell'energia di picco !): ora, la larghezza del picco e' una misura dell'incertezza sul valore centrale della energia di risonanza. In base alla relazione di indeterminazione tempo-energia, $\Delta E \Delta t \geq 1$, una larghezza elevata corrisponde a una vita media breve, quindi ad una elevata probabilita' di decadimento per unita' di tempo.

La relazione di indeterminazione tempo-energia

Vale forse la pena di insistere un po' sull'argomento: la relazione di indeterminazione posizione-momento mette a confronto le incertezze sulla conoscenza dei possibili valori di due operatori hermitiani; quella tempo-energia, viceversa, collega le incertezze fra la conoscenza del valore dell'operatore hamiltoniano e di quello del parametro durata della misura (o del sistema).

Questa relazione e' gia' presente nella fisica ondulatoria classica: per un pacchetto d'onde, piu' breve e' il tempo di misura, piu' grande e' l'incertezza sulla banda di frequenze che compongono il pacchetto. Poiche' le energie, per un sistema quantistico, sono proporzionali alle frequenze, un sistema instabile con vita media breve presentera' un'elevata indeterminazione sull'energia posseduta (sara' cioe' in uno stato che contiene componenti ad energia anche molto diversa).

Il fenomeno della risonanza in meccanica quantistica e' assai rilevante, non solo nelle applicazioni in fisica delle particelle, e fornisce un'illustrazione diretta di quanto detto sopra.

Si consideri uno stato stazionario, descritto da una funzione d'onda del tipo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-iE_0 t}$$

La trasformata di Fourier di ψ , fatta rispetto alla variabile tempo, fornisce l'ampiezza di probabilita' per l'energia dello stato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE_0 t} e^{iEt} dt = \delta(E - E_0)$$

Coerentemente con cio' che ci attendiamo per uno stato stazionario, l'energia ha valore definito.

Possiamo pero' considerare uno stato piu' generale di quello visto prima, nel quale attribuiamo ad E un valore *complesso* (ossia, che oltre ad avere una parte reale ha anche una parte immaginaria). Uno stato cosi' fatto sarebbe un

autostato di un hamiltoniano non hermitiano, e quindi presenterebbe (almeno) un problema di interpretazione: tuttavia, il significato fisico puo' essere compreso facilmente separando in E parte reale e immaginaria:

$$e^{-iEt} = e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} = e^{-iE_0t} e^{-\Gamma t}, \quad t > 0$$

Evidentemente, la norma di questo stato non e' costante nel tempo, anzi decresce esponenzialmente. Lo stato e' quindi non stazionario, con andamento esponenziale nel tempo e *vita media* = $1/\Gamma$. Vale la pena di ricordare che, per una distribuzione esponenziale delle durate di uno stato, ci si aspetta uno scarto quadratico medio (un'incertezza statistica, cioe') uguale alla vita media $1/\Gamma$: data la natura statistica del processo di smorzamento, la vita media e' quindi una misura dell'*indeterminazione* nella misura del tempo.

[Il nostro modo di descriverlo e' certamente incompleto: tanto per fare un esempio, l'energia associata allo stato non si conserva! Questa osservazione suggerisce una possibile soluzione al nostro problema di interpretazione: un Hamiltoniano non hermitiano, come quello definito sopra, fornisce la descrizione di un sistema *non isolato*: quindi e' per sua natura solo una parte dell'Hamiltoniano totale, che deve contenere anche la descrizione dell'assorbimento dell'energia perduta. Se nondimeno ignoriamo questo problema per un momento,] possiamo calcolare la trasformata di Fourier di ψ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} e^{iEt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} dt = -\frac{1}{E_0 - E - i\Gamma} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma}$$

L'ampiezza per trovare il sistema con energia E e' ora una funzione dell'energia stessa, che non e' piu' definita. La probabilita' = |ampiezza|^2 e' la curva di *Breit-Wigner*; essa ha larghezza uguale a Γ , che si vede assumere il significato di *indeterminazione dell'energia* nello stato. E' immediato osservare che:

$$\text{indeterminazione energia} * \text{indeterminazione tempo} = \Gamma * \frac{1}{\Gamma} = 1$$

che e' la relazione di indeterminazione tempo-energia

5.4 Risonanze in formazione: analisi angolare

Consideriamo lo sviluppo in onde parziali dell'ampiezza di scattering πp . Malgrado il processo sia in realta' una reazione a due corpi, e a livello fondamentale debba essere descritta con il formalismo della teoria dei campi, possiamo, "fenomenologicamente", utilizzare lo sviluppo in onde parziali introdotto per descrivere lo scattering da potenziale: usiamo cioe' consapevolmente un modello del processo reale, nel quale una particella fittizia, con massa uguale alla massa ridotta di π e p , viene diffusa da un potenziale fittizio, cui in generale richiediamo di riprodurre le caratteristiche principali dell'interazione forte (range limitato,

intensita', etc). La presenza del protone (particella a spin $\frac{1}{2}$) complica un po' il quadro: invece del solo momento angolare orbitale, dobbiamo prendere in considerazione il momento angolare totale del sistema, $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. Prendendo solo i valori piu' bassi del momento angolare orbitale, $l=0,1$:

$$J = 1/2 \oplus 0 \oplus l = 1/2 \oplus l = \begin{cases} 1/2 & \text{onda S} \\ 1/2, 3/2 & \text{onda P} \end{cases}$$

Perche' solo onde S e P

Questa approssimazione si fonda sulla seguente osservazione: il range R della interazione forte e' $R \approx 1/m$; l'ordine delle onde interessate e' dato da $l = kR \approx k/m$. Per le risonanze a bassa energia, $k \approx m$, quindi $l \leq 1$, quindi solo onde S, P

Ogni onda parziale (valore di l fissato) dello sviluppo in serie dell'ampiezza di scattering si scinde in 2 onde distinte, una con $J=l+1/2$ e una con $J=l-1/2$. Per $l=0$ (onda S) abbiamo solo $J=1/2$; per $l=1$ (onda P) abbiamo $J=1/2, J=3/2$.

