

Scattering adrone-adrone, risonanze, isospin, stranezza

1. Lo studio iniziale dell'interazione forte

Accanto alla diffusione elettrone-nucleo, governata dall'interazione elettromagnetica, e' possibile sondare le proprieta' di nuclei e nucleoni studiando le caratteristiche di processi di scattering dominati dall'interazione forte. Si usano quindi come proiettili e bersagli protoni, deutoni, nuclei.

Storicamente, anzi, questo e' stato il primo mezzo di indagine utilizzato in pratica, reso possibile dalla costruzione dei primi acceleratori: per ragioni di sviluppo tecnologico piu' rapido, le prime macchine acceleratrici di energia relativamente alta (centinaia di MeV) erano *sincrociclotroni*, capaci di accelerare protoni, deutoni o nuclei leggeri, ma non elettroni. Le macchine per elettroni di energia simile (*betatron*) sono intrinsecamente difficili da utilizzare per esperimenti in coincidenza.

Tutte queste particelle cariche (e stabili) sono capaci di interagire fortemente (il nome comune a tutte le particelle che sentono l'interazione forte e' *adroni*), quindi lo studio dei processi d'urto che le coinvolgono fornisce informazioni sulle proprieta' dell'interazione forte.

2. Proprieta' fondamentali dell'interazione forte

Come si ricordera', le proprieta' piu' importanti sono le seguenti:

- Elevata intensita'

L'energia di legame dei nucleoni nel nucleo (8 MeV in media) richiede forze molto intense fra i nucleoni per essere spiegata (≈ 10 -20 volte le forze elettriche fra le stesse particelle)

- Corto raggio di azione

Le dimensioni dei nuclei sono ≈ 1 fermi

- Indipendenza dalla carica elettrica

Livelli energetici dei nuclei speculari $\rightarrow$ forza pp $\approx$ forza pn $\approx$ forza nn

Occorre dire subito che le interazioni forti fra nucleoni, o fra adroni in genere, vengono oggi interpretate come dovute ad un'interazione *residua* (non veramente fondamentale, della quale sono solo le vestigia), alla stessa stregua delle

interazioni fra atomi e molecole *neutre* (forze di van der Waals): pur essendo dovute esclusivamente all'interazione elettromagnetica, ne sono solo il residuo. Questo avviene perche' oggi pensiamo che gli adroni siano *singoletti di colore* (ossia, stati a colore netto nullo), quindi incapaci di interagire attraverso le forze di colore, che sono la vera interazione fondamentale, se non nella misura in cui esse si manifestano, appunto in qualche forma residua, anche fra stati "bianchi".

Come e' noto, Yukawa (1935) fece l'ipotesi che, in analogia all'interazione elettromagnetica - in cui la forza fra cariche e' dovuta allo scambio di fotoni virtuali, l'interazione fra due nucleoni fosse dovuta allo scambio di una nuova particella virtuale. Le principali differenze fra la particella prevista e il fotone sono:

- *massa a riposo $\neq 0$*
questo ha a che fare con il range limitato
- *spin $\neq 1$*
questo ha a che fare con l'interazione, prevalentemente attrattiva, fra particelle identiche
- *carica sia $\neq 0$, sia $= 0$*
questo ha a che fare con l'esistenza di interazioni (forti) uguali fra coppie di nucleoni di carica uguale e diversa (*pp*, *nn*, *pn*)

Giustificazione delle affermazioni precedenti

Spin pari e dispari

Lo scambio di particelle virtuali a spin pari (0,2,..) da' luogo solo a forze attrattive, sia fra coppie di particelle identiche, sia fra coppie particella/antiparticella; quello di particelle a spin dispari (1,3,..) a forze repulsive fra particelle identiche, attrattive fra particella e antiparticella. Questo e' un risultato generale della teoria dei campi

Massa a riposo e range

Il potenziale scalare (p.es. coulombiano) e' la componente temporale del 4-potenziale elettromagnetico A^μ , ciascuna componente del quale soddisfa separatamente l'eq. delle onde.

$$\square A^\mu = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = -j^\mu$$

Si noti come ϕ sia un 3-scalare, ma non un 4-scalare. L'assenza di un termine di massa nell'equazione si traduce, come e' noto, nel range infinito dell'interazione e.m.; questo e' equivalente, dopo la quantizzazione,

all'assenza di massa a riposo per il fotone. L'eq. per la componente tempo (potenziale scalare) e' allora:

$$\square\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = -\rho$$

Si consideri l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Essa e' un caso particolare (statico) dell'eq. delle onde per il potenziale scalare. La soluzione per una carica puntiforme (la funzione di Green) e' ben conosciuta:

$$\rho(r) = e\delta(r) \rightarrow \varphi(r) = \frac{e}{r} \quad \text{potenziale coulombiano}$$

Invece dell'equazione per il potenziale A^μ , si puo' considerare quella per un campo che sia un 4-scalare (v. equazione di Klein-Gordon), che si scrive:

$$(\square - m^2)\chi = -\gamma$$

dove γ (invariante di Lorentz) rappresenta il termine di sorgente per il campo, analogamente a j_μ per A^μ .

Considerando al solito il caso statico si ha:

$$\gamma(r) = g\delta(r) \rightarrow \chi = \frac{g}{r}e^{-mr}$$

Quindi χ e' una generalizzazione del potenziale Coulombiano, che si presenta come il caso limite per m che va a 0. E' evidente che il potenziale di Yukawa ha un range finito (smorzamento esponenziale per $r \gg 1/m$), legato al valore della massa m .

Così' come il fotone e' l'eccitazione elementare (a massa nulla) del campo elettromagnetico quantizzato, la quantizzazione del nuovo, ipotetico campo di Yukawa fa emergere una struttura particellare, fatta di quanti con massa diversa da zero, il cui scambio fra nucleoni da' luogo all'interazione forte. In linea con l'osservazione fatta piu' sopra, ci aspettiamo che la particella scambiata fra nucleoni debba avere spin pari, per generare sempre interazione attrattiva; il modello piu' semplice e' quindi quello con spin 0, come descritto appunto dall'eq. di Klein-Gordon.

La particella predetta da Yukawa nel 1935 fu effettivamente trovata nella radiazione cosmica una decina di anni dopo, e fu chiamata *mesone* π . Subito dopo,

essa fu osservata essere abbondantemente prodotta nelle interazioni fra i protoni accelerati dai sincrociclotroni (a Chicago e Berkeley).

Le proprietà principali del pione sono:

massa: circa 135-139 MeV (neutro-carico)

carica: +va, -va, nulla

spin: 0

decadimenti:

carico - stabile rispetto a interazioni forti; decade debolmente

neutro - stabile rispetto a interazione forte; decade elettromagneticamente

La spiegazione della stabilità rispetto ai decadimenti forti è molto semplice: non ci sono altri adroni con massa più piccola! Per una buona descrizione delle esperienze che condussero alla determinazione delle proprietà sopra citate, inclusi i lavori originali, si rinvia p.es. al testo di Cahn-Goldhaber.

L'interpretazione del π come mediatore della interazione forte fra nucleoni, unita alla sua relativa stabilità (leggi: vita media lunga, che consente di costruire *fasci di π* carichi di energia elevata agli acceleratori), suggerisce immediatamente la possibilità di utilizzarlo come *sonda* per studiare le proprietà dell'interazione forte: così come lo studio dello scattering γN dà informazione sulla struttura elettromagnetica di nuclei e nucleoni, quello dello scattering πN dà informazioni sulla loro struttura forte.

3. Isospin

È utile ricordare che l'indipendenza dalla carica porta a introdurre una nuova proprietà delle particelle a interazione forte, ossia l'*isospin*. Nello stesso modo con cui il grado di libertà spin etichetta i diversi sottostati di momento angolare intrinseco in cui può trovarsi una particella, il grado di libertà isospin serve ad etichettarne i diversi sottostati di carica. In base a questa proprietà, le particelle vengono raccolte in *multipletti*, i componenti dei quali hanno proprietà simili (inclusa la massa) e diversa carica elettrica. L'esempio più immediato è quello di protone e neutrone, che sono considerati sottostati di un'unica particella, il nucleone (particella *isospinoriale* - doppietto). L'esistenza del π in 3 distinti stati di carica porta ad assegnargli un valore di isospin uguale a 1 (particella *isovettoriale* - ossia, tripletto). Come per il momento angolare, il valore di I specifica il multipletto; per identificare il singolo stato, caratterizzato dal valore della sua carica elettrica, occorre specificare anche la 3° componente I_3 .

Per il pione, vale dunque la relazione:

$$Q = I_3$$

che deve essere estesa, per includere il caso del nucleone, nel seguente modo:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

Questa relazione fra i numeri quantici si chiama *relazione di Gell-Mann e Nishijima*. Il meccanismo generale di descrizione di stati e operatori e' lo stesso di quello usato per lo spin, con la sola importante differenza che, nel caso dell'isospin, le osservabili in gioco *non* sono grandezze meccaniche. La completa equivalenza di tutti i sottostati, dal punto di vista dell'interazione forte, unita al principio di sovrapposizione, porta a considerare come equivalenti anche tutte le combinazioni lineari dei sottostati stessi: esattamente come per il caso dello spin, tali combinazioni lineari corrispondono a 'rotazioni' del sistema, in questo caso in uno spazio astratto. L'invarianza delle interazioni forti per isorotazioni porta naturalmente a concludere che il generatore delle trasformazioni, ossia il **vettore isospin totale**, deve essere una quantita' conservata in ogni processo forte, esattamente come il momento angolare totale.

4. Scattering πN ; risonanze

Lo studio sperimentale dello scattering πN riserva numerose sorprese. La piu' importante e' l'andamento della sezione d'urto totale vs. l'energia: in figura e' rappresentato sia per il π^+ sia per il π^- .

