

# Scattering adrone-adrone, risonanze, isospin, stranezza, simmetrie unitarie

## 1. Lo studio iniziale dell'interazione forte

Accanto alla diffusione elettrone-nucleo, governata dall'interazione elettromagnetica, e' possibile sondare le proprieta' di nuclei e nucleoni studiando le caratteristiche di processi di scattering dominati dall'interazione forte. Si usano quindi come proiettili e bersagli protoni, deutoni, nuclei.

Storicamente, anzi, questo e' stato il primo mezzo di indagine utilizzato in pratica, reso possibile dalla costruzione dei primi acceleratori: per ragioni di sviluppo tecnologico piu' rapido, le prime macchine acceleratrici di energia relativamente alta (centinaia di MeV) e intensita' adeguata erano *sincrociclotroni*, capaci di accelerare protoni, deutoni o nuclei leggeri, ma non elettroni. Le macchine per elettroni di energia simile (*betatroni*), oltre ad essere state sviluppate un po' dopo, sono intrinsecamente difficili da utilizzare per esperimenti in coincidenza.

Tutte queste particelle cariche (e stabili) sono capaci di interagire fortemente (il nome comune a tutte le particelle che sentono l'interazione forte e' *adroni*), quindi lo studio dei processi d'urto che le coinvolgono fornisce informazioni sulle proprieta' dell'interazione forte.

## 2. Proprieta' fondamentali dell'interazione forte

Come si ricordera', le caratteristiche piu' importanti dell'interazione forte, che emergono dallo studio delle proprieta' dei nuclei, sono le seguenti:

- Elevata intensita'

L'energia di legame dei nucleoni nel nucleo (8 MeV/nucleone in media) richiede forze molto intense fra i nucleoni per essere spiegata (a parita' di distanza,  $\approx 10-20$  volte le forze elettriche fra le stesse particelle)

- Corto raggio di azione

Le dimensioni dei nuclei sono  $\approx 1$  fermi

- Indipendenza dalla carica elettrica

Livelli energetici dei nuclei speculari  $\rightarrow$  forza pp  $\approx$  forza pn  $\approx$  forza nn

Occorre dire subito che le interazioni forti fra nucleoni, o fra adroni in genere, vengono oggi interpretate come dovute ad un'interazione *residua* (non veramente fondamentale, della quale sono solo le vestigia), alla stessa stregua delle interazioni fra atomi e molecole *neutre* (forze di van der Waals): pur essendo dovute esclusivamente all'interazione elettromagnetica, ne sono solo il residuo. Questo avviene perche' oggi pensiamo che gli stati adronici siano *singoletti di colore* (ossia, stati a colore netto nullo), quindi incapaci di interagire attraverso le forze di colore, che sono la vera interazione fondamentale, se non nella misura in cui esse si manifestano, appunto in qualche forma residua, anche fra stati "bianchi". In questo senso, collegare l'interazione fra adroni, che da' luogo fra l'altro alle proprieta' caratteristiche dei nuclei, alle forze di colore non e' un compito semplice; lo studio iniziale dell'interazione forte, prima dell'introduzione dell'idea di colore, e della comprensione delle sue proprieta', e' stato quindi caratterizzato da un largo uso di modelli, piu' o meno ad hoc, che non avevano la pretesa di una teoria fondamentale. In certi casi, l'utilita' di questi modelli e' effettivamente rimasta, proprio a causa delle difficolta' di trattazione di molti problemi a livello di teoria fondamentale. Il primo modello specifico dell'interazione forte fu proposto negli anni '30 da Yukawa. Come e' noto, Yukawa (1935) fece l'ipotesi che, in analogia all'interazione elettromagnetica - in cui la forza fra cariche e' dovuta allo scambio di fotoni virtuali, l'interazione fra due nucleoni fosse dovuta allo scambio di una nuova particella virtuale. Le principali differenze fra la particella prevista e il fotone sono:

- *massa a riposo  $\neq 0$*   
questo ha a che fare con il range limitato
- *spin  $\neq 1$*   
questo ha a che fare con l'interazione, prevalentemente attrattiva, fra particelle identiche
- *carica sia  $\neq 0$ , sia  $= 0$*   
questo ha a che fare con l'esistenza di interazioni (forti) uguali fra coppie di nucleoni di carica uguale e diversa (*pp*, *nn*, *pn*)

Giustificazione delle affermazioni precedenti

*Spin pari e dispari*

Lo scambio di particelle virtuali a spin pari (0,2,..) da' luogo solo a forze attrattive, sia fra coppie di particelle identiche, sia fra coppie particella/antiparticella; quello di particelle a spin dispari (1,3,..) a forze repulsive fra particelle identiche, attrattive fra particella e antiparticella. Questo e' un risultato generale della teoria dei campi

### *Massa a riposo e range*

Il potenziale scalare (p.es. coulombiano) e' la componente temporale del 4-potenziale elettromagnetico  $A^\mu$ , ciascuna componente del quale soddisfa separatamente l'eq. delle onde.

$$\square A^\mu = \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = -j^\mu$$

Si noti come  $\phi$  sia un 3-scalare, ma non un 4-scalare. L'assenza di un termine di massa nell'equazione si traduce, come e' noto, nel range infinito dell'interazione e.m.; questo e' equivalente, dopo la quantizzazione, all'assenza di massa a riposo per il fotone. L'eq. per la componente tempo (potenziale scalare) e' allora:

$$\square \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = -\rho$$

Si consideri l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Essa e' un caso particolare (statico) dell'eq. delle onde per il potenziale scalare. La soluzione per una carica puntiforme (la funzione di Green) e' ben conosciuta:

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}) \rightarrow \phi(r) = \frac{e}{r} \quad \text{potenziale coulombiano}$$

Invece dell'equazione per il potenziale  $A^\mu$ , si puo' considerare quella per un campo che sia un 4-scalare (v. equazione di Klein-Gordon), che si scrive:

$$(\square - m^2)\chi = -\gamma$$

dove  $\gamma$  (invariante di Lorentz) rappresenta il termine di sorgente per il campo, analogamente a  $j_\mu$  per  $A^\mu$ .

Considerando al solito il caso statico si ha:

$$\gamma(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}) \rightarrow \chi = \frac{g}{r} e^{-mr}$$

Quindi  $\chi$  e' una generalizzazione del potenziale coulombiano, che si presenta come il caso limite per  $m$  che va a 0. E' evidente che il potenziale di Yukawa ha un range finito (smorzamento esponenziale per  $r \gg 1/m$ ), legato al valore della massa  $m$ .

Così come il fotone e' l'eccitazione elementare (a massa nulla) del campo elettromagnetico quantizzato, la quantizzazione del nuovo, ipotetico campo

di Yukawa fa emergere una struttura particellare, fatta di quanti con massa diversa da zero, il cui scambio fra nucleoni dà luogo all'interazione forte. In linea con l'osservazione fatta più sopra, ci aspettiamo che la particella scambiata fra nucleoni debba avere spin pari, per generare sempre interazione attrattiva; il modello più semplice è quindi quello con spin 0, come descritto appunto dall'eq. di Klein-Gordon.

La particella predetta da Yukawa nel 1935 fu effettivamente trovata nella radiazione cosmica una decina di anni dopo, e fu chiamata *mesone  $\pi$* . Subito dopo, essa fu osservata essere abbondantemente prodotta nelle interazioni fra i protoni accelerati dai sincrociclotroni, a Chicago e Berkeley.

Le proprietà principali del pione sono:

*massa: circa 135-139 MeV (neutro-carico)*

*carica: +va, -va, nulla*

*spin/parità: 0/negativa*

*decadimenti:*

*carico - stabile rispetto a interazioni forti; decade debolmente*

*neutro - stabile rispetto a interazione forte; decade elettromagneticamente*

La spiegazione della stabilità rispetto ai decadimenti forti è molto semplice: non ci sono altri adroni con massa più piccola! Per una buona descrizione delle esperienze che condussero alla determinazione delle proprietà sopra citate, inclusi i lavori originali, si rinvia p.es. al testo di Cahn-Goldhaber.