Se l'interazione e' centrale, lo stato di scattering puo' essere scomposto in stati a momento angolare totale definito, ossia $J=1/2, 3/2$. Quindi, lo sviluppo che si scriveva nel caso senza spin

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(a_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

diventa

$$\begin{aligned} f(\theta) &= g(\theta) + h(\theta) \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1)] P_l^0(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^+ - a_l^-) P_l^1(\cos \theta) \end{aligned}$$

Spiegazione di questa formula

Riprendendo la descrizione del processo tramite il concetto di stato (stazionario) di scattering, dobbiamo introdurre la descrizione dello spin del nucleone: se consideriamo che la componente dello spin lungo la direzione di moto sia $+1/2$ possiamo scrivere per la parte onda piana dello stato di scattering:

$$e^{ikz} \underbrace{\chi_{1/2}^{+1/2}}_{\text{autostato di spin}}$$

La parte onda sferica puo' essere scritta come somma di termini, contenenti ciascuno fattori del tipo:

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2}$$

(perche' la componente z di J coincide con quella di s , ed e' conservata). Ora, il termine generico della somma si puo' scrivere come sovrapposizione di stati a momento angolare totale definito

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} y_{l-1/2}^{+1/2}$$

dove le autofunzioni y del mom. angolare totale J sono date (usando semplicemente i coefficienti di Clebsch-Gordan opportuni) da:

$$y_{l+1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2} + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{1/2}^{-1/2}$$

$$y_{l-1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{1/2}^{-1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2}$$

Quindi la parte diffusa della funzione d'onda dello stato di scattering puo' scriversi:

$$\psi_{scatt} = \frac{e^{ikr}}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos\theta) \chi_{1/2}^{+1/2} \\ + (a_l^+ - a_l^-) P_l^{+1}(\cos\theta) e^{i\varphi} \chi_{1/2}^{-1/2}$$

Volendo ora ricavare un'espressione per l'ampiezza di scattering, ci accorgiamo che in realta' ci sono 2 ampiezze distinte: la prima corrisponde a un'onda uscente in cui lo spin del protone e' rimasto invariato; la seconda, invece, corrisponde a un'onda uscente in cui si e' avuto 'spin-flip' (ossia in cui la componente z dello spin ha cambiato segno). Si ritrova cosi' la formula citata. Nel caso lo spin del protone avesse componente z uguale a $-1/2$ il risultato per le ampiezze di scattering sarebbe identico.

Poiche' le autofunzioni di spin sono ortogonali, la sezione d'urto differenziale e' data semplicemente da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2$$

Essendo:

$$\begin{aligned}P_0^0 &= 1 \\P_1^0 &= \cos \theta \\P_1^{+1} &= -\sin \theta\end{aligned}$$

troviamo, sostituendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| (a_0^+ - 1) + [2(a_1^+ - 1) + (a_1^- - 1)] \cos \theta \right|^2 + \left| (a_1^+ - a_1^-) (-\sin \theta) \right|^2$$

che si può riscrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos^2 \theta)$$

La sezione d'urto differenziale teste' trovata e' naturalmente una funzione dell'energia totale nel CM della collisione, la dipendenza essendo dovuta al fattore $1/k^2$ e a quella dei coefficienti A_i . E' interessante vedere cosa succede ai coefficienti A_i se ci avviciniamo a $E_{CM}=1230$ MeV (energia corrispondente al picco di risonanza): si trova sperimentalmente che essi valgono circa 1, 0, 3, ossia

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

Questa e' la distribuzione angolare attesa per il decadimento di uno stato a spin 3/2 in due particelle a spin 0 e $\frac{1}{2}$ (il π e il protone, appunto)

Giustificazione dell'affermazione precedente

Consideriamo uno stato a spin 3/2 che decade nel modo specificato sopra; supponiamo che la componente z di J sia $+1/2$ m (se e' $-1/2$, il risultato finale non cambia; non puo' essere $+0-3/2$, perche' il momento angolare orbitale ha componente nulla lungo la direzione di moto). Allora potremo scrivere:

$$|3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle Y_1^{+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, +1/2\rangle Y_1^0$$

Poiche' le autofunzioni di spin sono ortogonali, i 2 termini non interferiscono. Quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{3} |Y_1^{+1}|^2 + \frac{2}{3} |Y_1^0|^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cos^2 \theta \propto 1 + 3 \cos^2 \theta$$

Lo stato risonante osservato, chiamato Δ^{**} , puo' essere considerato uno stato eccitato del nucleone, e la sua esistenza e' uno dei primi indizi che il nucleone non e' un oggetto elementare, ma e' dotato di una struttura interna

5.5 Analisi di isospin

Lo stato risonante, a carica 2, trovato nello scattering π^+p , si trova anche negli stati di carica 1, 0 e -1 (scattering π^+n, π^-p, π^-n) con le stesse proprieta'. Viene quindi naturale assegnargli un numero quantico di isospin uguale a 3/2; nel loro insieme, i 4 stati Δ costituiscono quindi un nuovo multipletto di isospin (quartetto). Poiche' si suppone che l'interazione forte conservi l'isospin, e' interessante cercare gli stati a isospin totale (e componente z) definiti per il sistema πp : questo consentira' di confrontare le sezioni d'urto totali per i diversi processi. Abbiamo allora, ricordando che gli stati di isospin si comportano come quelli di momento angolare:

$$I_N = 1/2 ; |p\rangle = |1/2, +1/2\rangle , |n\rangle = |1/2, -1/2\rangle$$

$$I_\pi = 1 ; |\pi^+\rangle = |1, +1\rangle , |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle , |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = |1, -1, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle$$

$$|\pi^+ n\rangle = |1, +1, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, +1/2\rangle$$

$$|\pi^+ p\rangle = |1, +1, 1/2, +1/2\rangle = |3/2, +3/2\rangle$$

$$|\pi^- n\rangle = |1, -1, 1/2, -1/2\rangle = |3/2, -3/2\rangle$$

$$|\pi^0 p\rangle = |1, 0, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, +1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, +1/2\rangle$$

$$|\pi^0 n\rangle = |1, 0, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle$$