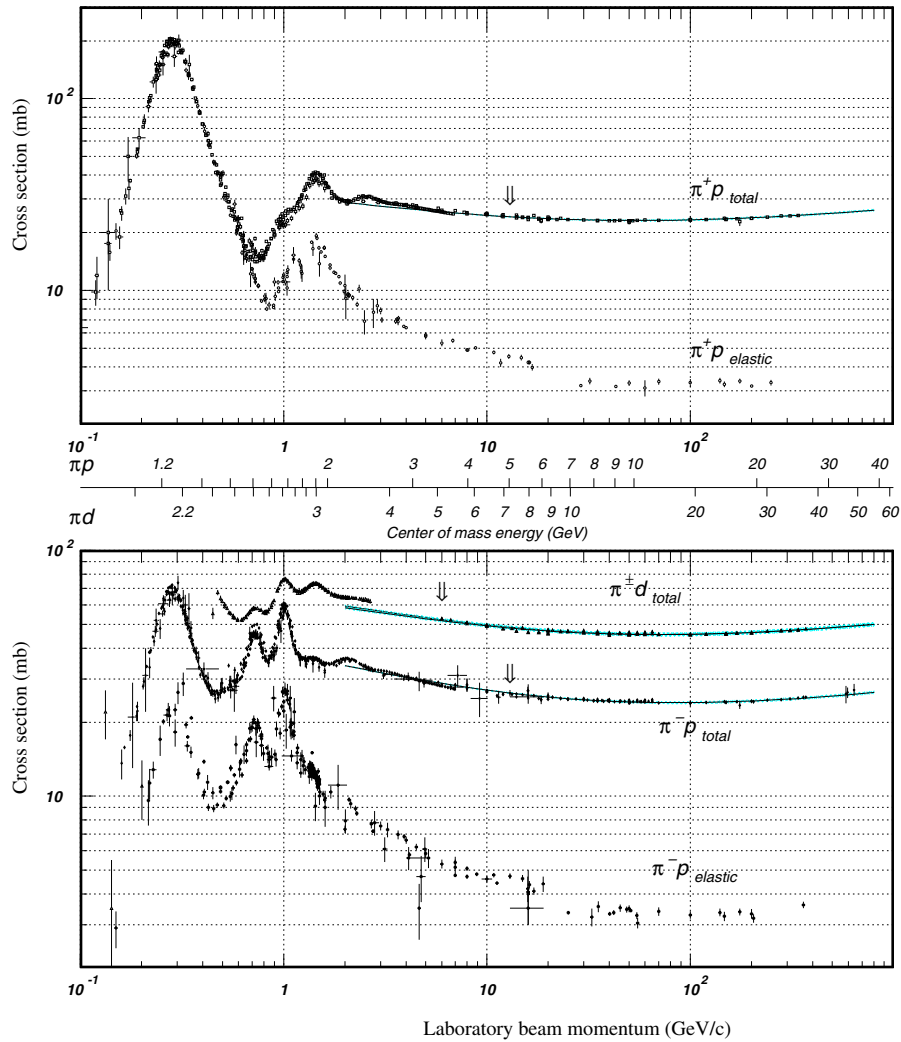


Figure 39.14: Total and elastic cross sections for $\pi^\pm p$ and $\pi^\pm d$ (total only) collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding computer-readable data files may be found at <http://pdg.lbl.gov/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS Group, IHEP, Protvino, Russia, August 2001.)

Come si vede facilmente, la sezione d'urto totale presenta una ricca struttura, totalmente inaspettata a priori. I picchi osservati nella sezione d'urto totale in corrispondenza di particolari valori per l'energia totale nel CM sono interpretati come *stati risonanti* (v. note sulla teoria dello scattering, e nel seguito). In sostanza, uno stato risonante, pur non facendo parte della famiglia degli stati legati del sistema fisico considerato, ha alcune caratteristiche abbastanza simili: vita media relativamente "lunga", distribuzione spaziale dei componenti relativamente "delimitata", eventualmente diversi modi di decadimento in competizione. E' anche possibile assegnare allo stato risonante dei numeri quantici come si fa per uno stato stazionario (massa a riposo, momento angolare, parita', etc). Uno dei passi fondamentali nell'interpretazione degli stati risonanti come stati eccitati del nucleone, essenzialmente sullo stesso piano di quello

fondamentale, e' stata l'osservazione degli stati stessi anche nelle collisioni fotone-nucleone: in quest'ultimo caso, la reazione non e' quella elastica, ma una reazione di *fotoproduzione*

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$$

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

Nel caso delle risonanze nello scattering πN , e in altri casi analoghi, le principali differenze con eventuali stati legati consistono nella vita media molto breve e nella massa a riposo > della somma delle masse dei componenti. Si puo' osservare come la larghezza del picco risonante sia elevata (in senso lato, dello stesso ordine dell'energia di picco !): ora, la larghezza del picco e' una misura dell'incertezza sul valore centrale della energia di risonanza. In base alla relazione di indeterminazione tempo-energia, $\Delta E \Delta t \geq 1$, a una vita media breve corrisponde una larghezza elevata, quindi risonanze larghe hanno una elevata probabilita' di decadimento per unita' di tempo.

La relazione di indeterminazione tempo-energia

Vale forse la pena di insistere un po' sull'argomento: la relazione di indeterminazione posizione-momento mette a confronto le incertezze sulla conoscenza dei possibili valori di due operatori hermitiani; quella tempo-energia, viceversa, collega le incertezze fra la conoscenza del valore dell'operatore hamiltoniano e di quello del parametro durata della misura (o del sistema).

Questa relazione e' gia' presente nella fisica ondulatoria classica: per un pacchetto d'onde, piu' breve e' la durata del pacchetto, piu' grande e' l'incertezza sulla banda di frequenze che lo compongono. Poiche' le energie, per un sistema quantistico, sono proporzionali alle frequenze, un sistema instabile con vita media breve presentera' un'elevata indeterminazione sull'energia posseduta (sara' cioe' in uno stato che contiene componenti ad energia anche molto diversa).

Il fenomeno della risonanza in meccanica quantistica e' assai rilevante, non solo nelle applicazioni in fisica delle particelle, e fornisce un'illustrazione diretta di quanto detto sopra.

Si consideri uno stato stazionario, descritto da una funzione d'onda del tipo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-iE_0 t}$$

La trasformata di Fourier di ψ , fatta rispetto alla variabile tempo, fornisce l'ampiezza di probabilita' per l'energia dello stato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE_0 t} e^{iEt} dt = \delta(E - E_0)$$

Coerentemente con cio' che ci attendiamo per uno stato stazionario, l'energia ha valore definito.

Possiamo pero' considerare uno stato piu' generale di quello visto prima, nel quale attribuiamo ad E un valore *complesso* (ossia, che oltre ad avere una parte reale ha anche una parte immaginaria). Uno stato cosi' fatto sarebbe un autostato di un hamiltoniano non hermitiano, e quindi presenterebbe un problema di interpretazione: tuttavia, il significato fisico puo' essere compreso facilmente separando in E parte reale e immaginaria:

$$e^{-iEt} = e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} = e^{-iE_0t} e^{-\Gamma t}, \quad t > 0$$

Evidentemente, la norma di questo stato non e' costante nel tempo, anzi decresce esponenzialmente. Lo stato e' quindi non stazionario, con andamento esponenziale nel tempo e *vita media* $= 1/\Gamma$. Vale le pena di ricordare che, per una distribuzione esponenziale delle durate di uno stato, ci si aspetta uno scarto quadratico medio (cioe' un' *incertezza statistica* sulla durata dello stato) uguale alla stessa vita media $1/\Gamma$: data la natura statistica del processo di smorzamento, la vita media e' quindi anche una misura dell' *indeterminazione* della durata dello stato.

[Il nostro modo di descrivere lo stato e' certamente incompleto: tanto per fare un esempio, l'energia associata allo stato non si conserva! Questa osservazione suggerisce una possibile soluzione al nostro problema di interpretazione: un Hamiltoniano non hermitiano, come quello definito sopra, fornisce la descrizione di un sistema *non isolato*. Quindi esso e' per sua natura solo *una parte* dell'Hamiltoniano totale, che deve contenere anche la descrizione dell'assorbimento dell'energia perduta. Se nondimeno ignoriamo questo problema per un momento,] possiamo calcolare la trasformata di Fourier di ψ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} e^{iEt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} dt = -\frac{1}{E_0 - E - i\Gamma} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma}$$

L'ampiezza per trovare il sistema con energia E e' ora una funzione dell'energia stessa, che non e' piu' definita. La probabilita' $= |\text{ampiezza}|^2$ e' la curva di *Breit-Wigner*, essa ha larghezza uguale a Γ , che si vede assumere il significato di *indeterminazione dell'energia* nello stato. E' immediato osservare che:

$$\text{indeterminazione energia} * \text{indeterminazione tempo} = \Gamma * \frac{1}{\Gamma} = 1$$

che e' il caso limite della relazione di indeterminazione tempo-energia

5. Dall'interazione fondamentale al potenziale efficace

Riassumere in breve l'evoluzione storica dello studio, sperimentale e teorico, dell'interazione forte, e' un compito impossibile, data la varieta' di soggetti e di metodi che sono stati impiegati in questo campo di ricerca per diversi decenni.

Nondimeno, si puo' dire in breve che, inizialmente, la parte centrale dello studio sperimentale dell'interazione forte e' consistita nella determinazione dei numeri quantici delle centinaia di stati adronici che via via venivano scoperti, quasi tutti in esperimenti agli acceleratori: un'attivita' simile a quella svolta alla fine del XIX secolo dagli spettroscopisti per studiare la struttura atomica, e a quella dei fisici nucleari, qualche decennio dopo, per l'indagine della struttura del nucleo.