L'interpretazione del  $\pi$  come mediatore della interazione forte fra nucleoni, unita alla sua relativa stabilità (leggi: vita media lunga, che consente di costruire *fasci di  $\pi$*  carichi di energia elevata agli acceleratori), suggerisce immediatamente la possibilità di utilizzarlo come *sonda* per studiare le proprietà dell'interazione forte: così come lo studio dello scattering  $\gamma N$  dà informazione sulla struttura elettromagnetica di nuclei e nucleoni, quello dello scattering  $\pi N$  dà informazioni sulla loro struttura forte.

### 3. Isospin

È utile ricordare che l'indipendenza dalla carica porta a introdurre una nuova proprietà delle particelle a interazione forte, ossia l'*isospin*. Nello stesso modo con cui il grado di libertà spin etichetta i diversi sottostati di momento angolare intrinseco in cui può trovarsi una particella, il grado di libertà isospin serve ad etichettarne i diversi sottostati di carica. In base a questa proprietà, le particelle vengono raccolte in *multipletti*, i componenti dei quali hanno proprietà simili (inclusa la massa) e diversa carica elettrica. L'esempio più immediato è quello di

protone e neutrone, che sono considerati sottostati di un'unica particella, il nucleone (particella *isospinoriale* - doppietto). L'esistenza del  $\pi$  in 3 distinti stati di carica porta ad assegnargli un valore di isospin uguale a 1 (particella *isovettoriale* - ossia, tripletto). Come per il momento angolare, il valore di  $I$  specifica il multipletto; per identificare il singolo stato, caratterizzato dal valore della sua carica elettrica, occorre specificare anche la 3a componente  $I_3$ .

Per il pione, vale dunque la relazione:

$$Q = I_3$$

che deve essere estesa, per includere il caso del nucleone, nel seguente modo:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

Questa relazione fra i numeri quantici si chiama *relazione di Gell-Mann e Nishijima*.

A questo livello, la relazione di Gell-Mann e Nishijima e' da considerarsi come del tutto empirica, ossia non giustificata da proprieta' o ipotesi piu' generali. In altre parole, non si puo' 'dimostrarla'....

Il meccanismo generale di descrizione di stati e operatori e' lo stesso di quello usato per lo spin, con la sola importante differenza che, nel caso dell'isospin, le osservabili in gioco *non* sono grandezze meccaniche. La completa equivalenza di tutti i sottostati, dal punto di vista dell'interazione forte, unita al principio di sovrapposizione, porta a considerare come equivalenti anche tutte le combinazioni lineari dei sottostati stessi: esattamente come per il caso dello spin, tali combinazioni lineari corrispondono a 'rotazioni' del sistema, in questo caso in uno spazio astratto. L'invarianza delle interazioni forti per isorotazioni porta naturalmente a concludere che il generatore delle trasformazioni, ossia il **vettore isospin totale**, deve essere una quantita' conservata in ogni processo forte, esattamente come il momento angolare totale.

Il presente richiamo sulle proprieta' dell'isospin puo' sembrare piuttosto frettoloso e non troppo soddisfacente. In una parte successiva la discussione verra' ripresa in modo piu' ampio e completo nel contesto delle simmetrie unitarie, dal punto di vista del formalismo della teoria dei gruppi.

#### 4. Scattering $\pi N$ ; risonanze

Lo studio sperimentale dello scattering  $\pi N$  riserva numerose sorprese. La piu' importante, e la prima ad essere osservata sperimentalmente negli esperimenti fra la fine degli anni '40 e l'inizio degli anni '50, primo di tutti da Fermi e collaboratori a Chicago, e' l'andamento della sezione d'urto totale vs. l'energia: in figura e' rappresentato sia per il  $\pi^+$  sia per il  $\pi^-$ .

39. Plots of cross sections and related quantities 010001-13

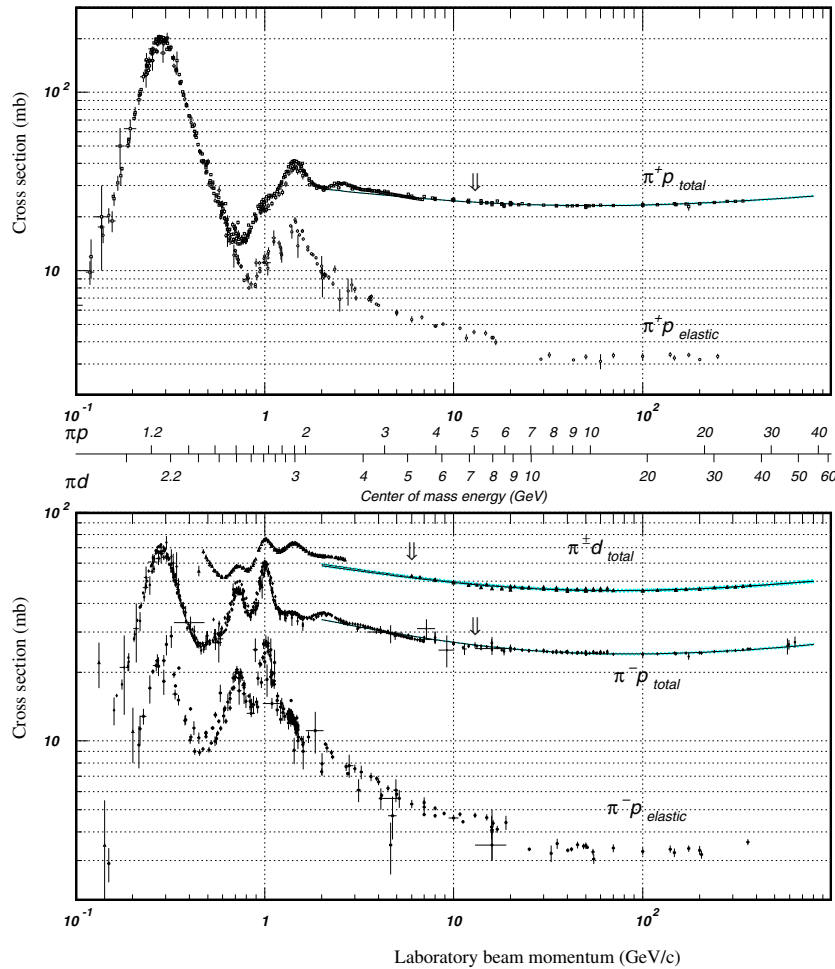
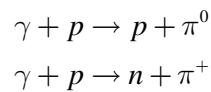


Figure 39.14: Total and elastic cross sections for  $\pi^\pm p$  and  $\pi^\pm d$  (total only) collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding computer-readable data files may be found at <http://pdg.lbl.gov/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS Group, IHEP, Protvino, Russia, August 2001.)

Come si vede facilmente, la sezione d'urto totale presenta una ricca struttura, totalmente inaspettata a priori. I picchi osservati nella sezione d'urto totale in corrispondenza di particolari valori per l'energia totale nel CM sono interpretati come *stati risonanti* (v. note sulla teoria dello scattering, e nel seguito). In sostanza, uno stato risonante, pur non facendo parte della famiglia degli stati

legati del sistema fisico considerato, ha alcune caratteristiche abbastanza simili: vita media relativamente "lunga", distribuzione spaziale dei componenti relativamente "delimitata", eventualmente diversi modi di decadimento in competizione. E' anche possibile assegnare allo stato risonante dei numeri quantici come si fa per uno stato stazionario (massa a riposo, momento angolare, parita', etc). Uno dei passi fondamentali nell'interpretazione degli stati risonanti come stati eccitati del nucleone, essenzialmente sullo stesso piano di quello fondamentale, e' stata l'osservazione degli stati stessi anche nelle collisioni fotone-nucleone: in quest'ultimo caso, la reazione non e' quella elastica, ma una reazione di *fotoproduzione*



Nel caso delle risonanze nello scattering  $\pi N$ , e in altri casi analoghi, le principali differenze con eventuali stati legati consistono nella vita media molto breve e nella massa a riposo > della somma delle masse dei componenti. Si puo' osservare come la larghezza del picco risonante sia elevata (in senso lato, dello stesso ordine dell'energia di picco !): ora, la larghezza del picco e' una misura dell'incertezza sul valore centrale della energia di risonanza. In base alla relazione di indeterminazione tempo-energia,  $\Delta E \Delta t \geq 1$ , a una vita media breve corrisponde una larghezza elevata, quindi risonanze larghe hanno una elevata probabilita' di decadimento per unita' di tempo.