Se ora consideriamo una coppia qualsiasi di reazioni $\pi N \rightarrow \pi N$, la conservazione dell'isospin totale fornisce previsioni non banali sul rapporto delle rispettive sezioni d'urto: infatti, la conservazione dell'isospin totale implica che in questo caso

ci siano solo 2 sezioni ampiezze fondamentali diverse, quella per $I=3/2$ e quella per $I=1/2$

Esempio:

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow A_A = A_B = A_{3/2} \quad \text{stati puri di isospin } 3/2$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow A_A = \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2}, A_B = A_{3/2}$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{cases} \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \frac{1}{3} A_{3/2} - \frac{2}{3} A_{1/2}$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{cases} \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \sqrt{\frac{2}{9}} A_{3/2} - \sqrt{\frac{2}{9}} A_{1/2}$$

Assumendo $A_{3/2} \gg A_{1/2}$ si ottiene

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \frac{1}{9} \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{cases} \rightarrow \sigma_A = 9 \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \frac{9}{2} \sigma_B$$

in ottimo accordo con i dati sperimentali.

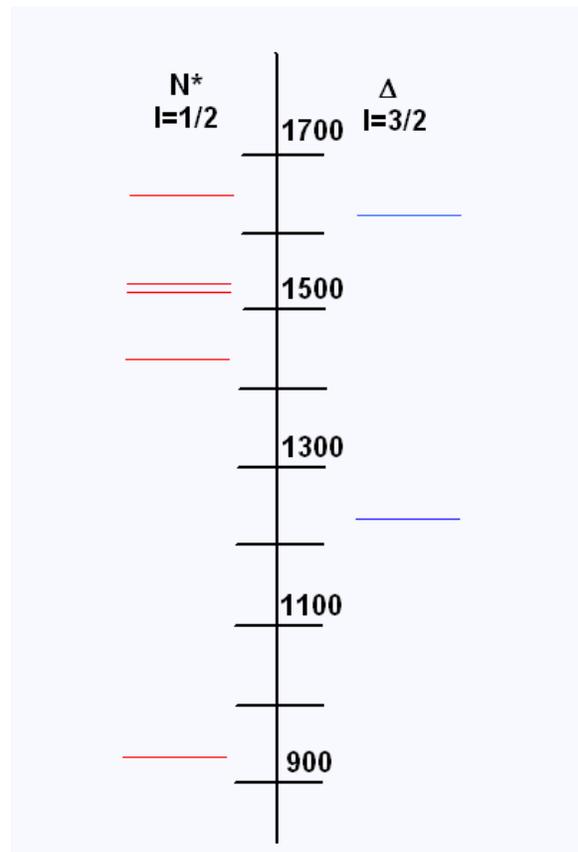
5.6 Risonanze barioniche

In generale, la sezione d'urto totale πp vs l'energia mostra strutture extra nei confronti di quella $\pi^+ p$, come ci si attende visto che ad essa contribuisce l'ampiezza per $I=1/2$ che nella prima non compare. Il confronto fra le 2 permette di assegnare un valore di isospin alle risonanze osservate, che vengono così raggruppate in due famiglie:

- stati a $I=1/2$ (parenti stretti del nucleone, almeno per ciò che riguarda l'isospin)

- stati a $I=3/2$ (parenti un po' meno stretti)

Uno schema semplificato, volutamente simile agli schemi dei livelli atomici e' mostrato nella figura che segue:



Come dovrebbe ormai risultare chiaro, l'analisi in momento angolare e in isospin porta a raggruppare le risonanze barioniche (con numero barionico =1) in multipletti, costituiti da doppietti ($I=1/2$) o quartetti ($I=3/2$) di stati, ognuno caratterizzato da un certo valore di momento angolare.

5.7 Risonanze in produzione

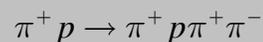
L'analisi sommariamente descritta si riferisce ad un tipo particolare di esperimenti, nei quali si dice che la risonanza viene eccitata "in formazione", o anche "nel canale s ". Il significato di questa espressione sta nel fatto che l'osservazione della risonanza si effettua variando l'en. totale nel CM (si ricordi che $s=E_{CM}^2$) attraverso un range di valori ("spazzolando" E_{CM} attraverso la risonanza), e misurando ogni volta la sezione d'urto totale (oltre eventualmente ad altre quantita'); per esempio, quando $E_{CM}=M_R$ si e' sul picco.

Questo non e' l'unica procedura possibile: quando si hanno a disposizione fasci di energia elevata e' in realta' spesso vantaggioso fare avvenire collisioni con $E_{CM} > ($ o anche $\gg) M_R$, nelle quali viene prodotta una varieta' di stati finali contenenti anche altre particelle, oltre a, o invece di quelle incidenti. La risonanza viene quindi studiata "in produzione", selezionando gli stati finali che contengono i prodotti di decadimento della risonanza stessa (che ha invariabilmente vita media molto breve, tale da rendere impossibile la sua rivelazione diretta nella collisione). In questo caso, dunque, E_{CM} viene mantenuta fissa.

E' interessante accennare a come si puo' mettere in evidenza la produzione di stati risonanti in questo caso: come detto sopra, la risonanza decade molto rapidamente in uno stato finale, che l'esperimento cerca di identificare. P.es., se si studia la Δ^{++} in produzione, si cercheranno collisioni che contengano nello stato finale $1 \pi^+ + 1 p$, oltre ad eventualmente altre particelle. Se si conoscono masse e 3-impulsi del π^+ e del protone, si calcola, collisione per collisione, la massa invariante dei 2, e se ne fa la distribuzione statistica su tutto il campione di eventi selezionato: la produzione di Δ^{++} si evidenzia, anche qui, come un picco nella distribuzione stessa. L'idea e' quindi in realta' molto semplice: la massa dello stato risonante e' una caratteristica invariante dello stato stesso, quindi deve essere uguale prima e dopo il decadimento; in altre parole, i prodotti del decadimento conservano, nelle loro caratteristiche cinematiche, il ricordo della provenienza da uno stato "madre" di una data massa.