La maggiore difficolta', che si incontra per prima nel tentativo di dare un quadro teorico-fenomenologico a questa vasta raccolta di dati, viene dalla forte intensita' dell'interazione, quando essa e' osservata a energie dello stesso ordine delle masse in gioco: questo impedisce un uso coerente dello sviluppo perturbativo, e quindi il calcolo di quantita' da confrontare con l'esperimento. Per esempio, se si tenta di descrivere l'interazione fra due nucleoni come dovuta allo scambio di pioni, ci si scontra immediatamente con un problema: i diagrammi contenenti lo scambio di due, tre, ... pioni sono piu' importanti di quelli a un solo pione!

Un'altra difficolta' sorge con la scoperta dell'esistenza di molti stati mesonici, nessuno dei quali puo' essere considerato piu' fondamentale degli altri: questo punto segna una notevole differenza rispetto al caso della QED, in cui il solo fotone e' necessario e sufficiente per una descrizione completa. Di fatto, non si puo' sfuggire alla necessita' di includere lo scambio di tutti questi stati nella descrizione dell'interazione, che ne risulta molto appesantita e poco soddisfacente. Infine, l'esistenza di nuovi "flavor" di particelle (stranezza, charm, ...), su scale di massa totalmente differenti e con nuove regole di selezione, complica ulteriormente il quadro.

Col tempo, si e' compreso che la descrizione delle proprieta' "statiche" degli adroni (masse, larghezze, momenti magnetici,...) in termini di una teoria di campo a carattere fondamentale (QCD) deve essere considerata uno dei punti di arrivo, e non di partenza, della teoria stessa. La teoria risulta piu' semplicemente applicabile alla descrizione di altri tipi di fenomeni - dei quali il prototipo e' il *DIS*, nei quali lo scambio di energia e impulso fra costituenti e' particolarmente violento, perche' in questi casi, sorprendentemente, l'accoppiamento risulta sufficientemente indebolito da consentire un accurato calcolo perturbativo.

Ogni tentativo di modellare fenomenologicamente l'interazione fra adroni come scambio di pioni, ed eventualmente di altri mesoni piu' pesanti, deve quindi essere considerato, al meglio, come un espediente fenomenologico.

Rimane evidentemente il problema di dare una descrizione il piu' possibile unificata delle proprieta' principali degli adroni, cosi' come sono osservate negli esperimenti di scattering. Se ci si limita a una regione di energia sufficientemente bassa (diciamo fino ad alcuni *GeV* nel *CM* della collisione), il quadro sperimentale e' dominato dalla presenza di stati risonanti: essi sono, come si ricordera', una proprieta' caratteristica di molti tipi di potenziale. Risulta quindi conveniente, *per lo scopo sopra citato*, approssimare l'interazione forte per mezzo di un qualche tipo di potenziale efficace: questo e' particolarmente interessante, perche' consente di

usare il linguaggio e i metodi della teoria dello scattering da potenziale, piuttosto semplici e intuitivi, anche se evidentemente limitati nel range di applicazioni.

Come questo sia possibile, si può spiegare brevemente nel modo seguente:

a. Innanzi tutto, fino a che l'energia nel CM non è troppo grande, la maggior parte dei processi forti è dominata da canali a 2 corpi

$$a + b \rightarrow c + d$$

nei quali lo stato finale contiene particelle stabili o risonanze, che poi decadono per loro conto in altre particelle; questo non è vero in assoluto (p.es., le reazioni di annichilazione nucleone-antinucleone procedono attraverso canali più complicati e difficili da modellare), ma è sufficiente a giustificare l'enfasi sull'uso di modelli a potenziale.

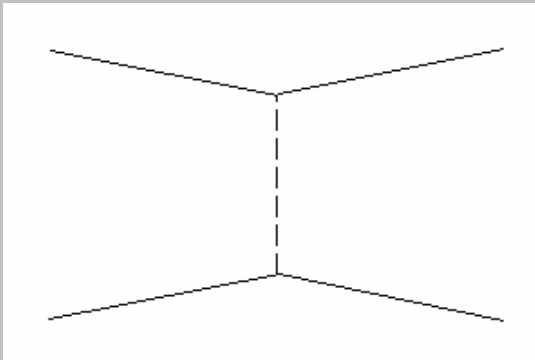
b. Sul modello della QED, e trascurando tutte le numerose difficoltà e complicazioni sopra accennate, si può quindi immaginare che l'interazione forte sia dovuta ad emissione e assorbimento di pioni, o altri stati a interazione forte, da parte degli adroni coinvolti nel processo: quindi, l'ampiezza invariante potrà scriversi, sul modello della QED, come elemento di matrice dell'operatore prodotto delle correnti di a e b e del propagatore della particella scambiata; per una particella a spin 0 come il π , trascurando i problemi legati alla parità intrinseca -va

$$A \propto j_{(a)}^\mu \frac{1}{q^2 - m_\pi^2} j_{(b)\mu}$$

dove q è il 4-impulso trasferito:

$$q = p_C - p_A$$

L'ampiezza si può rappresentare con il diagramma di Feynman:



c. Se consideriamo il caso in cui

$$q^2 = (E_C - E_A)^2 - (\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)^2 \approx -(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)^2 = -|\mathbf{q}|^2$$

il propagatore si approssima con

$$\frac{1}{q^2 - m_\pi^2} \approx \frac{1}{-|\mathbf{q}|^2 - m_\pi^2} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m_\pi^2}$$

Facendone l'antitrasformata di Fourier, si trova:

$$\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m_\pi^2} \right) d^3\mathbf{q} \propto -\frac{e^{-m_\pi r}}{r}$$

ossia il potenziale di Yukawa. Come e' noto, in particolari situazioni, potenziali attrattivi di questo tipo possono dare luogo a stati risonanti.

d. E' plausibile che la proprieta' del potenziale efficace di presentare fenomeni di risonanza sia presente gia' nell'interazione covariante. Si puo' interpretare l'andamento risonante della sezione d'urto con la presenza di stati eccitati del nucleone

e. Il fenomeno della risonanza si osserva in tutti i sistemi di particelle a interazione forte, sia barionici, sia mesonici

6. Analisi in fase, ampiezze risonanti

In generale, come sappiamo, la determinazione degli sfasamenti consente di ricavare informazioni sul potenziale. Gli sfasamenti possono essere ricavati dalla sezione d'urto differenziale: ottenere il loro andamento in funzione dell'energia richiede dunque la misura della sezione d'urto differenziale a diverse energie, e rimane in genere non priva di ambiguita'. Lo scopo iniziale delle analisi in fase, ossia la determinazione del potenziale efficace dell'interazione adrone-adrone, si e' col tempo abbastanza perduto, evolvendo verso la determinazione dei numeri quantici delle decine o centinaia di stati risonanti via via osservati.

Come si ricordera', l'ampiezza relativa alla l-esima onda parziale si scrive, per la reazione elastica:

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1)$$

Altre reazioni a due corpi possono essere descritte da ampiezze simili; per questi casi alle corrispondenti ampiezze elastiche si aggiunge un *coefficiente di assorbimento* $0 < \eta_l < 1$:

$$f_l = \frac{1}{2ik} (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1)$$

equivalente all'introduzione di uno *sfasamento complesso*:

$$\begin{aligned} \eta_l &= e^{-2\varepsilon_l} \\ f_l &= \frac{1}{2ik} (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{2ik} (e^{-\varepsilon_l} e^{2i\delta_l} - 1) \\ \rightarrow f_l &= \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l - \varepsilon_l} - 1) = \frac{1}{2ik} (e^{2i(\delta_l + i\varepsilon_l)} - 1) \end{aligned}$$

analogo all'indice di rifrazione complesso dell'elettromagnetismo.

Siamo interessati in particolare al caso in cui una delle ampiezze, la l -esima diciamo, presenta in funzione dell'energia un comportamento risonante.

In questo caso, l'ampiezza può essere rappresentata nel piano complesso, tenendo conto della semplice relazione:

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{\cot \delta_l - i} \\ x &= \operatorname{Re} a_l, y = \operatorname{Im} a_l \\ \rightarrow x^2 &= (1 - y) y \end{aligned}$$

che è l'equazione di un cerchio di raggio $R=1/2$ e centro $(0, +1/2)$. Ci sono varie proprietà interessanti che si trovano nel graficare l'ampiezza in funzione dell'energia sotto forma di vettore nel piano complesso (grafico noto come "Argand plot", che diventa però rapidamente intricato e poco comprensibile al crescere dell'energia, con l'apertura dei canali anelastici); tuttavia, come accennato sopra, l'interesse delle analisi in fase è ormai da molto tempo piuttosto marginale

Come si ricorderà, in questo caso potremo riscrivere l'ampiezza stessa, per energie non troppo distanti dall'energia di risonanza, come:

$$a_l = \frac{\Gamma_l/2}{(E_R - E) - i\Gamma_l/2}$$

L'analisi in fase dei dati delle reazioni elastiche e a due corpi ha posto in evidenza l'esistenza di moltissime risonanze, il cui inquadramento in una descrizione unificata e coerente ha costituito per lungo tempo il problema fondamentale della "zoologia degli adroni". Di seguito si tenta di dare un'idea extra-semplificata della situazione con un paio di esempi.

7. Risonanze in formazione: analisi angolare

Consideriamo lo sviluppo in onde parziali dell'ampiezza di scattering πp . La presenza del protone (particella a spin $\frac{1}{2}$) complica un po' il quadro: invece del solo momento angolare orbitale, dobbiamo prendere in considerazione il momento angolare totale del sistema, $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$. Prendendo solo i valori piu' bassi del momento angolare orbitale, $l=0,1$:

$$J = 1/2 \oplus 0 \oplus l = 1/2 \oplus l = \begin{cases} 1/2 & \text{onda S} \\ 1/2, 3/2 & \text{onda P} \end{cases}$$

Perche' solo onde S e P

Questa approssimazione si fonda sulla seguente osservazione: il range R della interazione forte e' $R \approx 1/m$; l'ordine delle onde interessate e' dato da $l \approx kR \approx k/m$. Per le risonanze a bassa energia, $k \approx m$, quindi $l \leq 1$, quindi solo onde S, P

Ogni onda parziale (valore di l fissato) dello sviluppo in serie dell'ampiezza di scattering si scinde in 2 onde distinte, una con $J=l+1/2$ e una con $J=l-1/2$. Per $l=0$ (onda S) abbiamo solo $J=1/2$; per $l=1$ (onda P) abbiamo $J=1/2, J=3/2$.