#### La relazione di indeterminazione tempo-energia

Vale forse la pena di insistere un po' sull'argomento: la relazione di indeterminazione posizione-momento mette a confronto le incertezze sulla conoscenza dei possibili valori di due operatori hermitiani; quella tempo-energia, viceversa, collega le incertezze fra la conoscenza del valore dell'operatore hamiltoniano e di quello del parametro durata della misura (o del sistema).

Questa relazione e' gia' presente nella fisica ondulatoria classica: per un pacchetto d'onde, piu' breve e' la durata del pacchetto, piu' grande e' l'incertezza sulla banda di frequenze che lo compongono. Poiche' le energie, per un sistema quantistico, sono proporzionali alle frequenze, un sistema instabile con vita media breve presentera' un'elevata indeterminazione sull'energia posseduta (sara' cioe' in uno stato che contiene componenti ad energia anche molto diversa).

Il fenomeno della risonanza in meccanica quantistica e' assai rilevante, non solo nelle applicazioni in fisica delle particelle, e fornisce un'illustrazione diretta di quanto detto sopra.

Si consideri uno stato stazionario, descritto da una funzione d'onda del tipo:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-iE_0 t}$$

La trasformata di Fourier di  $\psi$ , fatta rispetto alla variabile tempo, fornisce l'ampiezza di probabilit  per l'energia dello stato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE_0 t} e^{iEt} dt = \delta(E - E_0)$$

Coerentemente con cio' che ci attendiamo per uno stato stazionario, l'energia ha valore definito.

Possiamo pero' considerare uno stato piu' generale di quello visto prima, nel quale attribuiamo ad  $E$  un valore *complesso* (ossia, che oltre ad avere una parte reale ha anche una parte immaginaria). Uno stato cos  fatto sarebbe un autostato di un hamiltoniano non hermitiano, e quindi presenterebbe un problema di interpretazione: tuttavia, il significato fisico puo' essere compreso facilmente separando in  $E$  parte reale e immaginaria:

$$e^{-iEt} = e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} = e^{-iE_0 t} e^{-\Gamma t}, \quad t > 0$$

Evidentemente, la norma di questo stato non e' costante nel tempo, anzi decresce esponenzialmente. Lo stato e' quindi non stazionario, con andamento esponenziale nel tempo e *vita media*  $= 1/\Gamma$ . Vale le pena di ricordare che, per una distribuzione esponenziale delle durate di uno stato, ci si aspetta uno scarto quadratico medio (cioe' un'incertezza statistica sulla durata dello stato) uguale alla stessa vita media  $1/\Gamma$ : data la natura statistica del processo di smorzamento, la vita media e' quindi anche una misura dell'*indeterminazione* della durata dello stato.

[Il nostro modo di descrivere lo stato e' certamente incompleto: tanto per fare un esempio, l'energia associata allo stato non si conserva! Questa osservazione suggerisce una possibile soluzione al nostro problema di interpretazione: un Hamiltoniano non hermitiano, come quello definito sopra, fornisce la descrizione di un sistema *non isolato*. Quindi esso e' per sua natura solo *una parte* dell'Hamiltoniano totale, che deve contenere anche la descrizione dell'assorbimento dell'energia perduta. Se nondimeno ignoriamo questo problema per un momento,] possiamo calcolare la trasformata di Fourier di  $\psi$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - i\Gamma)t} e^{iEt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} dt = -\frac{1}{E_0 - E - i\Gamma} e^{-i(E_0 - E - i\Gamma)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma}$$

L'ampiezza per trovare il sistema con energia  $E$  e' ora una funzione dell'energia stessa, che non e' piu' definita. La probabilit   $= |\text{ampiezza}|^2$  e' la curva di *Breit-Wigner*; essa ha larghezza uguale a  $\Gamma$ , che si vede assumere il significato di *indeterminazione dell'energia* nello stato. E' immediato osservare che:

$$\text{indeterminazione energia} * \text{indeterminazione tempo} = \Gamma * \frac{1}{\Gamma} = 1$$

che e' il caso limite della relazione di indeterminazione tempo-energia.



## 5. Dall'interazione fondamentale al potenziale efficace

Riassumere in breve l'evoluzione storica dello studio, sperimentale e teorico, dell'interazione forte, e' un compito impossibile, data la varieta' di soggetti e di metodi che sono stati impiegati in questo campo di ricerca per diversi decenni. Nondimeno, si puo' dire in breve che, inizialmente, la parte centrale dello studio sperimentale dell'interazione forte e' consistita nella determinazione dei numeri quantici delle centinaia di stati adronici che via via venivano scoperti, quasi tutti in esperimenti agli acceleratori: un'attivita' simile a quella svolta alla fine del XIX secolo dagli spettroscopisti per studiare la struttura atomica, e a quella dei fisici nucleari, qualche decennio dopo, per l'indagine della struttura del nucleo.

La maggiore difficolta' che si incontra, nel tentativo di dare un quadro teorico-fenomenologico a questa vasta raccolta di dati, viene dalla forte intensita' dell'interazione, quando essa e' osservata a energie dello stesso ordine delle masse in gioco: questo impedisce un uso coerente dello sviluppo perturbativo, e quindi il calcolo di quantita' da confrontare con l'esperimento. Per esempio, se si tenta di descrivere l'interazione fra due nucleoni come dovuta allo scambio di pioni, ci si scontra immediatamente con un problema: i diagrammi contenenti lo scambio di due, tre, ... pioni sono piu' importanti di quelli a un solo pione!

Un'altra difficolta' sorge con la scoperta dell'esistenza di molti stati mesonici, nessuno dei quali puo' essere considerato piu' fondamentale degli altri: questo punto segna una notevole differenza rispetto al caso della QED, in cui il solo fotone e' necessario e sufficiente per una descrizione completa. Di fatto, non si puo' sfuggire alla necessita' di includere lo scambio di tutti questi stati nella descrizione dell'interazione, che ne risulta molto appesantita e poco soddisfacente. Infine, l'esistenza di nuovi "flavor" di particelle (stranezza, charm, ...), su scale di massa totalmente differenti e con nuove regole di selezione, complica ulteriormente il quadro.

Col tempo, si e' compreso che la descrizione delle proprieta' "statiche" degli adroni (masse, larghezze, momenti magnetici,...) in termini di una teoria di campo a carattere fondamentale (QCD) deve essere considerata uno dei punti di arrivo, e non di partenza, della teoria stessa. La teoria risulta piu' semplicemente applicabile alla descrizione di altri tipi di fenomeni - dei quali il prototipo e' il *DIS*, nei quali lo scambio di energia e impulso fra costituenti e' particolarmente violento, perche' in questi casi, sorprendentemente, l'accoppiamento risulta sufficientemente indebolito da consentire un accurato calcolo perturbativo.

Questa circostanza, che si e' compresa con molto ritardo nello studio dell'interazione forte, e' in forte contrasto rispetto alla analoga situazione nello studio dell'interazione elettromagnetica (QED): in quest'ultimo caso, la modesta entita' della costante di accoppiamento ( $\alpha \sim 1/137$ ) ha reso possibile una descrizione assai accurata degli stati legati prima che fosse disponibile una teoria completa e relativisticamente covariante.

Ogni tentativo di modellare fenomenologicamente l'interazione fra adroni come scambio di pioni, ed eventualmente di altri mesoni piu' pesanti, deve quindi essere considerato, al meglio, come un espediente fenomenologico.