Esempio: risonanza Δ^{++} in produzione

Consideriamo la reazione



Essa avviene a energie del π^+ incidente sufficientemente elevate (ossia, quando $E_{CM} > m_p + 3m_{\pi}$). Idealmente, si puo' pensare di misurare i 3-impulsi di tutte e 4 le particelle cariche dello stato finale (p.es., con uno spettrometro magnetico), e al tempo stesso di poterle identificare (ossia, dire quale e' un π , quale un p). In questo caso e' possibile costruire le 2 masse invarianti:

$$m_{p\pi_1}^2 = \left(\underset{4\text{-vettore}}{\underline{p}_p + p_{\pi_1}} \right)^2 = \left(\underset{comp.tempo}{E_p + E_{\pi_1}} \right)^2 - \left(\underset{comp.spazio}{\underline{\mathbf{p}}_p + \underline{\mathbf{p}}_{\pi_1}} \right)^2$$

$$m_{p\pi_2}^2 = (p_p + p_{\pi_2})^2 = (E_p + E_{\pi_1})^2 - (\underline{\mathbf{p}}_p + \underline{\mathbf{p}}_{\pi_2})^2$$

In generale, uno stato finale a 4 corpi ha (fissate le 4 masse) $3 \cdot 4 = 12$ grandezze cinematiche che lo descrivono. La conservazione del 4-impulso impone 4 vincoli, quindi restano $12 - 4 = 8$ gradi di liberta' cinematici, che possono essere scelti come 8 fra le 12 componenti dei 3-impulsi, o (di solito

piu' utilmente) come 8 funzioni di esse: per esempio, come le 2 masse invarianti definite sopra + altre 6 variabili. In questo caso, quindi, lo spazio delle fasi dello stato finale ha dimensione 8. Come si ricordera', se non ci sono effetti dinamici, la distribuzione degli eventi nello spazio delle fasi e' puramente statistica, e risulta in una certa forma per la distribuzione di frequenza delle variabili scelte. Ora, la presenza di uno stato risonante e' evidentemente un effetto dinamico: dipende dall'andamento degli sfasamenti, che dipende dal "potenziale", o da chi ne fa le veci. Quindi, ci si aspetta un aumento nella frequenza degli eventi prodotti, rispetto allo "spazio delle fasi", quando una delle due masse invarianti e' vicina al valore di picco della risonanza Δ^{++} . Questo e' esattamente cio' che si osserva, come si puo' vedere:

3

QUASI-TWO-BODY PRODUCTION...

39

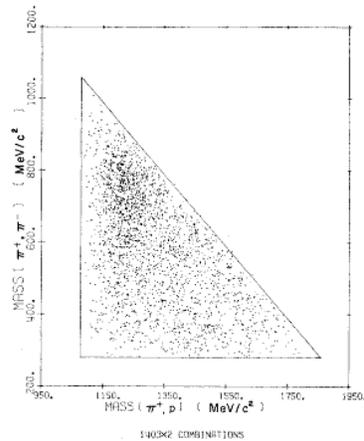


FIG. 1. Two-pion, proton-pion invariant-mass scatterplot for the reaction $\pi^+p \rightarrow \pi^+\rho^+\pi^-$. The boundary curve represents the kinematic limit for events produced by a 1.95-GeV/c momentum beam.

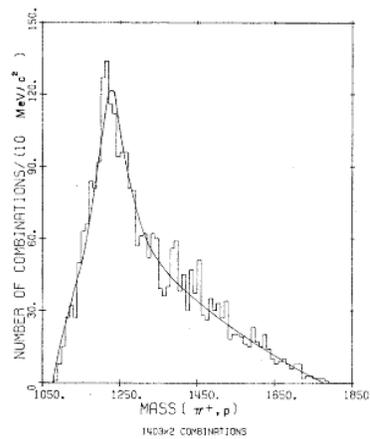


FIG. 3. Proton-pion invariant-mass distribution from the reaction $\pi^+p \rightarrow \pi^+\rho^+\pi^-$. The curve is the best fit to Δ^{++} resonance, ρ^0 reflection, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

tions. The curves were constrained to be proportioned identically because the two histograms were simultaneously least-squares fitted.

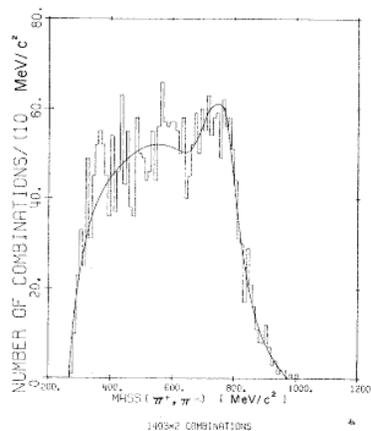


FIG. 2. Two-pion invariant-mass distribution from the reaction $\pi^+p \rightarrow \pi^+\rho^+\pi^-$. The fitted curve is composed of ρ^0 resonance, Δ^{++} reflections, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

The four functional forms for the hypothesized reactions were obtained by a Monte Carlo generation and contain no production dynamics. The fits to the two distributions are of suitable quality, exhibiting χ^2 values of 111 and 176 with 90 degrees of freedom in Figs. 2 and 3, respectively.

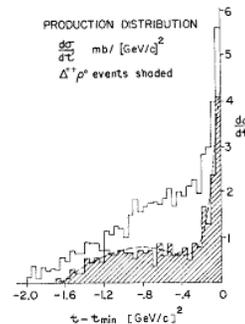


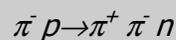
FIG. 4. Two-pion, proton-pion production distribution for $\pi^+p \rightarrow \pi^+\rho^+\pi^-$ events. All combinations appear in the unshaded graph and only those selected as $\Delta^+\rho^0$ appear in the shaded plot. 524 events are contained within the shaded histogram of which 46 have a combinatorial ambiguity and are plotted twice with 0.5 weight. The curve is an exponential-plus-background fit which is described in the text.