Se l'interazione e' centrale, lo stato di scattering puo' essere scomposto in stati a momento angolare totale definito, ossia $J=1/2, 3/2$. Quindi, lo sviluppo che si scriveva nel caso senza spin

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(a_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

diventa

$$\begin{aligned} f(\theta) &= g(\theta) + h(\theta) \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^+ - a_l^-) P_l^1(\cos \theta) \end{aligned}$$

Spiegazione di questa formula

Riprendendo la descrizione del processo tramite il concetto di stato (stazionario) di scattering, dobbiamo introdurre la descrizione dello spin del nucleone: se consideriamo che la componente dello spin lungo la direzione di moto sia $+1/2$ possiamo scrivere per la parte onda piana dello stato di scattering:

$$e^{ikz} \underbrace{\chi_{1/2}^{+1/2}}_{\text{autostato di spin}}$$

Essa può essere scritta come uno sviluppo in armoniche sferiche:

$$e^{ikz} \chi_{1/2}^{+1/2} = \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0} (2l+1) P_l(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2} = \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2}$$

in cui compaiono termini del tipo:

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2}$$

(perché la componente z di J coincide con quella di s , ed è conservata). Ora, il termine generico della somma si può scrivere come sovrapposizione di stati a momento angolare totale definito

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} y_{l-1/2}^{+1/2}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2} &= \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0} \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} y_{l-1/2}^{+1/2} \right) \\ &= \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0} \sqrt{4\pi} \left(\sqrt{l+1} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{l} y_{l-1/2}^{+1/2} \right) \end{aligned}$$

L'effetto del potenziale è quello di sfasare, *separatamente per le due parti a momento angolare totale definito*, le singole onde parziali, esattamente come per il caso senza spin; quindi l'ampiezza di scattering (parte angolare della componente a onda sferica della funzione d'onda) si scriverà:

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{2ik} \sum_{l=0} \left(\sqrt{l+1} y_{l+1/2}^{+1/2} (a_l^+ - 1) - \sqrt{l} y_{l-1/2}^{+1/2} (a_l^- - 1) \right)$$

Le autofunzioni y del mom. angolare totale J sono date (usando semplicemente i coefficienti di Clebsch-Gordan opportuni) da:

$$y_{l+1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2} + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{1/2}^{-1/2}$$

$$y_{l-1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{1/2}^{-1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2}$$

Quindi l'ampiezza di scattering puo' scriversi, introducendo le *funzioni associate di Legendre*:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2} + (a_l^+ - a_l^-) P_l^{+1}(\cos \theta) e^{i\varphi} \chi_{1/2}^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2ik} \left\{ \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2}}_{g(\theta)} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (a_l^+ - a_l^-) P_l^{+1}(\cos \theta) e^{i\varphi} \chi_{1/2}^{-1/2}}_{h(\theta)} \right\}$$

Ci accorgiamo cosi' che in realta' ci sono 2 ampiezze distinte: la prima ($g(\theta)$) corrisponde a un'onda uscente in cui lo spin del protone e' rimasto invariato; la seconda, invece, corrisponde a un'onda uscente in cui si e' avuto 'spin-flip' ($h(\theta)$) (ossia in cui la componente z dello spin ha cambiato segno). Si ritrova cosi' la formula citata, nella quale si ricordi che le quantita' a_l sono definite da:

$$a_l^{\pm} = e^{2i\delta_l^{\pm}}$$

Nel caso lo spin del protone avesse componente z uguale a $-1/2$ il risultato per le ampiezze di scattering sarebbe identico.

Poiche' le autofunzioni di spin sono ortogonali, la sezione d'urto differenziale e' data semplicemente da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2$$

Essendo:

$$P_0^0 = 1$$

$$P_1^0 = \cos \theta$$

$$P_1^{+1} = -\sin \theta$$

troviamo, sostituendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| (a_0^+ - 1) + [2(a_1^+ - 1) + (a_1^- - 1)] \cos \theta \right|^2 + \left| (a_1^+ - a_1^-) (-\sin \theta) \right|^2$$

che si può riscrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos^2 \theta)$$

La sezione d'urto differenziale teste' trovata e' naturalmente una funzione dell'energia totale nel CM della collisione, la dipendenza essendo dovuta al fattore $1/k^2$ e a quella dei coefficienti A_i , che naturalmente dipendono dal potenziale attraverso gli sfasamenti. E' interessante vedere cosa succede ai coefficienti A_i se ci avviciniamo a $E_{CM}=1230 \text{ MeV}$ (energia corrispondente al picco di risonanza): si trova sperimentalmente che essi valgono circa 1, 0, 3, ossia

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

Questa e' la distribuzione angolare attesa per il decadimento di uno stato a spin 3/2 in due particelle a spin 0 e 1/2 (il π e il protone, appunto)

Giustificazione dell'affermazione precedente

Consideriamo uno stato a spin 3/2 che decade nel modo specificato sopra; supponiamo che la componente z di J sia +1/2 (se e' -1/2, il risultato finale non cambia; non può essere + o - 3/2, perché il momento angolare orbitale ha componente nulla lungo la direzione di moto). Allora potremo scrivere:

$$|3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle Y_1^{+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, +1/2\rangle Y_1^0$$

Poiché le autofunzioni di spin sono ortogonali, i 2 termini non interferiscono. Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\propto \frac{1}{3} |Y_1^{+1}|^2 + \frac{2}{3} |Y_1^0|^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta \\ &\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cos^2 \theta \propto 1 + 3 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

La parità della Δ si può ottenere dalla seguente considerazione: essa decade per interazione forte, quindi conservando la parità, in $p+\pi$; la parità totale e':

$$\eta_{\Delta} = \eta_p \eta_{\pi} \eta_{orb}$$

La parita' del protone (fermione) e' convenzionalmente assunta +va; quella del π e' -va (determinazione possibile); il decadimento avviene in pura onda P ($l=1$), quindi $\eta_{orb}=(-1)^l=-1$. Quindi:

$$\eta_{\Delta} = +$$

Lo stato risonante osservato, chiamato Δ^{++} , puo' quindi essere considerato uno stato eccitato del nucleone, e la sua esistenza e' uno dei primi indizi che il nucleone non e' un oggetto elementare, ma e' dotato di una struttura interna

8. Analisi di isospin

Lo stato risonante, a carica 2, trovato nello scattering π^+p , si trova anche negli stati di carica 1, 0 e -1 (scattering π^+n, π^-p, π^-n) con le stesse proprieta'. Viene quindi naturale assegnargli un numero quantico di isospin uguale a $3/2$; nel loro insieme, i 4 stati Δ costituiscono quindi un nuovo multipletto di isospin (quartetto). Poiche' si suppone che l'interazione forte conservi l'isospin, e' interessante cercare gli stati a isospin totale (e componente z) definiti per il sistema πp : questo consentira' di confrontare le sezioni d'urto totali per i diversi processi. Abbiamo allora, ricordando che gli stati di isospin si comportano come quelli di momento angolare:

$$\begin{aligned} I_N = 1/2 & ; |p\rangle = |1/2, +1/2\rangle, |n\rangle = |1/2, -1/2\rangle \\ I_{\pi} = 1 & ; |\pi^+\rangle = |1, +1\rangle, |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \\ |\pi^-p\rangle & = |1, -1, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle \\ |\pi^+n\rangle & = |1, +1, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, +1/2\rangle \\ |\pi^+p\rangle & = |1, +1, 1/2, +1/2\rangle = |3/2, +3/2\rangle \\ |\pi^-n\rangle & = |1, -1, 1/2, -1/2\rangle = |3/2, -3/2\rangle \\ |\pi^0p\rangle & = |1, 0, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|3/2, +1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, +1/2\rangle \\ |\pi^0n\rangle & = |1, 0, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

Se ora consideriamo una coppia qualsiasi di reazioni $\pi N \rightarrow \pi N$, la conservazione dell'isospin totale fornisce previsioni non banali sul rapporto delle rispettive sezioni d'urto: infatti, la conservazione dell'isospin totale implica che in questo caso ci siano solo 2 sezioni ampiezze fondamentali diverse, quella per $I=3/2$ e quella per $I=1/2$

Esempio:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \rightarrow A_A = A_B = A_{3/2} \quad \text{stati puri di isospin } 3/2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \rightarrow A_A = \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2}, A_B = A_{3/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{array} \right\} \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \frac{1}{3} A_{3/2} - \frac{2}{3} A_{1/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{array} \right\} \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \sqrt{\frac{2}{9}} A_{3/2} - \sqrt{\frac{2}{9}} A_{1/2}$$

Assumendo $A_{3/2} \gg A_{1/2}$, il che e' plausibile visto che l'ampiezza $A_{3/2}$ e' di per se' molto grande almeno nella zona della risonanza Δ , si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_A = \frac{1}{9} \sigma_B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_A = 9 \sigma_B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{array} \right\} \rightarrow \sigma_A = \frac{9}{2} \sigma_B$$

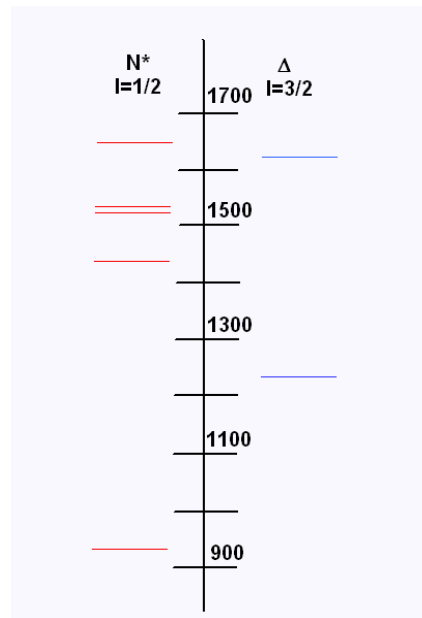
in ottimo accordo con i dati sperimentali.