Rimane evidentemente il problema di dare una descrizione il piu' possibile unificata delle proprieta' principali degli adroni, cosi' come sono osservate negli esperimenti di scattering. Se ci si limita a una regione di energia sufficientemente bassa (diciamo fino ad alcuni GeV nel CM della collisione), il quadro sperimentale e' dominato dalla presenza di stati risonanti: essi sono, come si ricordera', una proprieta' caratteristica di molti tipi di potenziale. Risulta quindi conveniente, *per lo scopo sopra citato*, approssimare l'interazione forte per mezzo di un qualche tipo di potenziale efficace: questo e' particolarmente interessante, perche' consente di usare il linguaggio e i metodi della teoria dello scattering da potenziale, piuttosto semplici e intuitivi, anche se evidentemente limitati nel range di applicazioni.

Come questo sia possibile, si puo' spiegare brevemente nel modo seguente:

a. Innanzi tutto, fino a che l'energia nel CM non e' troppo grande, la maggior parte dei processi forti e' dominata da canali a 2 corpi

$$a + b \rightarrow c + d$$

nei quali lo stato finale contiene particelle stabili o risonanze, che poi decadono per loro conto in altre particelle; questo non e' vero in assoluto (p.es., le reazioni di annichilazione nucleone-antinucleone procedono attraverso canali piu' complicati e difficili da modellare), ma e' sufficiente a giustificare l'enfasi sull'uso di modelli a potenziale.

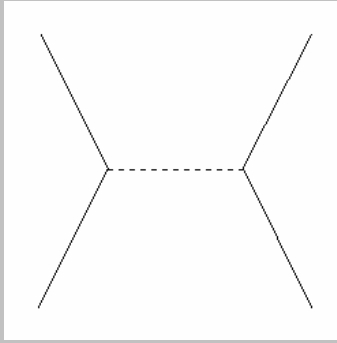
b. Sul modello della QED, e trascurando tutte le numerose difficolta' e complicazioni sopra accennate, si puo' quindi immaginare che l'interazione forte sia dovuta ad emissione e assorbimento di pioni, o altri stati a interazione forte, da parte degli adroni coinvolti nel processo: quindi, l'ampiezza invariante potra' scriversi, sul modello della QED, come elemento di matrice dell'operatore prodotto delle correnti di  $a$  e  $b$  e del propagatore della particella scambiata; per una particella a spin 0 come il  $\pi$ , trascurando i problemi legati alla parita' intrinseca -va

$$A \propto j_{(a)}^\mu \frac{1}{q^2 - m_\pi^2} j_{(b)\mu}$$

dove  $q$  e' il 4-impulso trasferito:

$$q = p_C - p_A$$

L'ampiezza si puo' rappresentare con il diagramma di Feynman:



c. Se consideriamo il caso in cui

$$q^2 = (E_C - E_A)^2 - (\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)^2 \approx -(\mathbf{p}_C - \mathbf{p}_A)^2 = -|\mathbf{q}|^2$$

il propagatore si approssima con

$$\frac{1}{q^2 - m_\pi^2} \approx \frac{1}{-|\mathbf{q}|^2 - m_\pi^2} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m_\pi^2}$$

Facendone l'antitrasformata di Fourier, si trova:

$$\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left( -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m_\pi^2} \right) d^3\mathbf{q} \propto -\frac{e^{-m_\pi r}}{r}$$

ossia il potenziale di Yukawa. Come e' noto, in particolari situazioni, potenziali attrattivi di questo tipo possono dare luogo a stati risonanti.

d. E' plausibile che la proprieta' del potenziale efficace di presentare fenomeni di risonanza sia presente gia' nell'interazione covariante. Si puo' interpretare l'andamento risonante della sezione d'urto con la presenza di stati eccitati del nucleone

e. Il fenomeno della risonanza si osserva in tutti i sistemi di particelle a interazione forte, sia barionici, sia mesonici

## 6. Analisi in fase, ampiezze risonanti

In generale, come sappiamo, la determinazione degli sfasamenti consente di ricavare informazioni sul potenziale. Gli sfasamenti possono essere ricavati dalla sezione d'urto differenziale: ottenere il loro andamento in funzione dell'energia richiede dunque la misura della sezione d'urto differenziale a diverse energie, e rimane in genere un esercizio non privo di ambiguità. Lo scopo iniziale delle analisi in fase, ossia la determinazione del potenziale efficace dell'interazione adrone-adrone, si è col tempo abbastanza perduto, evolvendo piuttosto verso la determinazione dei numeri quantici delle decine o centinaia di stati risonanti via via osservati.

Come si ricorderà, l'ampiezza relativa alla  $l$ -esima onda parziale si scrive, per la reazione elastica:

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = a_l = \frac{\sin \delta_l e^{i\delta_l}}{k}$$

Altre reazioni a due corpi possono essere descritte da ampiezze simili; per questi casi alle corrispondenti ampiezze elastiche si aggiunge un *coefficiente di assorbimento*  $0 < \eta_l < 1$ :

$$f_l = \frac{1}{2ik} (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1)$$

equivalente all'introduzione di uno *sfasamento complesso*:

$$\begin{aligned}\eta_l &= e^{-2\varepsilon_l} \\ f_l &= \frac{1}{2ik} (\eta_l e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{2ik} (e^{-\varepsilon_l} e^{2i\delta_l} - 1) \\ \rightarrow f_l &= \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l - \varepsilon_l} - 1) = \frac{1}{2ik} (e^{2i(\delta_l + i\varepsilon_l)} - 1)\end{aligned}$$

analogo all'indice di rifrazione complesso dell'elettromagnetismo.

Siamo interessati in particolare al caso in cui una delle ampiezze, la  $l$ -esima diciamo, presenta in funzione dell'energia un comportamento risonante.

In questo caso, l'ampiezza può essere rappresentata nel piano complesso, tenendo conto della semplice relazione:

$$\begin{aligned}a_l &= \frac{1}{\cot \delta_l - i}, x = \operatorname{Re} a_l, y = \operatorname{Im} a_l \\ \rightarrow x^2 &= (1 - y)y\end{aligned}$$

che e' l'equazione di un cerchio di raggio  $1/2$  e centro  $(0, +1/2)$ .  
 Ci sono varie proprieta' interessanti che si trovano nel considerare l'ampiezza in funzione dell'energia sotto forma di funzione a valori nel piano complesso (il grafico relativo, noto come "Argand plot", diventa pero' rapidamente intricato e poco comprensibile al crescere dell'energia, con l'apertura dei canali anelastici); tuttavia, come accennato sopra, l'interesse delle analisi in fase e' ormai da molto tempo piuttosto marginale

Come si ricordera', in questo caso potremo riscrivere l'ampiezza stessa, per energie non troppo distanti dall'energia di risonanza, come:

$$a_l = \frac{\Gamma_l/2}{(E_R - E) - i\Gamma_l/2}$$

L'analisi in fase dei dati delle reazioni elastiche e a due corpi ha posto in evidenza l'esistenza di moltissime risonanze, il cui inquadramento in una descrizione unificata e coerente ha costituito per lungo tempo il problema fondamentale della "zoologia degli adroni". Di seguito si tenta di dare un'idea extra-semplificata della situazione con un paio di esempi.

## 7. Risonanze in formazione: analisi angolare

Consideriamo lo sviluppo in onde parziali dell'ampiezza di scattering  $\pi p$ . La presenza del protone (particella a spin  $\frac{1}{2}$ ) complica un po' il quadro: invece del solo momento angolare orbitale, dobbiamo prendere in considerazione il momento angolare totale del sistema,  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Prendendo solo i valori piu' bassi del momento angolare orbitale,  $l=0,1$ :

$$J = 1/2 \oplus 0 \oplus l = 1/2 \oplus l = \begin{cases} 1/2 & \text{onda S} \\ 1/2, 3/2 & \text{onda P} \end{cases}$$

Perche' solo onde S e P

Questa approssimazione si fonda sulla seguente osservazione: il range  $R$  della interazione forte e'  $R \approx 1/m$ ; l'ordine delle onde interessate e' dato da  $l = kR \approx k/m$ . Per le risonanze a bassa energia,  $k \approx m$ , quindi  $l \leq 1$ , quindi solo onde S, P

Ogni onda parziale (valore di  $l$  fissato) dello sviluppo in serie dell'ampiezza di scattering si scinde in 2 onde distinte, una con  $J = l + 1/2$  e una con  $J = l - 1/2$ . Per  $l=0$  (onda S) abbiamo solo  $J=1/2$ ; per  $l=1$  (onda P) abbiamo  $J=1/2, J=3/2$ .