5.8 Risonanze mesoniche

Questo procedimento puo' naturalmente essere esteso a qualunque coppia (o tripletta, o...) di particelle identificate e misurate nello stato finale: la ricerca e lo studio delle risonanze (da taluni chiamato familiarmente "piccolologia") puo' quindi estendersi anche a stati con $B=0$ (risonanze mesoniche). La maggior parte di essi e' stata appunto scoperta e studiata in esperimenti in produzione (tipicamente, in collisioni πN o $p N$ a energie di qualche GeV nel CM). Lo studio e la determinazione dei numeri quantici delle risonanze, mesoniche e barioniche, ha costituito la gran parte dell'attivita' sperimentale agli acceleratori negli anni '60

Esempio: analisi in spin-parita' della ρ

La risonanza mesonica ρ viene facilmente osservata in reazioni come questa:



in cui il pione incidente ha un impulso di alcuni GeV .

Ci si attende la produzione di risonanze, sia di tipo barionico ($n\pi^+$, $n\pi^-$) sia nel canale mesonico ($\pi^+\pi^-$). Un tipico spettro di massa osservato in esperimenti di questo tipo e' mostrato nella figura:

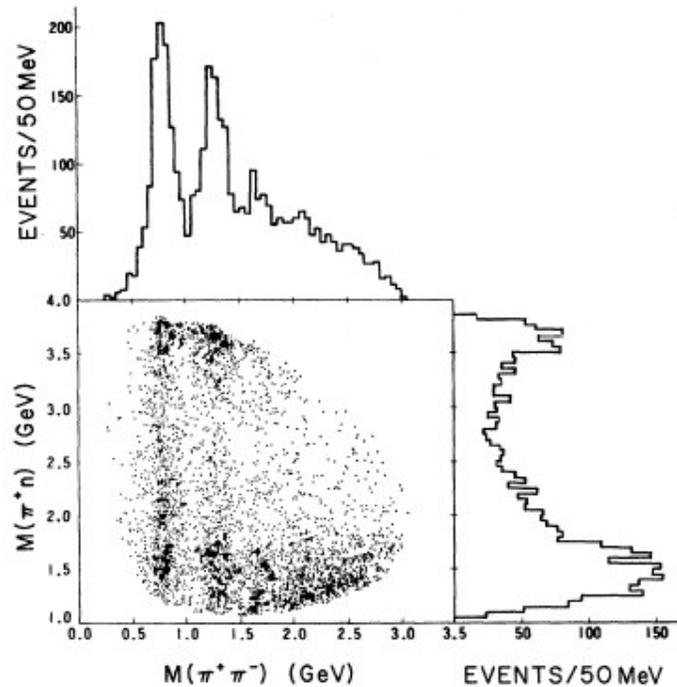


FIG. 2. Scatter plot of $M(\pi^+\pi^-)$ versus $M(\pi^+n)$ with the projections on both axes.

Quello che si vede e' il Dalitz plot di $M(\pi^+\pi^-)$ vs $M(n\pi^+)$, e le sue proiezioni: e' evidente la presenza di picchi assai intensi in corrispondenza della massa della Δ^+ , e a valori di $M(\pi^+\pi^-)$ attorno a 750 e 1250 MeV. Questi picchi rappresentano un primo segnale della produzione di risonanze nelle collisioni. E' evidente l'interesse a determinare quali siano i numeri quantici degli stati risonanti, al fine di costruire un quadro spettroscopico complessivo per gli adroni.

Il mesone ρ e' soggetto a decadimento in 2π tramite l'interazione forte, quindi con tempi molto brevi, dell'ordine di 10^{-23} s, consistentemente con la sua larghezza di circa 120 MeV. Per determinare il momento angolare della ρ , si puo' confrontare la distribuzione angolare dei suoi prodotti di decadimento con quella prevista per uno stato di momento angolare dato: la difficoltà risiede nel modo con cui la distribuzione angolare viene misurata. In generale, se ci si pone nel CM dello stato che decade in 2 corpi la distribuzione angolare dei prodotti di decadimento dipende dallo stato di spin della particella madre: si puo' dimostrare che la distribuzione e' isotropa se la particella madre e' a spin 0 (ovvio), oppure se e' totalmente *non polarizzata* (ossia, se tutti i sottostati con diversi valori di J_z sono popolati uniformemente nella produzione).

Quest'ultimo risultato si puo' giustificare cosi': si consideri il decadimento in 2 corpi $A \rightarrow B+C$. Se lo spin di A e' J , e quello di B e C e' 0, si ha per la conservazione del momento angolare:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}$$

e della parita':

$$\eta_p^{(A)} = \eta_p^{(B)} \eta_p^{(C)} (-1)^l$$

Si avra' allora per l'ampiezza di decadimento del generico sottostato magnetico in cui si puo' trovare la particella madre:

$$|JM\rangle = |lm\rangle \rightarrow A(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$$

ammesso che la conservazione della parita' lo consenta. Per il nostro caso particolare deve essere

$$\eta_p^{(A)} = (-1)^l$$

$$\eta_c^{(A)} = (-1)^l$$

Se tutti i sottostati sono ugualmente popolati, la probabilita' statistica di ogni singolo sottostato e' $1/(2J+1)$. Quindi, la distribuzione angolare viene:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta, \varphi)$$

Ricordando la proprieta' delle armoniche sferiche

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m Y_l^{*m} = \frac{2l+1}{4\pi}$$

si ha appunto che

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \frac{2J+1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