9. Risonanze barioniche

In generale, la sezione d'urto totale πp vs l'energia mostra strutture extra nei confronti di quella $\pi^+ p$, come ci si attende visto che ad essa contribuisce l'ampiezza per $I=1/2$ che nella prima non compare. Il confronto fra le 2 permette di assegnare un valore di isospin alle risonanze osservate, che vengono cosi' raggruppate in due famiglie:

- stati a $I=1/2$ (parenti stretti del nucleone, almeno per cio' che riguarda l'isospin)
- stati a $I=3/2$ (parenti un po' meno stretti)

Uno schema semplificato, volutamente simile agli schemi dei livelli atomici e' mostrato nella figura che segue:



Come dovrebbe ormai risultare chiaro, l'analisi in momento angolare e in isospin porta a raggruppare le risonanze barioniche (con numero barionico = 1) in multipletti, costituiti da doppietti ($I=1/2$) o quartetti ($I=3/2$) di stati, ognuno caratterizzato da un certo valore di momento angolare.

10. Risonanze in produzione

L'analisi sommariamente descritta si riferisce ad un tipo particolare di esperimenti, nei quali si dice che la risonanza viene eccitata "in formazione", o anche "nel canale s ". Il significato di questa espressione sta nel fatto che l'osservazione della risonanza si effettua variando l'en. totale nel CM (si ricordi che $s=E_{CM}^2$) attraverso un range di valori ("spazzolando" E_{CM} attraverso la risonanza), e misurando ogni volta la sezione d'urto totale (oltre eventualmente ad altre quantità); per esempio, quando $E_{CM}=M_R$ si e' sul picco.

Questo non e' l'unica procedura possibile: quando si hanno a disposizione fasci di energia elevata e' in realta' spesso vantaggioso fare avvenire collisioni con $E_{CM} >$ (o anche $\gg$) M_R , nelle quali viene prodotta una varieta' di stati finali contenenti anche altre particelle, oltre a, o invece di quelle incidenti. La risonanza viene quindi studiata "in produzione", selezionando gli stati finali che contengono i prodotti di decadimento della risonanza stessa (che ha invariabilmente vita media molto breve, tale da rendere impossibile la sua rivelazione diretta nella collisione). In questo caso, dunque, E_{CM} viene mantenuta fissa.

E' interessante accennare a come si puo' mettere in evidenza la produzione di stati risonanti in questo caso: come detto sopra, la risonanza decade molto rapidamente in uno stato finale, che l'esperimento cerca di identificare. P.es., se si studia la Δ^{++} in produzione, si cercheranno collisioni che contengano nello stato finale $1 \pi^+ + 1 p$, oltre ad eventualmente altre particelle. Se si conoscono masse e 3-impulsi del π^+ e del protone, si calcola, collisione per collisione, la massa invariante dei 2, e se ne fa la distribuzione statistica su tutto il campione di eventi selezionato: la produzione di Δ^{++} si evidenzia, anche qui, come un picco nella distribuzione stessa. L'idea e' quindi in realta' molto semplice: la massa dello stato risonante e' una caratteristica invariante dello stato stesso, quindi deve essere uguale prima e dopo il decadimento; in altre parole, i prodotti del decadimento conservano, nelle loro caratteristiche cinematiche, il ricordo della provenienza da uno stato "madre" di una data massa.

Esempio: risonanza Δ^{++} in produzione

Consideriamo la reazione

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$$

Essa avviene a energie del π^+ incidente sufficientemente elevate (ossia, quando $E_{CM} > m_p + 3m_{\pi}$). Idealmente, si puo' pensare di misurare i 3-impulsi di tutte e 4 le particelle cariche dello stato finale (p.es., con uno spettrometro magnetico), e al tempo stesso di poterle identificare (ossia, dire quale e' un π , quale un p). In questo caso e' possibile costruire le 2 masse invarianti:

$$m_{p\pi_1}^2 = \left(\underbrace{p_p}_{4\text{-vettore}} + p_{\pi_1} \right)^2 = \left(\underbrace{E_p}_{comp.\text{tempo}} + E_{\pi_1} \right)^2 - \left(\underbrace{\mathbf{p}_p}_{comp.\text{spazio}} + \mathbf{p}_{\pi_1} \right)^2$$

$$m_{p\pi_2}^2 = (p_p + p_{\pi_2})^2 = (E_p + E_{\pi_1})^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\pi_2})^2$$

In generale, uno stato finale a 4 corpi ha (fissate le 4 masse) $3*4=12$ grandezze cinematiche che lo descrivono. La conservazione del 4-impulso impone 4 vincoli, quindi restano $12-4=8$ gradi di liberta' cinematici, che possono essere scelti come 8 fra le 12 componenti dei 3-impulsi, o (di solito piu' utilmente) come 8 funzioni di esse: per esempio, come le 2 masse invarianti definite sopra + altre 6 variabili. In questo caso, quindi, lo spazio delle fasi dello stato finale ha dimensione 8. Come si ricordera', se non ci sono effetti dinamici, la distribuzione degli eventi nello spazio delle fasi e' puramente statistica, e risulta in una certa forma per la distribuzione di frequenza delle variabili scelte. Ora, la presenza di uno stato risonante e' evidentemente un effetto dinamico: dipende dall'andamento degli sfasamenti, che dipende dal "potenziale", o da chi ne fa le veci. Quindi, ci si aspetta un aumento nella frequenza degli eventi prodotti, rispetto allo "spazio delle fasi", quando una

delle due masse invarianti e' vicina al valore di picco della risonanza Δ^{++} . Questo e' esattamente cio' che si osserva, come si puo' vedere:

3

QUASI-TWO-BODY PRODUCTION...

39

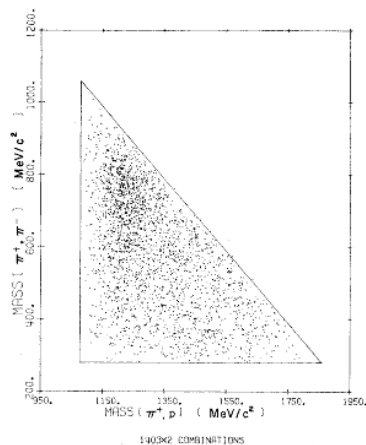


FIG. 1. Two-pion, proton-pion invariant-mass scatterplot for the reaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$. The boundary curve represents the kinematic limit for events produced by a 1.95-GeV/c momentum beam.

tions. The curves were constrained to be proportioned identically because the two histograms were simultaneously least-squares fitted.

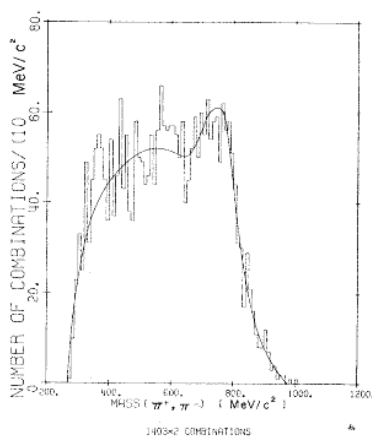


FIG. 2. Two-pion invariant-mass distribution from the reaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$. The fitted curve is composed of ρ^0 resonance, Δ^{++} reflections, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

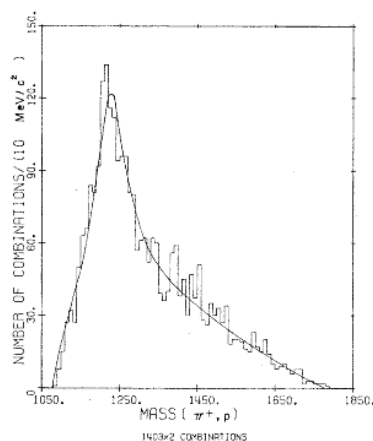


FIG. 3. Proton-pion invariant-mass distribution from the reaction $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$. The curve is the best fit to Δ^{++} resonance, ρ^0 reflection, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

The four functional forms for the hypothesized reactions were obtained by a Monte Carlo generation and contain no production dynamics. The fits to the two distributions are of suitable quality, exhibiting χ^2 values of 111 and 176 with 90 degrees of freedom in Figs. 2 and 3, respectively.

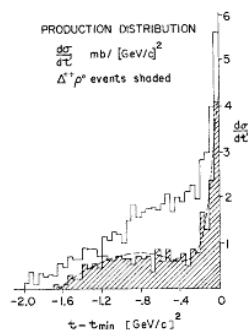


FIG. 4. Two-pion, proton-pion production distribution for $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- p$ events. All combinations appear in the unshaded graph and only those selected as $\Delta^+ \rho^0$ appear in the shaded plot. 524 events are contained within the shaded histogram of which 46 have a combinatorial ambiguity and are plotted twice with 0.5 weight. The curve is an exponential-plus-background fit which is described in the text.