Se l'interazione e' centrale, lo stato di scattering puo' essere scomposto in stati a momento angolare totale definito, ossia  $J=1/2, 3/2$ . Quindi, lo sviluppo che si scriveva nel caso senza spin

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(a_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

diventa

$$\begin{aligned} f(\theta) &= g(\theta) + h(\theta) \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^+ - a_l^-) P_l^1(\cos \theta) \end{aligned}$$

#### *Spiegazione di questa formula*

Riprendendo la descrizione del processo tramite il concetto di stato (stazionario) di scattering, dobbiamo introdurre la descrizione dello spin del nucleone: se consideriamo che la componente dello spin lungo la direzione di moto sia  $+1/2$  possiamo scrivere per la parte onda piana dello stato di scattering:

$$e^{ikz} \underbrace{\chi_{1/2}^{+1/2}}_{\text{autostato di spin}}$$

Essa puo' essere scritta come uno sviluppo in armoniche sferiche:

$$e^{ikz} \chi_{1/2}^{+1/2} = \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2} = \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\cos \theta) \chi_{1/2}^{+1/2}$$

in cui compaiono termini del tipo:

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2}$$

(perche' la componente  $z$  di  $J$  coincide con quella di  $s$ , ed e' conservata). Ora, il termine generico della somma si puo' scrivere come sovrapposizione di stati a momento angolare totale definito

$$Y_l^0 \chi_{1/2}^{+1/2} = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} y_{l-1/2}^{+1/2}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\cos\theta) \chi_{l/2}^{+1/2} &= \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} \left( \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} y_{l-1/2}^{+1/2} \right) \\ &= \frac{e^{ikr}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi} \left( \sqrt{l+1} y_{l+1/2}^{+1/2} - \sqrt{l} y_{l-1/2}^{+1/2} \right) \end{aligned}$$

L'effetto del potenziale e' quello di sfasare, *separatamente per le due parti a momento angolare totale definito*, le singole onde parziali, esattamente come per il caso senza spin; quindi l'ampiezza di scattering (parte angolare della componente a onda sferica della funzione d'onda) si scrivera':

$$f(\theta) = \sqrt{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sqrt{l+1} y_{l+1/2}^{+1/2} (a_l^+ - 1) - \sqrt{l} y_{l-1/2}^{+1/2} (a_l^- - 1) \right)$$

Le autofunzioni  $y$  del mom. angolare totale  $J$  sono date (usando semplicemente i coefficienti di Clebsch-Gordan opportuni) da:

$$\begin{aligned} y_{l+1/2}^{+1/2} &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{l/2}^{+1/2} + \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{l/2}^{-1/2} \\ y_{l-1/2}^{+1/2} &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_l^1 \chi_{l/2}^{-1/2} - \sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_l^0 \chi_{l/2}^{+1/2} \end{aligned}$$

Quindi l'ampiezza di scattering puo' scriversi, introducendo le *funzioni associate di Legendre*:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos\theta) \chi_{l/2}^{+1/2} \\ &\quad + (a_l^+ - a_l^-) P_l^1(\cos\theta) e^{i\varphi} \chi_{l/2}^{-1/2} \\ &= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \left[ (l+1)(a_l^+ - 1) + l(a_l^- - 1) \right] P_l^0(\cos\theta) \chi_{l/2}^{+1/2}}_{g(\theta)} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (a_l^+ - a_l^-) P_l^1(\cos\theta) e^{i\varphi} \chi_{l/2}^{-1/2}}_{h(\theta)} \end{aligned}$$

Ci accorgiamo cosi' che in realta' ci sono 2 ampiezze distinte: la prima ( $g(\theta)$ ) corrisponde a un'onda uscente in cui lo spin del protone e' rimasto invariato; la seconda ( $h(\theta)$ ) invece corrisponde a un'onda uscente in cui si e' avuto 'spin-flip' (ossia in cui la componente  $z$  dello spin ha cambiato segno). Si ritrova cosi' la formula citata, nella quale si ricordi che le quantita'  $a_l$  sono definite da:

$$a_l^{\pm} = \frac{e^{2i\delta_l^{\pm}} - 1}{2ik}$$

Nel caso lo spin del protone avesse componente  $z$  uguale a  $-1/2$  il risultato per le ampiezze di scattering sarebbe identico.

Poiche' le autofunzioni di spin sono ortogonali, la sezione d'urto differenziale e' data semplicemente da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g(\theta)|^2 + |h(\theta)|^2$$

Essendo:

$$\begin{aligned} P_0^0 &= 1 \\ P_1^0 &= \cos \theta \\ P_1^{+1} &= -\sin \theta \end{aligned}$$

troviamo, sostituendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| (a_0^+ - 1) + [2(a_1^+ - 1) + (a_1^- - 1)] \cos \theta \right|^2 + \left| (a_1^+ - a_1^-) (-\sin \theta) \right|^2$$

che si puo' riscrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos^2 \theta)$$

La sezione d'urto differenziale teste' trovata e' naturalmente una funzione dell'energia totale nel CM della collisione, la dipendenza essendo dovuta al fattore  $1/k^2$  e a quella dei coefficienti  $A_i$ , che dipendono dal potenziale attraverso gli sfasamenti. E' interessante vedere cosa succede ai coefficienti  $A_i$  se ci avviciniamo a  $E_{CM}=1230 \text{ MeV}$  (energia corrispondente al picco di risonanza): si trova sperimentalmente che essi valgono circa 1, 0, 3, ossia

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

Questa e' la distribuzione angolare attesa per il decadimento di uno stato a spin  $3/2$  in due particelle a spin 0 e  $\frac{1}{2}$  (il  $\pi$  e il protone, appunto)

#### *Giustificazione dell'affermazione precedente*

Consideriamo uno stato a spin  $3/2$  che decade nel modo specificato sopra; supponiamo che la componente  $z$  di  $J$  sia  $+1/2$  (se e'  $-1/2$ , il risultato finale non cambia; non puo'



essere  $+o-3/2$ , perché il momento angolare orbitale ha componente nulla lungo la direzione di moto). Allora potremo scrivere:

$$|3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle Y_1^{+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, +1/2\rangle Y_1^0$$

Poiché le autofunzioni di spin sono ortogonali, i 2 termini non interferiscono. Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\propto \frac{1}{3}|Y_1^{+1}|^2 + \frac{2}{3}|Y_1^0|^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{2}{3} \cos^2 \theta \\ \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &\propto \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cos^2 \theta \propto 1 + 3 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

La parità della  $\Delta$  si può ottenere dalla seguente considerazione: essa decade per interazione forte, quindi conservando la parità, in  $p+\pi$ ; la parità totale è:

$$\eta_{\Delta} = \eta_p \eta_{\pi} \eta_{orb}$$

La parità del protone (fermione) è convenzionalmente assunta +va; quella del  $\pi$  è -va (determinazione possibile); il decadimento avviene in pura onda  $P$  ( $l=1$ ), quindi  $\eta_{orb}=(-1)^l=-1$ . Quindi:

$$\eta_{\Delta} = +$$

Lo stato risonante osservato, chiamato  $\Delta^{++}$ , può quindi essere considerato uno stato eccitato del nucleone, e la sua esistenza è uno dei primi indizi che il nucleone non è un oggetto elementare, ma è dotato di una struttura interna