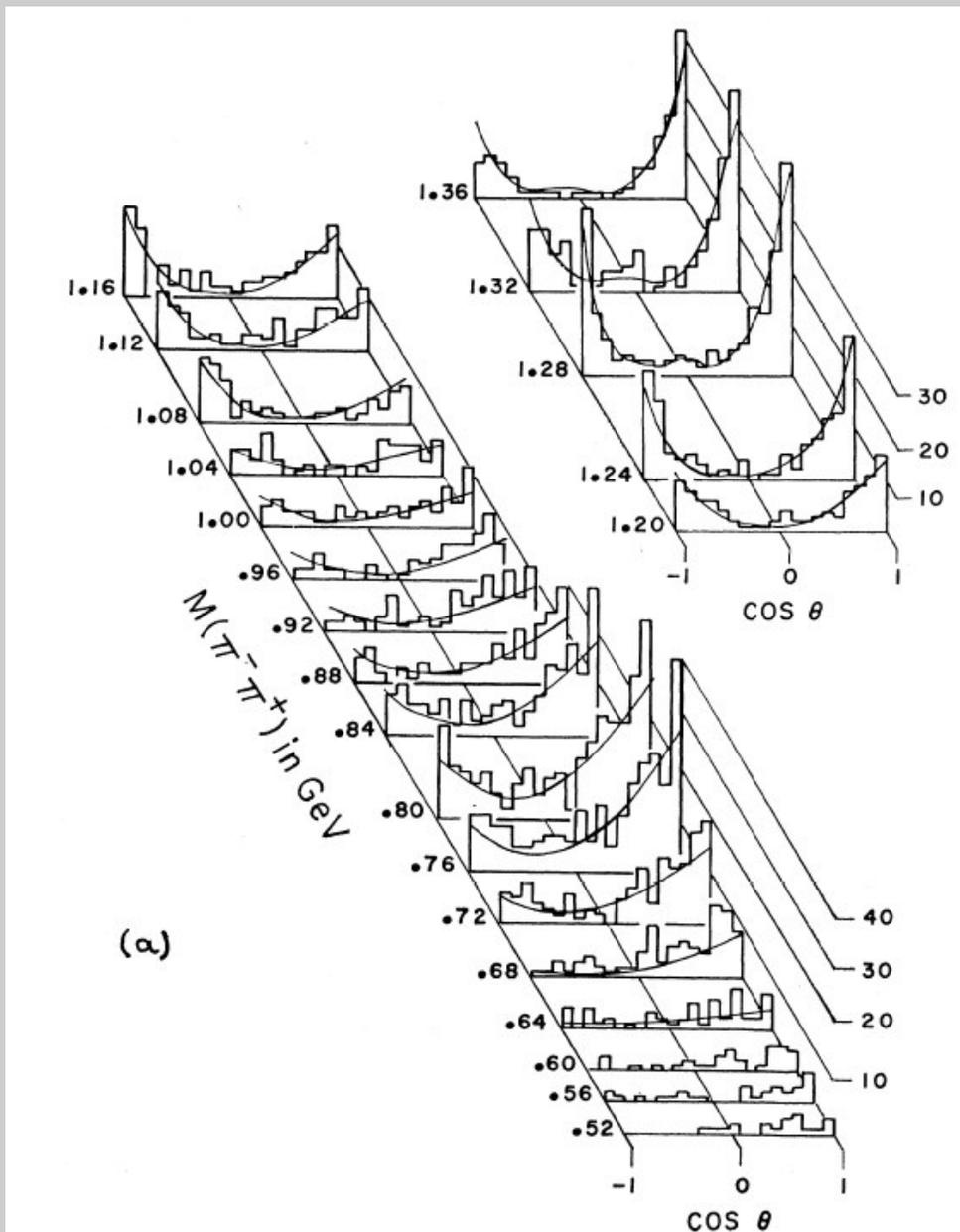
Quindi, per osservare una distribuzione angolare non isotropa occorre che la ρ sia prodotta con qualche tipo di polarizzazione (ossia, con qualche disuniformita' nella popolazione dei sottostati magnetici). Questo e' in effetti cio' che avviene, perche', essendo il processo di produzione governato dalla interazione forte, che conserva la parita', la polarizzazione longitudinale non e' permessa

Questo si puo' vedere nel seguente modo: sia \mathbf{J} lo spin della ρ . Esso e' un vettore assiale, con il quale e' immediato costruire le seguenti quantita':

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_\rho \quad \propto \text{proiezione longitudinale di } \mathbf{J} \rightarrow \text{pseudoscalare}$$

$$\mathbf{J} \cdot \underbrace{(\mathbf{p}_{\vec{n}_{inc}} \times \mathbf{p}_\rho)}_{\text{pseudovettore}} \quad \propto \text{proiezione trasversale di } \mathbf{J} \rightarrow \text{scalare}$$

Quindi non puo' esserci polarizzazione longitudinale, che non sarebbe invariante per parita'; quindi i sottostati magnetici non possono essere uniformemente popolati
 Si puo' allora misurare la distribuzione angolare del decadimento della ρ nel suo CM, ottenendo risultati come questi:



Sull'asse inclinato sono riportati i valori della massa $\pi^+\pi^-$, mentre su quello orizzontale i valori di $\cos\theta$; ci sono 2 regioni di massa visualizzate, la prima nell'intorno del picco della ρ , la seconda attorno al picco di un'altra risonanza, la ρ' . Si osserva immediatamente che la distribuzione angolare cambia decisamente forma vicino al picco: l'andamento e' consistente con quello atteso per una risonanza a spin 1, ossia $|Y_1^0|^2 \propto \cos^2 \theta$.

NB Si osservi come invece nella regione della ρ l'andamento sia diverso, non consistente con spin 1: in effetti, e' piu' consistente con uno spin 2, ossia