11. Risonanze mesoniche

Questo procedimento puo' naturalmente essere esteso a qualunque coppia (o tripletta, o...) di particelle identificate e misurate nello stato finale: la ricerca e lo studio delle risonanze (da taluni chiamato familiarmente "piccologia") puo' quindi

estendersi anche a stati con $B=0$ (risonanze mesoniche). La maggior parte di essi e' stata appunto scoperta e studiata in esperimenti in produzione (tipicamente, in collisioni πN o pN a energie di qualche GeV nel CM). Lo studio e la determinazione dei numeri quantici delle risonanze, mesoniche e barioniche, ha costituito la gran parte dell'attivita' sperimentale agli acceleratori negli anni '60

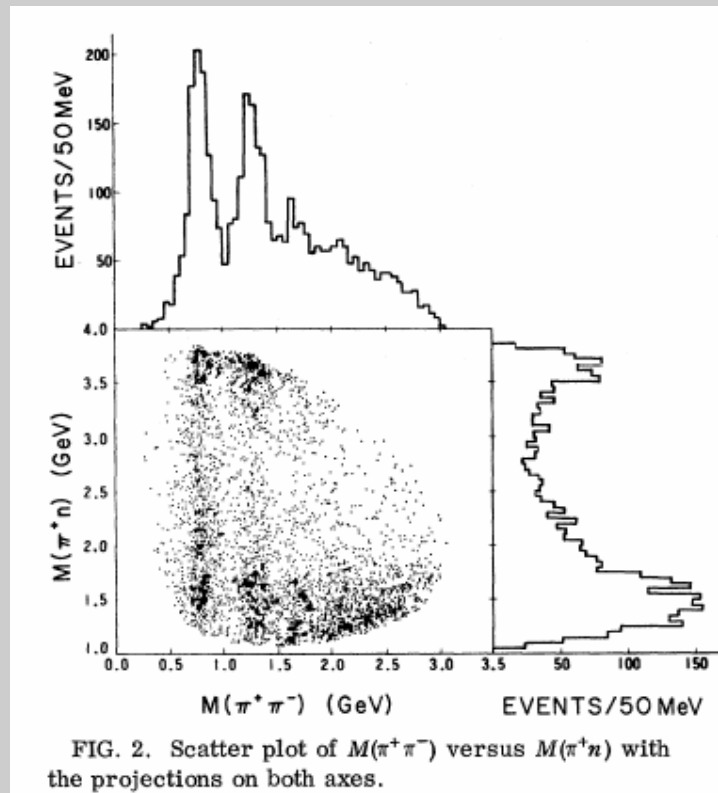
Esempio: analisi in spin-parita' della ρ

La risonanza mesonica ρ viene facilmente osservata in reazioni come questa:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$$

in cui il pione incidente ha un impulso di alcuni GeV.

Ci si attende la produzione di risonanze, sia di tipo barionico ($n\pi^+$, $n\pi^-$) sia nel canale mesonico ($\pi^+\pi^-$). Un tipico spettro di massa osservato in esperimenti di questo tipo e' mostrato nella figura:



Quello che si vede e' il Dalitz plot di $M(\pi^+\pi^-)$ vs $M(n\pi^+)$, e le sue proiezioni: e' evidente la presenza di picchi assai intensi in corrispondenza della massa della Δ^+ , e a valori di $M(\pi^+\pi^-)$ attorno a 750 e 1250 MeV. Questi picchi rappresentano un primo segnale della produzione di risonanze nelle collisioni. E' evidente l'interesse a determinare quali siano i numeri quantici degli stati risonanti, al fine di costruire un quadro spettroscopico complessivo per gli adroni.

Il mesone ρ e' soggetto a decadimento in 2π tramite l'interazione forte, quindi con tempi molto brevi, dell'ordine di 10^{-23} s, consistentemente con la sua larghezza di circa 120 MeV . Per determinare il momento angolare della ρ , si puo' confrontare la distribuzione angolare dei suoi prodotti di decadimento con quella prevista per uno stato di momento angolare dato: la difficolta' risiede nel modo con cui la distribuzione angolare viene misurata. In generale, se ci si pone nel CM dello stato che decade in 2 corpi la distribuzione angolare dei prodotti di decadimento dipende dallo stato di spin della particella madre: si puo' dimostrare che la distribuzione e' isotropa se la particella madre e' a spin 0 (ovvio), oppure se e' totalmente *non polarizzata* (ossia, se tutti i sottostati con diversi valori di J_z sono popolati uniformemente nella produzione).

Quest'ultimo risultato si puo' giustificare cosi': si consideri il decadimento in 2 corpi $A \rightarrow B + C$. Se lo spin di A e' J , e quello di B e C e' 0, si ha per la conservazione del momento angolare:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}$$

e della parita':

$$\eta_P^{(A)} = \eta_P^{(B)} \eta_P^{(C)} (-1)^l$$

Si avra' allora per l'ampiezza di decadimento del generico sottostato magnetico in cui si puo' trovare la particella madre:

$$|JM\rangle = |lm\rangle \rightarrow A(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$$

ammesso che la conservazione della parita' lo consenta. Per il nostro caso particolare deve essere

$$\eta_P^{(A)} = (-1)^l$$

$$\eta_C^{(A)} = (-1)^l$$

Se tutti i sottostati sono ugualmente popolati, la probabilita' statistica di ogni singolo sottostato e' $1/(2J+1)$. Quindi, la distribuzione angolare viene:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta, \varphi)$$

Ricordando la proprieta' delle armoniche sferiche

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m Y_l^{*m} = \frac{2l+1}{4\pi}$$

si ha appunto che

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \frac{2J+1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

Quindi, per osservare una distribuzione angolare non isotropa occorre che la ρ sia prodotta con qualche tipo di polarizzazione (ossia, con qualche disuniformita' nella popolazione dei sottostati magnetici). Questo e' in effetti cio' che avviene, perche', essendo il processo di produzione governato dalla interazione forte, che conserva la parita', la polarizzazione longitudinale non e' permessa

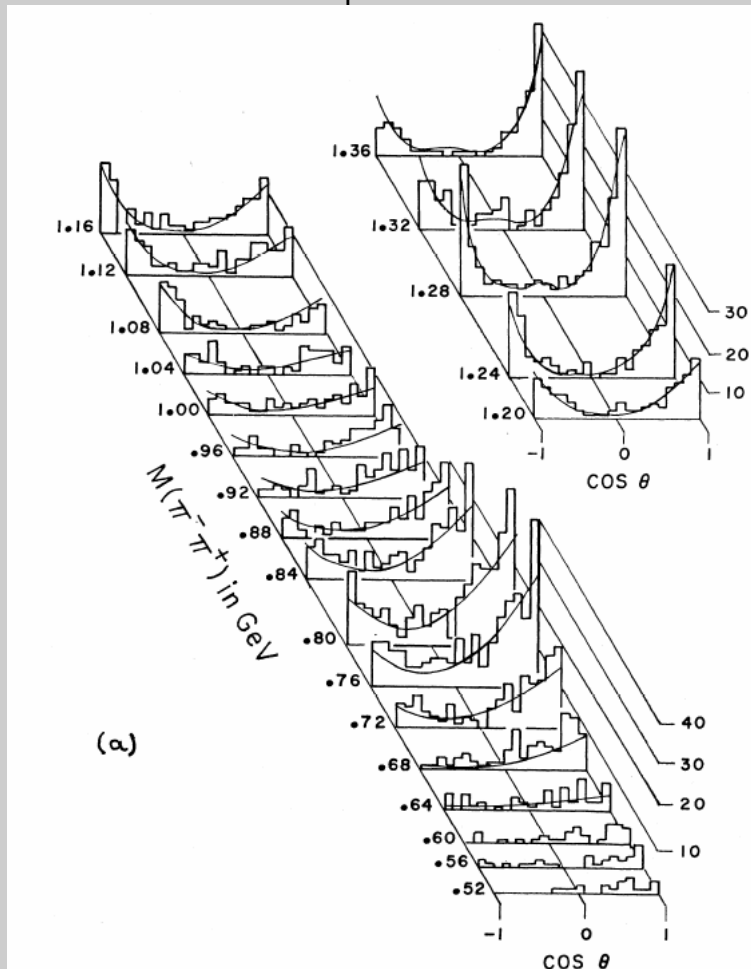
Questo si puo' vedere nel seguente modo: sia $\mathbf{J}$ lo spin della ρ . Esso e' un vettore assiale, con il quale e' immediato costruire le seguenti quantita':

$\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_\rho \propto$ proiezione longitudinale di $\mathbf{J} \rightarrow$ pseudoscalare

$\mathbf{J} \cdot (\underbrace{\mathbf{p}_{\pi_{inc}} \times \mathbf{p}_\rho}_{\text{pseudovettore}}) \propto$ proiezione trasversale di $\mathbf{J} \rightarrow$ scalare

Quindi non puo' esserci polarizzazione longitudinale, che non sarebbe invariante per parita'; quindi i sottostati magnetici non possono essere uniformemente popolati

Si puo' allora misurare la distribuzione angolare del decadimento della ρ nel suo CM, ottenendo risultati come questi:



Sull'asse inclinato sono riportati i valori della massa $\pi^+\pi^-$, mentre su quello orizzontale i valori di $\cos\theta$; ci sono 2 regioni di massa visualizzate, la prima nell'intorno del picco della ρ , la seconda attorno al picco di un'altra risonanza, la ρ' . Si osserva immediatamente che la distribuzione angolare cambia decisamente forma vicino al picco: l'andamento e' consistente con quello atteso per una risonanza a spin 1, ossia $|Y_1^0|^2 \propto \cos^2 \theta$.