## 8. Analisi di isospin

Lo stato risonante, a carica 2, trovato nello scattering  $\pi^+p$ , si trova anche negli stati di carica 1, 0 e -1 (scattering  $\pi^+n, \pi^-p, \pi^-n$ ) con le stesse proprietà. Viene quindi naturale assegnargli un numero quantico di isospin uguale a  $3/2$ ; nel loro insieme, i 4 stati  $\Delta$  costituiscono quindi un nuovo multipletto di isospin (quartetto). Poiché si suppone che l'interazione forte conservi l'isospin, è interessante cercare gli stati a isospin totale (e componente  $z$ ) definiti per il sistema  $\pi p$ : questo consentirà di confrontare le sezioni d'urto totali per i diversi processi. Abbiamo allora, ricordando che gli stati di isospin si comportano come quelli di momento angolare:

$$\begin{aligned}
I_N = 1/2 & ; |p\rangle = |1/2, +1/2\rangle , |n\rangle = |1/2, -1/2\rangle \\
I_\pi = 1 & ; |\pi^+\rangle = |1, +1\rangle , |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle , |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \\
|\pi^- p\rangle & = |1, -1, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle \\
|\pi^+ n\rangle & = |1, +1, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, +1/2\rangle \\
|\pi^+ p\rangle & = |1, +1, 1/2, +1/2\rangle = |3/2, +3/2\rangle \\
|\pi^- n\rangle & = |1, -1, 1/2, -1/2\rangle = |3/2, -3/2\rangle \\
|\pi^0 p\rangle & = |1, 0, 1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, +1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, +1/2\rangle \\
|\pi^0 n\rangle & = |1, 0, 1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle
\end{aligned}$$

Se ora consideriamo una coppia qualsiasi di reazioni  $\pi N \rightarrow \pi N$ , la conservazione dell'isospin totale fornisce previsioni non banali sul rapporto delle rispettive sezioni d'urto: infatti, la conservazione dell'isospin totale implica che in questo caso ci siano solo 2 sezioni ampiezze fondamentali diverse, quella per  $I=3/2$  e quella per  $I=1/2$

Esempio:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{aligned} \right. \rightarrow A_A = A_B = A_{3/2} \quad \text{stati puri di isospin } 3/2 \\
& \left\{ \begin{aligned} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{aligned} \right. \rightarrow A_A = \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2}, A_B = A_{3/2} \\
& \left\{ \begin{aligned} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{aligned} \right. \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \frac{1}{3} A_{3/2} - \frac{2}{3} A_{1/2} \\
& \left\{ \begin{aligned} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{aligned} \right. \rightarrow A_A = A_{3/2}, A_B = \sqrt{\frac{2}{9}} A_{3/2} - \sqrt{\frac{2}{9}} A_{1/2}
\end{aligned}$$

Assumendo  $A_{3/2} \gg A_{1/2}$ , il che e' plausibile visto che l'ampiezza  $A_{3/2}$  e' di per se' molto grande almeno nella zona della risonanza  $\Delta$ , si ottiene

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ (B) \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \frac{1}{9} \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^- p \end{cases} \rightarrow \sigma_A = 9 \sigma_B$$

$$\begin{cases} (A) \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ (B) \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \end{cases} \rightarrow \sigma_A = \frac{9}{2} \sigma_B$$

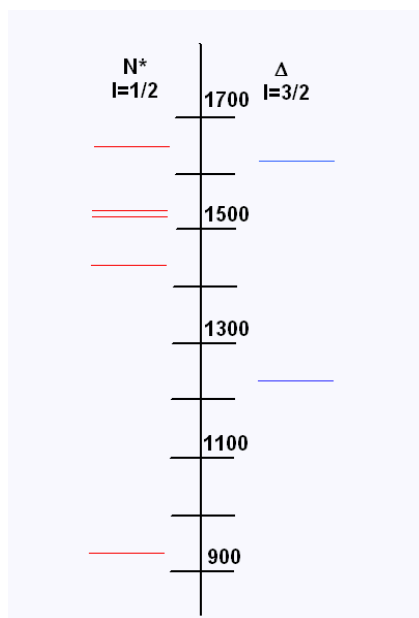
in buon accordo con i dati sperimentali.

## 9. Risonanze barioniche

In generale, la sezione d'urto totale  $\pi p$  vs l'energia mostra strutture extra nei confronti di quella  $\pi^+ p$ , come ci si attende visto che ad essa contribuisce l'ampiezza per  $I=1/2$  che nella prima non compare. Il confronto fra le 2 permette di assegnare un valore di isospin alle risonanze osservate, che vengono così raggruppate in due famiglie:

- stati a  $I=1/2$  (parenti stretti del nucleone, almeno per ciò che riguarda l'isospin)
- stati a  $I=3/2$  (parenti un po' meno stretti)

Uno schema semplificato, volutamente simile agli schemi dei livelli atomici e' mostrato nella figura che segue:



Come dovrebbe ormai risultare chiaro, l'analisi in momento angolare e in isospin porta a raggruppare le risonanze barioniche (con numero barionico = 1) in multipletti, costituiti da doppietti ( $I=1/2$ ) o quartetti ( $I=3/2$ ) di stati, ognuno caratterizzato da un certo valore di momento angolare.

## 10. Risonanze in produzione

L'analisi sommariamente descritta si riferisce ad un tipo particolare di esperimenti, nei quali si dice che la risonanza viene eccitata "in formazione", o anche "nel canale  $s$ ". Il significato di questa espressione sta nel fatto che l'osservazione della risonanza si effettua variando l'en. totale nel CM (si ricordi che  $s=E_{CM}^2$ ) attraverso un range di valori ("spazzolando"  $E_{CM}$  attraverso la risonanza), e misurando ogni volta la sezione d'urto totale (oltre eventualmente ad altre quantità); per esempio, quando  $E_{CM}=M_R$  si è sul picco.

Questo non è l'unica procedura possibile: quando si hanno a disposizione fasci di energia elevata è in realtà spesso vantaggioso fare avvenire collisioni con  $E_{CM} > (o anche >>) M_R$ , nelle quali viene prodotta una varietà di stati finali contenenti anche altre particelle, oltre a, o invece di quelle incidenti. La risonanza viene quindi studiata "in produzione", selezionando gli stati finali che contengono i prodotti di decadimento della risonanza stessa (che ha invariabilmente vita media molto breve, tale da rendere impossibile la sua rivelazione diretta nella collisione). In questo caso, dunque,  $E_{CM}$  viene mantenuta fissa, e si dice che la risonanza viene prodotta "nel canale  $t$ ": il significato dell'espressione (ricordando che  $t=(p_{in}-p_{out})^2$ ) sta nel fatto che la risonanza viene eccitata attraverso lo scambio di particelle virtuali fra proiettile e bersaglio.

### *Propagatori e risonanze*

È forse utile tentare di mettere in luce similarità e differenze per il significato del propagatore (e delle sue eventuali caratteristiche risonanti) nelle due situazioni. In entrambi i casi (reazione in canale  $s$  o in uno dei canali  $t, u$ ) il propagatore, come si è visto parlando dei processi elementari in QED, mantiene il significato di quantità covariante, caratteristica dell'interazione che governa il processo e che contiene diversi contributi perturbativi (estensioni dello sviluppo perturbativo non relativistico, oppure genuini relativistici D.O.C.). Gli esempi che seguono usano un linguaggio un po' antiquato, ma utile a capire gli aspetti fondamentali del problema, applicabili a casi più realistici (e più complicati): consideriamo cioè l'interazione forte come dovuta a *emissione e assorbimento di pioni e altri adroni*, punto di vista in realtà rispettabile nei non pochi casi in cui l'interazione non è particolarmente violenta.