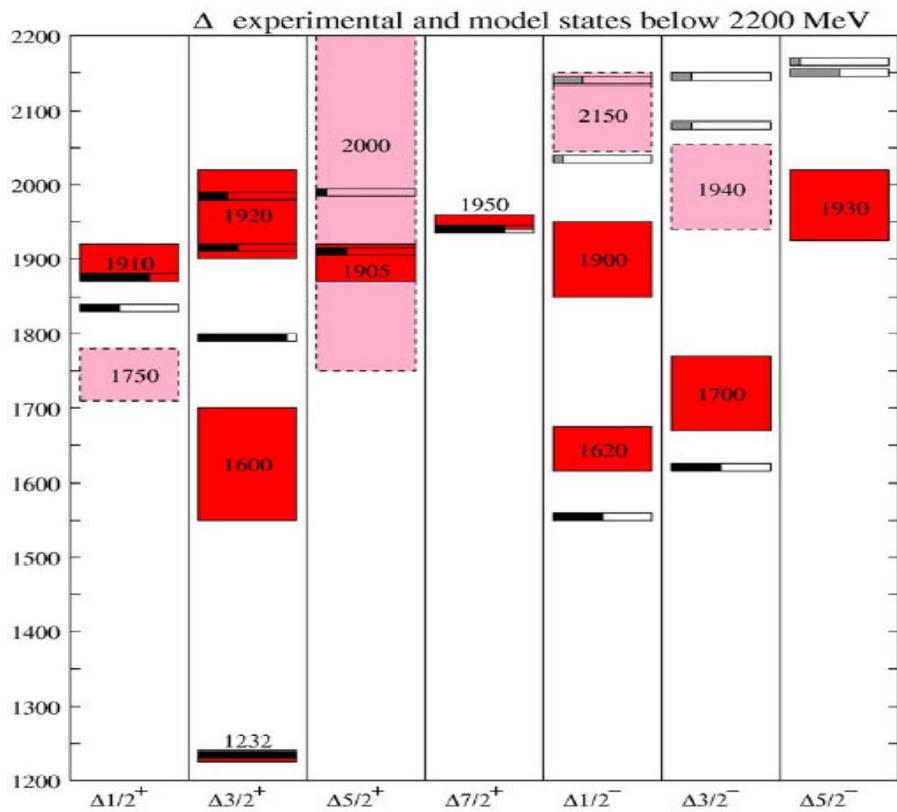
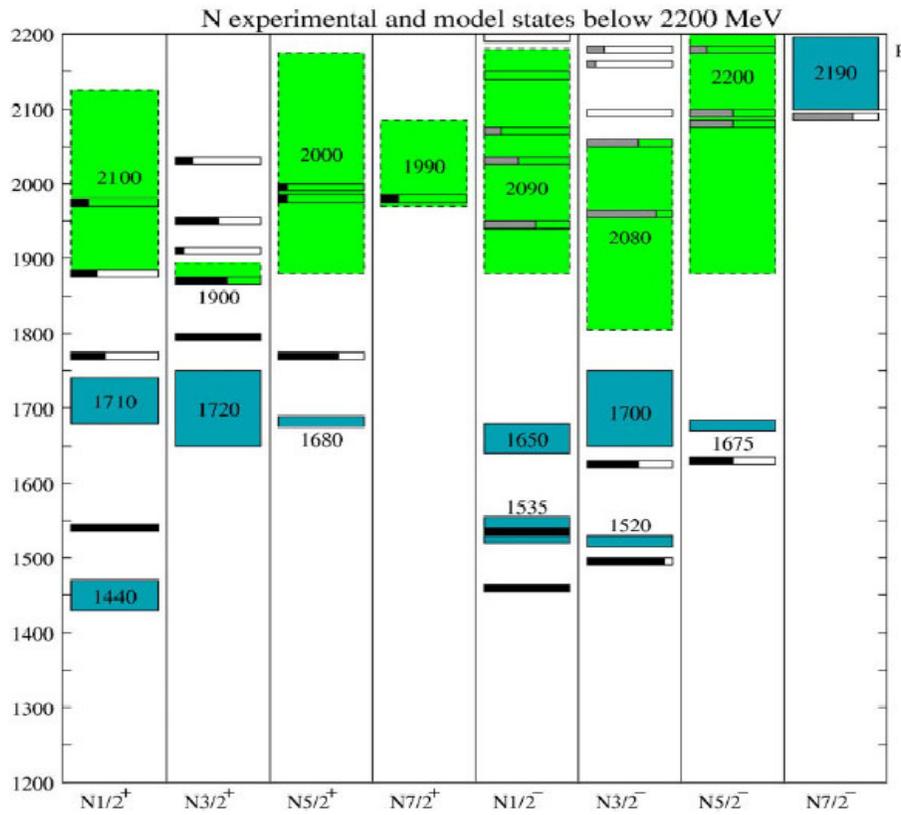
$$|Y_2^0|^2 \propto (3\cos^2\theta - 1)^2$$