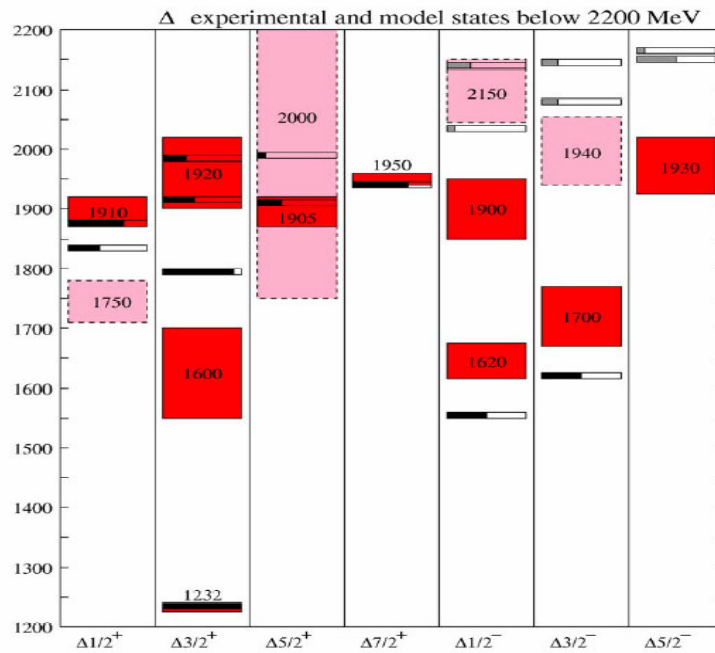
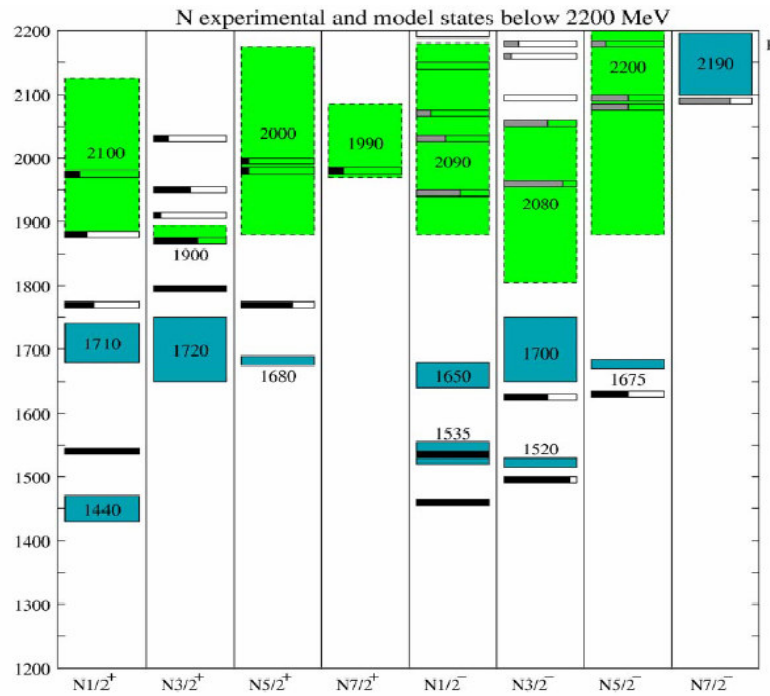
NB Si osservi come invece nella regione della ρ' l'andamento sia diverso, non consistente con spin 1: in effetti, e' piu' consistente con uno spin 2, ossia $|Y_2^0|^2 \propto (3\cos^2 \theta - 1)^2$

12. Resume' sugli stati adronici a stranezza nulla

a) Risonanze barioniche

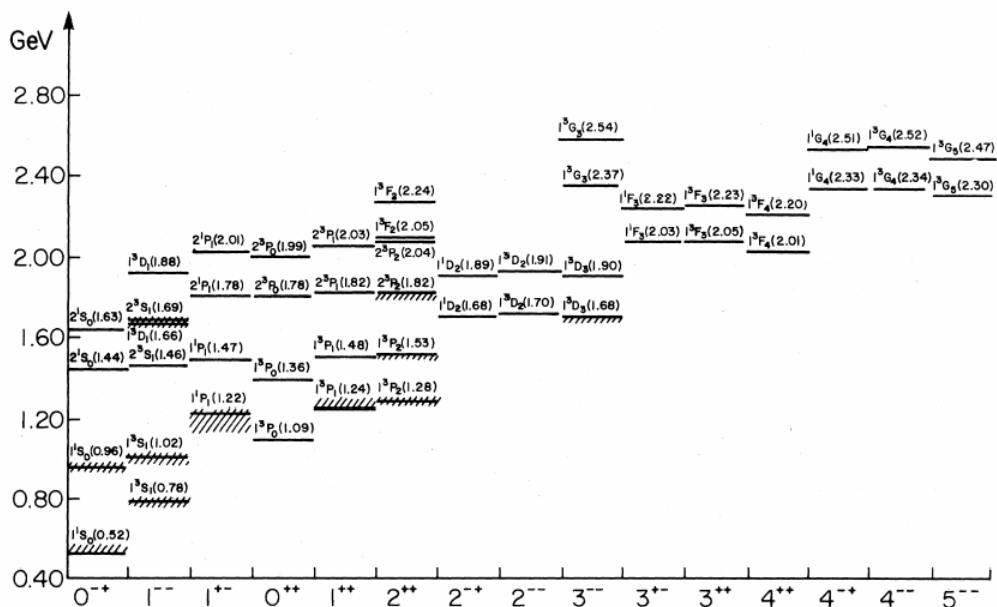
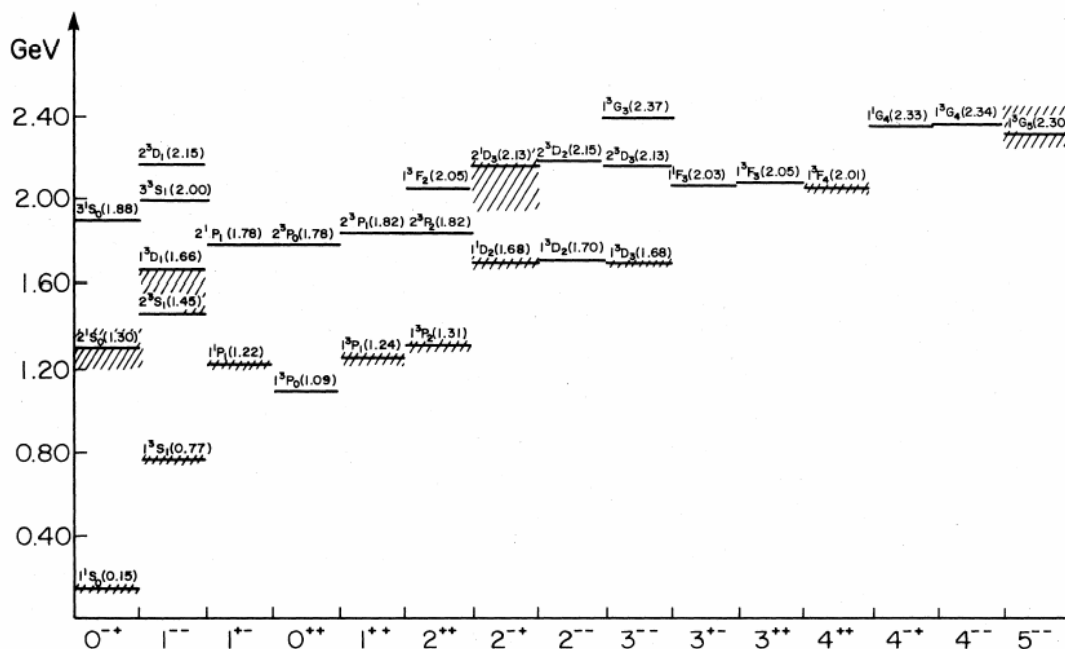
I seguenti schemi mostrano gli stati eccitati del nucleone, separatamente per la famiglia a isospin $1/2$ e quella a isospin $3/2$ (i dati sono tratti dalla presentazione di *S.Capstick, Florida State University*, alla conferenza *Baryons 2002*.) I grafici mostrano i livelli energetici (energia sull'asse verticale) verso il momento angolare totale (e parita') (asse orizzontale). Occorre ricordare che ognuno degli stati Δ compare poi in 4 stati di carica (quartetti, $I=3/2$), mentre ogni stato N^* compare in 2 stati di carica (doppietti, $I=1/2$). Le barre orizzontali bianconere mostrano il valore sperimentale della massa (la percentuale di nero da' il rapporto di decadimento, fra 0 e 1, per il modo $N\pi$). Le aree colorate mostrano gli intervalli di massa previsti da un modello teorico.

E' evidente la grande ricchezza di questi stati eccitati del nucleone, e anche come l'analisi in spin-parita' porti naturalmente a raggrupparli secondo il valore dei loro numeri quantici, di spin e isospin: considerando i gruppi a massa piu' bassa, osserviamo un doppietto a *isospin* $\frac{1}{2}$, *spin* $1/2$ (il nucleone), e un quartetto a *isospin* $3/2$, *spin* $3/2$ (la delta).



b) Risonanze mesoniche

I seguenti grafici, tratti da *S. Godfrey et al., PRD 32, 189 (85)*, mostrano una parte dei principali stati mesonici conosciuti, separatamente per stati isovettoriali e isoscalari



Anche qui, sull'asse verticale stanno le energie, mentre sull'asse orizzontale stanno i momenti angolari totali (e i numeri quantici P e C). Come al solito, le aree ombreggiate indicano le regioni di massa previste da un modello teorico.

NOTA IMPORTANTE: In questi grafici non sono rappresentati gli stati con numeri quantici di *stranezza*, *charm*, *bottom* diversi da zero, ne' i cosiddetti *-onia*, ossia gli stati legati q - $\bar{q}$ dei quark pesanti (c, b).