### *Il propagatore space-like e time-like*

Il propagatore del fotone all'ordine perturbativo piu' basso si scrive, come e' noto:

$$\propto \frac{1}{q^2}$$

La quantita'  $q$  viene interpretata come il 4-impulso del fotone virtuale che interviene nel processo elettromagnetico. Per esso non e' rispettata la relazione cinematica fondamentale che lega energia totale e 3-impulso relativistici

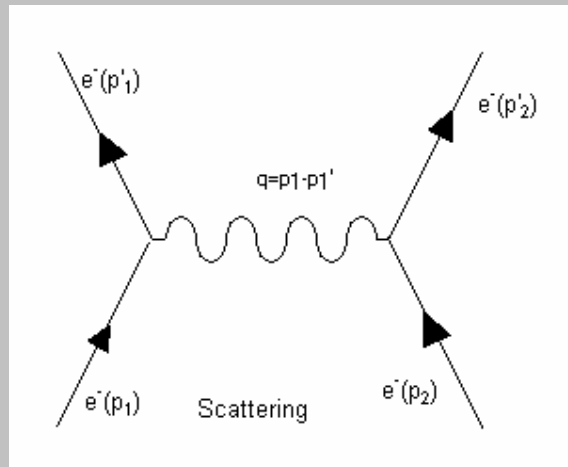
$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \rightarrow \text{poiche' per il fotone virtuale } m^2 = q^2 \neq 0, \text{ segue che } E^2 \neq \mathbf{p}^2$$

Si puo' anche dire che e' come se il fotone fosse dotato di massa, reale o immaginaria a seconda del carattere di  $q$ . I processi elettromagnetici a un fotone, infatti, avvengono con scambio di fotoni virtuali di due tipi diversi.

Questo si puo' vedere facilmente considerando, p.es., la reazione

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

essa e' descritta, nell'approssimazione a un fotone, da un unico diagramma:



In questo caso  $q$  ha il significato di 4-impulso trasferito nell'interazione:

$$q = (p_1 - p'_1) = (E_1 - E'_1), (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)$$

$$E_1 = E'_1 = E, |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}'_1| = p \text{ nel CM}$$

$$q^2 = (p_1 - p'_1)^2 = t = (E - E)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2$$

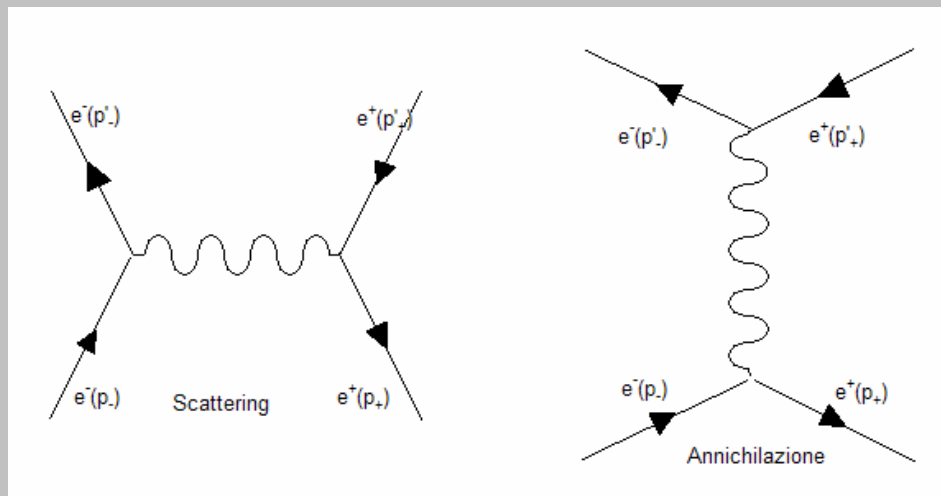
$$\rightarrow q^2 = 0 - (p^2 + p^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1) \leq 0$$

quindi il fotone virtuale  $e'$  di tipo space-like: il trasferimento di 4-impulso nell'interazione si può descrivere come dovuto all'emissione e successivo assorbimento del fotone virtuale. Diciamo convenzionalmente che *il processo avviene nel canale  $t$* , perché  $q$  ha la caratteristica space-like di un 4-impulso trasferito (per quanto sui generis,  $q$  è un 4-vettore, quindi il suo modulo è un invariante: quindi la caratteristica space-like del processo è invariante per trasformazioni di Lorentz).

Se invece prendiamo la reazione

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$$

sappiamo che abbiamo due distinti diagrammi a un fotone:



Il primo è del tutto analogo a quello considerato prima; il secondo è un diagramma di annichilazione, nel quale il fotone virtuale è di tipo time-like

$$q = (p_1 + p_2) = [(E_1 + E_2), (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)]$$

$$E_1 = E_2 = E, \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} \text{ nel CM}$$

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = (E + E)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p})^2$$

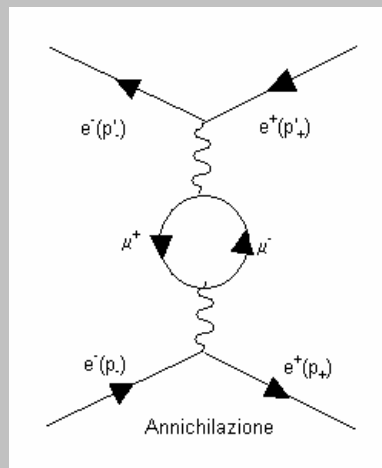
$$\rightarrow q^2 = 4E^2 - 0 > 0$$

Poiché in questo diagramma  $q^2$  coincide con  $s$  (= quadrato dell'en. totale nel CM), questo viene chiamato il canale  $s$  della reazione: per esso si può dire qualitativamente che la dinamica consiste nell'annichilazione e successiva materializzazione di una coppia particella-antiparticella.

### *L'effetto dei loop*

La presenza del diagramma di annichilazione apre la porta a sviluppi molto interessanti: cosa accade, per esempio, quando l'energia totale della collisione

si avvicina al valore  $2m_\mu$ , ossia alla soglia di produzione di una coppia  $\mu^+\mu^-$ ? Dobbiamo ricordare prima di tutto che il sistema  $\mu^+\mu^-$  presenta, al pari dell'atomo di idrogeno, una successione di stati legati, denominati, non relativisticamente, ad energia negativa: il senso relativistico di questa denominazione e' che l'en. *totale* di uno stato legato e' inferiore alla somma delle masse di  $\mu^+$  e  $\mu^-$ , cosi' come accade per l'atomo di idrogeno. Se consideriamo la reazione  $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ , la presenza di questi stati legati si fa sentire nella sezione d'urto totale per il processo: in effetti, , quando l'energia totale si avvicina a  $2m_\mu$ , occorre definitivamente considerare le correzioni radiative al diagramma di annichilazione a un solo fotone. Si consideri infatti il seguente diagramma, che rappresenta appunto una *correzione radiativa* al diagramma a un fotone discusso prima:



Il propagatore del fotone nel diagramma a un loop, che ha una struttura piuttosto complicata (v. corsi e testi di teoria dei campi, per capire sul serio come vanno le cose), viene normalmente scritto come:

$$\frac{1}{q^2 \left(1 - \bar{\Pi}_\gamma^{(2)}(q^2)\right)}$$

dove  $\bar{\Pi}_\gamma^{(2)}(q^2)$  e' un integrale complicato (e in realta' divergente: malattia grave, curabile tuttavia con la procedura detta di *rinormalizzazione*) su tutti i valori di impulso che circolano nel loop.

Nella regione time-like, la caratteristica saliente del propagatore e' quella di diventare complesso quando  $q^2 > 4m^2$ , dove  $m$  e' la massa delle particelle virtuali che circolano nel loop; di fatto, questa condizione si verifica anche quando l'energia totale corrisponde a quella di uno degli stati legati dell' 'atomo' muone-antimuone, immediatamente *sotto* al valore  $q^2 = 4m^2$ , soglia di produzione di coppie di muoni *reali*; si ricordi a questo proposito che, rigorosamente parlando, una coppia di particelle in uno stato legato *non e'* sullo shell di massa.

In casi come questo, nell'intorno dell'energia caratteristica  $M$  il propagatore prende la forma seguente

$$\frac{1}{q^2 - M(M - i\Gamma)}$$

valida quando la *larghezza*  $\Gamma$ , alla quale contribuiscono tutte le ampiezze di decadimento dello stato risonante, e' piccola rispetto a  $M$ .