5.9 Resume' sugli stati adronici a stranezza nulla

a) Risonanze barioniche

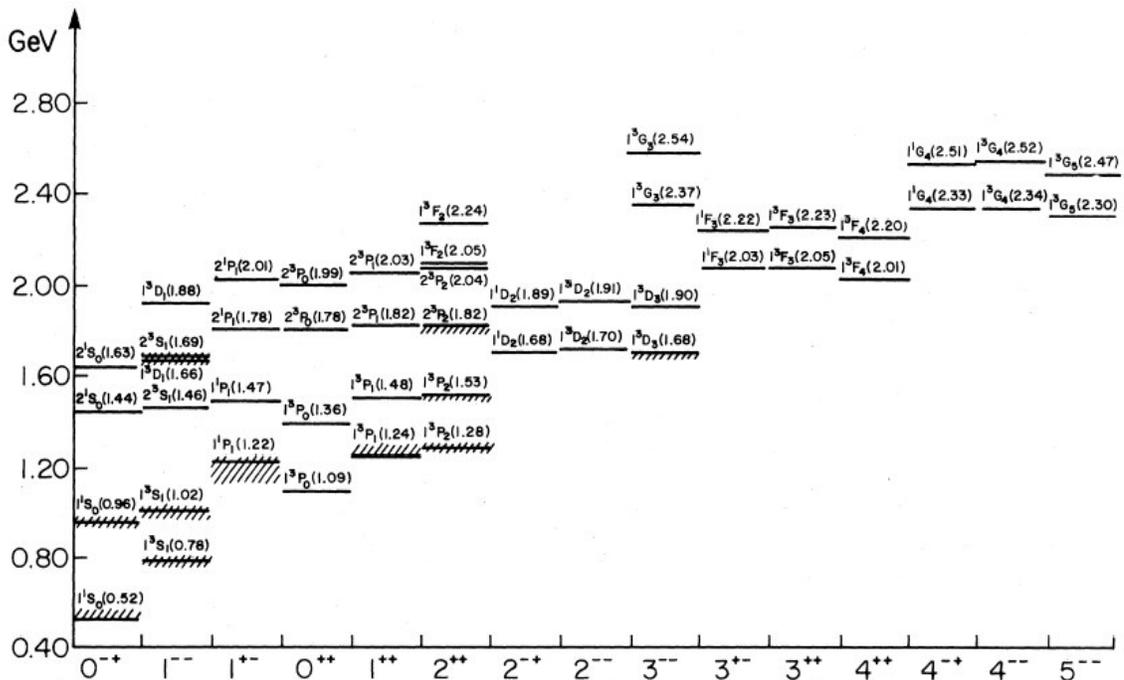
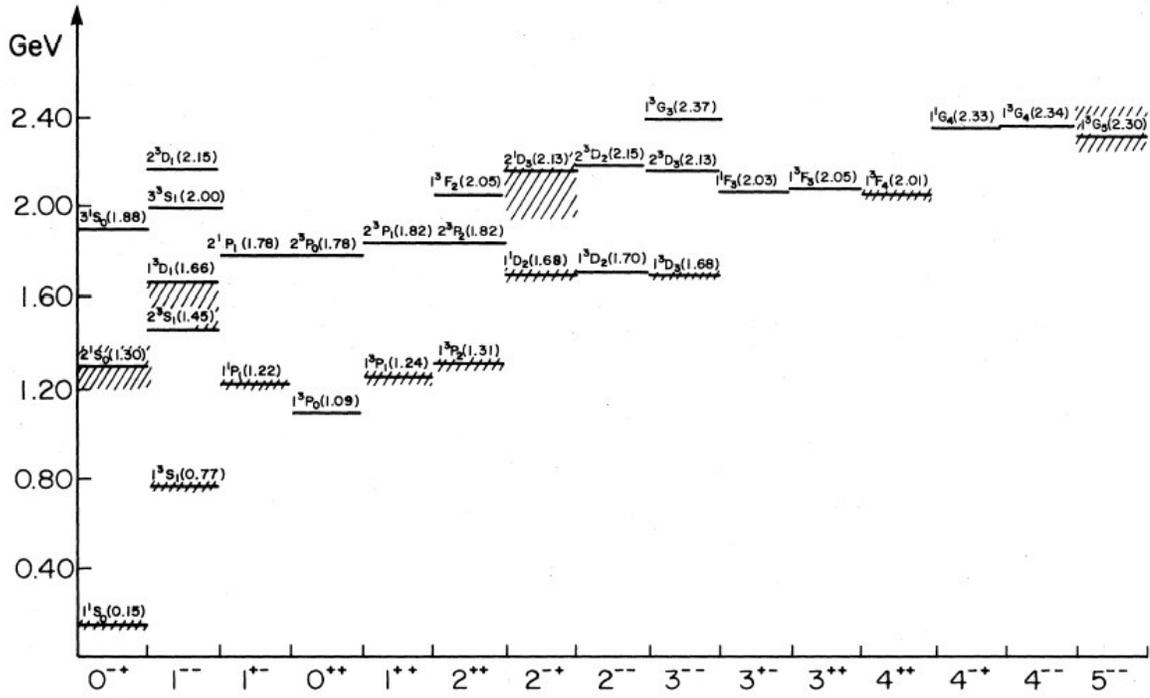
I seguenti schemi mostrano gli stati eccitati del nucleone, separatamente per la famiglia a isospin 1/2 e quella a isospin 3/2. I dati sono tratti dalla presentazione di *S.Capstick, Florida State University*, alla conferenza *Baryons 2002*. I grafici mostrano i livelli energetici (energia sull'asse verticale) verso il momento angolare totale (e parita') (asse orizzontale). Occorre ricordare che ognuno degli stati Δ compare poi in 4 stati di carica (quartetti, $I=3/2$), mentre ogni stato N^* compare in 2 stati di carica (doppietti, $I=1/2$). Le barre orizzontali bianconere mostrano il valore sperimentale della massa (la percentuale di nero da' il rapporto di decadimento, fra 0 e 1, per il modo $N\pi$). Le aree colorate mostrano gli intervalli di massa previsti da un modello teorico.

E' evidente la grande ricchezza di questi stati eccitati del nucleone, e anche come l'analisi in spin-parita' porti naturalmente a raggrupparli secondo il valore dei loro numeri quantici, di spin e isospin: considerando i gruppi a massa piu' bassa, osserviamo un doppietto a *isospin* $\frac{1}{2}$, *spin* 1/2 (il nucleone), e un quartetto a *isospin* 3/2, *spin* 3/2 (la delta).



b) Risonanze mesoniche

I seguenti grafici, tratti da *S. Godfrey et al., PRD 32, 189 (85)*, mostrano una parte dei principali stati mesonici conosciuti, separatamente per stati isovettoriali e isoscalari



Anche qui, sull'asse verticale stanno le energie, mentre sull'asse orizzontale stanno i momenti angolari totali (J^P) e i numeri quantici P e C). Come al solito, le aree ombreggiate indicano le regioni di massa previste da un modello teorico.

NOTA IMPORTANTE: In questi grafici non sono rappresentati gli stati con numeri quantici di *stranezza*, *charm*, *bottom* diversi da zero, ne' i cosiddetti *-onia*, ossia gli stati legati q - \bar{q} dei quark pesanti (c, b).

Gli stati con ugual valore di J^P e diversa energia vengono chiamati le eccitazioni radiali del sistema: essi corrispondono, in senso lato, ai livelli energetici di un atomo o di un nucleo, che hanno un diverso numero quantico principale. Si osservi come gli stati con diverso valore di J^P non siano degeneri in energia: come si ricordera', nel caso dell'atomo di idrogeno le successive approssimazioni all'hamiltoniano totale (massa relativistica, struttura fina, struttura iperfina, polarizzazione del vuoto,...) introducono correzioni ai livelli che rimuovono del tutto la elevata degenerazione presente quando si considera solo il potenziale coulombiano. Nell'ipotesi in cui anche gli adroni sono oggetti dotati di struttura interna, il meccanismo puo' essere fondamentalmente simile: ma la forma delle interazioni, e quindi dei termini dell'hamiltoniano, sara' naturalmente assai diversa. In questo caso, gli stati piu' bassi sono un terzetto a *isospin 1, spin 0* (il pione), due singoletti a *isospin 0, spin 0*, (la η e la η') un terzetto a *isospin 1, spin 1* (la ρ), due singoletti a *isospin 0, spin 1* (la ω e la ϕ). Questi stati sono tutti prodotti con elevata sezione d'urto nelle collisioni fra adroni, e anche nelle interazioni fra il campo elettromagnetico e gli adroni.