Gli stati con ugual valore di J^{PC} e diversa energia vengono chiamati le eccitazioni radiali del sistema: essi corrispondono, in senso lato, ai livelli energetici di un atomo o di un nucleo, che hanno un diverso numero quantico principale. Si osservi come gli stati con diverso valore di J^{PC} non siano degeneri in energia: come si ricorderà, nel caso dell'atomo di idrogeno le successive approssimazioni all'hamiltoniano totale (massa relativistica, struttura fina, struttura iperfina, polarizzazione del vuoto,...) introducono correzioni ai livelli che rimuovono del tutto la elevata degenerazione presente quando si considera solo il potenziale coulombiano. Nell'ipotesi in cui anche gli adroni siano oggetti dotati di struttura interna, il meccanismo può essere fondamentalmente simile: ma la forma delle interazioni, e quindi dei termini dell'hamiltoniano, sarà naturalmente assai diversa. In questo caso, gli stati più bassi sono un terzetto a *isospin 1, spin 0* (il π), due singoletti a *isospin 0, spin 0*, (la η e la η') un terzetto a *isospin 1, spin 1* (la ρ), due singoletti a *isospin 0, spin 1* (la ω e la ϕ). Questi stati sono tutti prodotti con elevata sezione d'urto nelle collisioni fra adroni, e anche nelle interazioni fra il campo elettromagnetico e gli adroni.

13. Stranezza e altri flavor: allargamento del quadro osservativo

I numerosi stati mesonici e barionici descritti sopra non esauriscono il quadro osservativo fornito dagli esperimenti. Come è noto, fra le fine degli anni '40 e l'inizio degli anni '50 fu osservata, prima nella radiazione cosmica, e poi ai primi acceleratori di alta energia (il *Cosmotron* a Brookhaven e il *Bevatron* a Berkeley), la produzione di stati adronici instabili di tipo peculiare. La loro caratteristica principale era il forte contrasto fra la elevata sezione d'urto di produzione in urti adrone-adrone, tipica dell'interazione forte, e la lunga vita media, tipica dell'interazione debole: per questo motivo le nuove particelle vennero chiamate "strane".

Può non essere inutile ri-inquadrare il contesto concettuale nel quale si situano le particelle strane: perché sono strane? Il fatto è che, in linea generale, il meccanismo dinamico che governa la produzione di una particella è lo stesso che governa il suo decadimento: questo è una conseguenza di diverse proprietà di simmetria fondamentali (time reversal, crossing etc). Quindi p.es. se il barione Λ^0 viene prodotto con elevata sezione d'urto per interazione forte, non si vede perché poi non debba decadere, sempre per interazione forte e quindi con vita media molto breve. Viceversa, la sua vita media è molti ordini di grandezza più lunga di quella tipica di un decadimento forte, come quella della Δ^{++} . Questo fatto indica la presenza di una diversa e particolare regola di selezione.

Un'altra caratteristica osservata sperimentalmente era la *produzione associata*, ossia il fenomeno per cui le particelle strane erano sempre prodotte a coppie negli urti fra nucleoni o fra pioni e nucleoni. Il puzzle venne infine risolto introducendo un nuovo numero quantico, la *stranezza* appunto, nullo per tutti gli adroni 'tradizionali', e diverso da zero per le particelle strane; e una nuova regola di selezione, la conservazione della stranezza, osservata dalle interazioni forti e violata da quelle deboli. Così, la produzione associata veniva spiegata con la necessita' di conservare la stranezza nel processo forte di produzione (infatti, ad ognuno dei due stati strani viene associata una stranezza opposta, p.es. 1 e -1); e il decadimento debole in adroni non strani con la violazione della stranezza.

La spettroscopia delle particelle strane assomiglia a quella degli adroni tradizionali: ci sono stati mesonici a spin 0 e 1, i mesoni K e K^* , che si osservano in 4 varietà: 2 con carica +va e -va, e 2 neutri (quest'ultimo fatto ha costituito per parecchio tempo un puzzle nel puzzle generale rappresentato dalle proprietà delle particelle strane, perché c'è voluto tempo per capire cosa distingue un tipo di mesone K neutro dall'altro. Lo studio del sistema $K^0 - \bar{K}^0$ è in sé e per sé uno dei capitoli più interessanti della fisica delle particelle, e una importante finestra sulla fisica del Modello Standard); e stati barionici con spin $\frac{1}{2}$ e $3/2$. Tutti questi stati si possono raggruppare in vari multipletti di isospin.

L'assegnazione di valori opportuni del numero quantico di stranezza alle particelle strane può sembrare un po' artificiosa: dopo tutto, per spiegare qualcosa che non si capisce, si inventa qualcos'altro che non si sa cosa sia! P.es., la stranezza non risulta associata a un campo di interazione, come la carica elettrica. L'idea è però meno discutibile di quel che può sembrare, se si fa riferimento all'ipotesi che le particelle strane abbiano valore definito di isospin: questa ipotesi, oltre che confermata a posteriori, è in accordo con la nostra generica concezione del meccanismo di interazione, basata sullo scambio di stati virtuali. Per esempio, nella diffusione elastica

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

si può assumere, fra gli altri, uno stato virtuale attraverso il quale la reazione può procedere:

$$\pi^- + p \rightarrow (K^0 + \Lambda^0)^* \rightarrow \pi^- + p$$

che deve mantenere il valore definito di isospin. Nell'ipotesi che *l'isospin sia conservato anche nelle interazioni forti delle particelle strane*, consideriamo dunque il problema di assegnare ogni particella strana ad un multipletto di isospin:

- a) Barione Λ^0 : poiché si osserva solo nello stato neutro, assegniamo $I=0, I_3=0$
- b) A bassa energia, si osserva la reazione di produzione associata:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

Quindi lo stato finale deve essere, come quello iniziale, nello stato $I=1/2$ o $3/2$, e quindi il K^0 deve avere isospin $I=1/2$ o $3/2$. L'assenza di stati doppiamente carichi per il K porta ad escludere l'esistenza di quartetti ($I=3/2$), e ad ipotizzare l'esistenza di due doppietti a $I=1/2$. Per uno di essi viene immediato assumere

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Rimane il problema della collocazione del K nell'altro doppietto. Ora, si può ricordare che le interazioni forti sono invarianti per C (coniugazione di carica): ci aspettiamo quindi effettivamente che, accanto al doppietto citato, ne debba esistere un secondo, contenente gli stati coniugati di carica di quelli del primo. Esso conterrà quindi il $\bar{K}$, e un secondo stato neutro, secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

In altre parole, la conservazione dell'isospin impedisce di assegnare i K a un tripletto, come si sarebbe tentati di fare sull'esempio dei π ! D'altra parte, l'identificazione del secondo stato neutro $\bar{K}^0$, di primo acchito, assai problematica: ancora una volta, i dati sperimentali vengono in aiuto, con l'indicazione che modi diversi di decadimento del K neutro hanno due vite medie diverse. Per quanto il mistero resti fin qui tutt'altro che chiarito, c'è per lo meno evidenza che i K neutri hanno due modalità distinte di decadimento debole: non è quindi del tutto infondata l'ipotesi che ci siano due specie di K neutri.

c) Similmente si può procedere per le altre particelle strane, pervenendo a identificare, oltre al singoletto Λ^0 , un tripletto $\Sigma^{+,0,-}$, un doppietto $\Xi^{-,0}$ e un altro singoletto Ω^0 . In effetti,

L'indagine sperimentale ha via via posto in evidenza la produzione di stati con diverso valore di stranezza, fino a $S=-3$! (Per convenzione storicamente consolidata, per ciò che riguarda i barioni strani - chiamati anche collettivamente *iperoni* - la stranezza degli stati di particella e^- -va, mentre quella degli stati di anti-particella e^+ +va). Per altro, lo studio sperimentale con fasci di K su bersagli di idrogeno o di deuterio rivela, nel caso del K , una struttura a risonanze, analoga a

quella osservata con fasci di π , mentre risulta in un andamento liscio della sezione d'urto per il K^* .

Riassumendo, il numero quantico di stranezza assomiglia un po' alla carica elettrica, con 2 differenze fondamentali:

la carica elettrica e' assolutamente conservata da tutte le interazioni; la stranezza non e' conservata dalla interazione debole

la carica elettrica e' la sorgente del campo elettromagnetico; la stranezza non e' la sorgente di alcun campo fisico

Le particelle strane a massa piu' bassa possono allora essere raggruppate nei seguenti multipletti di isospin e stranezza:

MESONI

Spin 0

I_3	$S=+1$	$S=-1$
+1/2	K^+	$\bar{K}^0$
-1/2	K^0	K^-

Spin 1

I_3	$S=+1$	$S=-1$
+1/2	K^{*+}	$\bar{K}^{*0}$
-1/2	K^{*0}	K^{*-}

BARIONI

I_3	S	nome
0	-1	Λ^0
+1/2, -1/2	-1	$\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$
+1/2, -1/2	-2	Ξ^0, Ξ^-
0	-3	Ω^-

ANTIBARIONI

I_3	S	nome
0	+1	$\bar{\Lambda}^0$
+1/2, -1/2	+1	$\bar{\Sigma}^+, \bar{\Sigma}^0, \bar{\Sigma}^-$
+1/2, -1/2	+2	$\bar{\Xi}^0, \bar{\Xi}^-$
0	+3	$\bar{\Omega}^-$

Le relazione di Gell-Mann e Nishijima puo' essere mantenuta valida modificandola nel modo seguente:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

dove la quantita' Y cosi' definita si chiama *ipercarica*.

Si conclude quindi, che la stranezza, un po' come l'isospin, si presenta come un *nuovo grado di liberta'* delle particelle ad interazione forte

A partire dalla seconda meta' degli anni '70, e nel seguito fino ad oggi, si sono osservate altre due 'famiglie' di particelle, analoghe a quelle con stranezza, chiamate particelle con *charm* e con *beauty*. Anche per esse si e' rivelata una ricca struttura spettroscopica, non ancora del tutto svelata e interpretata a causa delle grandi difficolta' sperimentali. Fra l'altro, proprieta' simili a quelle del sistema $K^0 - \bar{K}^0$ si osservano anche per i sistemi analoghi $D^0 - \bar{D}^0$ e $B^0 - \bar{B}^0$. In accordo con le previsioni del modello a quark, si sono cominciate a osservare anche particelle di tipo 'misto' (con stranezza e charm, stranezza e beauty, charm e beauty)