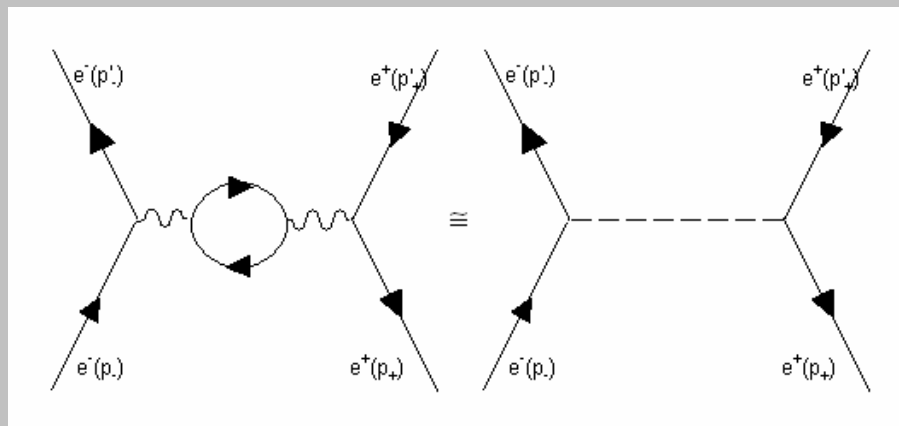
Si noti che il loop non porta in questo caso alla formazione di uno stato stabile, in quanto, a differenza p.es. dell'atomo di idrogeno, l' 'atomo' muone-antimuone ha aperti vari canali di annichilazione: oltre a quello in  $e^+e^-$  tramite un fotone virtuale, simmetrico rispetto al canale di formazione, c'e' il canale in 3 fotoni, e altri ancora; la transizione verso uno stato stabile sarebbe caratterizzata da  $\Gamma=0$ , e quindi da un'ampiezza che diverrebbe infinita per  $E=M$ .

Riassumendo, la presenza di stati risonanti nel canale  $s$  porta a un comportamento rapidamente variabile dell'ampiezza di transizione, e della sezione d'urto totale, nell'intorno dell'energia di risonanza.

Ora, naturalmente, gli stessi stati virtuali che compaiono nel propagatore nel canale  $s$  dovranno essere presenti anche nel canale  $t$  (o  $u$ ), con la sola, importante differenza che in questi canali la caratteristica e' space-like:

$$q^2 < 0$$

Il propagatore space-like, dunque, riceve contributi da tutti gli stati virtuali, il cui effetto pero' non e' quello di dare luogo a un comportamento risonante dell'ampiezza, che per  $q^2 < 0$  non ha poli, ma di approssimare l'ampiezza stessa a un diagramma a scambio di *particelle virtuali*: nell'esempio citato prima, si tratterebbe dello scambio di un *atomo muonico virtuale*. Tutto va in modo analogo al caso gia' visto della teoria di Yukawa:





Possiamo dire dunque che il ruolo degli stati virtuali e' duplice, o duale:

nel canale  $s \rightarrow$  ampiezze risonanti  
 nei canali  $t/u \rightarrow$  scambio di particelle virtuali

### *Processi forti*

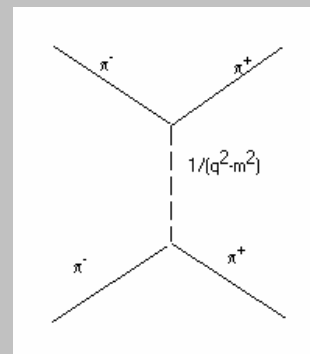
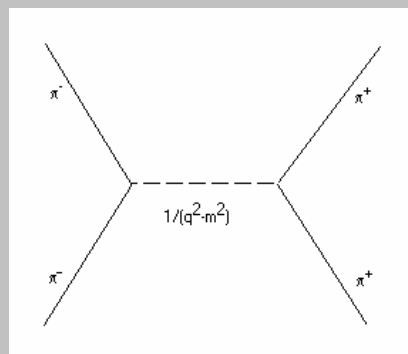
Supponiamo ora di considerare il processo forte:

$$\pi^+ + \pi^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Questa reazione non si puo' studiare con fasci di pioni reali, perche' essi sono particelle instabili a vita media troppo breve: esistono tuttavia dei metodi sperimentali per isolare reazioni di questo tipo fra particelle virtuali (v. dopo). Tralasciando questo problema per il momento, e generalizzando il risultato della QED, possiamo pensare che il processo consista nell'emissione e successivo assorbimento, oppure nella eccitazione e successivo decadimento, di *adroni virtuali*; questo significa di fatto ignorare molte diverse difficolta' che in rendono questa descrizione inaccettabile e non realistica, ma la discussione risulta comunque istruttiva. Assumiamo quindi per il propagatore l'espressione

$$\propto \frac{1}{q^2 - m^2}$$

Possiamo allora raffigurare l'ampiezza per mezzo dei diagrammi di Feynman

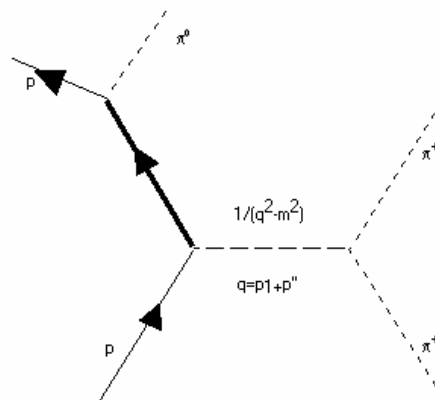


Nel canale  $s$ , l'ampiezza puo' `descrivere, in analogia a quanto visto prima, la formazione di uno stato intermedio di massa  $M$  e larghezza  $\Gamma$ , che poi decade nello stato finale. La presenza di "stati eccitati" del sistema di due pioni si manifesta, nel canale  $s$  (diagramma di destra), come aumento significativo nella sezione d'urto totale in corrispondenza del valore di  $E_{CM}$  uguale alla massa  $M$  dello stato eccitato (si noti che e' del tutto plausibile che l'en. totale dello stato eccitato sia  $>$  della somma delle masse dei 2 pioni: non e' detto che lo stato eccitato sia sempre uno stato legato, dipende da come e' fatto il potenziale... Uno stato eccitato con energia maggiore della somma delle masse a riposo e' appunto uno stato risonante).

Nel canale  $t$  questa ampiezza descrive l'emissione e successivo assorbimento di particelle di massa  $M$ , e larghezza  $\Gamma$ , da parte dei pioni incidenti: una generalizzazione della teoria di Yukawa al caso di scambio di diversi tipi di particelle virtuali.

Ritornando al caso delle collisioni fra pioni e nucleoni reali, invece del solo processo elastico, se l'energia e' sufficiente il pione incidente puo', senza essere assorbito, eccitare il protone a un suo stato eccitato, che poi si diseccita in uno stato finale contenente il protone e uno o piu' pioni. Il processo e' allora un processo anelastico (produzione di pioni etc), nel quale gli stati risonanti vengono *prodotti* piuttosto che *formati*.

Per esempio si possono considerare diagrammi come questo:



La parte di sinistra del diagramma non e' altro che una versione del secondo diagramma prima esaminato, nella quale la formazione della risonanza avviene *nel canale s* rispetto alla coppia di particelle incidenti protone-pione virtuale. La risonanza viene quindi *prodotta* (anelasticamente) nel canale  $t$ , piuttosto che *formata* (elasticamente) nel canale  $s$ , rispetto alla coppia di particelle incidenti pione-protone.

E' interessante accennare a come si puo' mettere in evidenza la produzione di stati risonanti in questo caso: come detto sopra, la risonanza decade molto rapidamente in uno stato finale, che l'esperimento cerca di identificare. P.es., se si studia la  $\Delta^{++}$  in produzione, si cercheranno collisioni che contengano nello stato finale  $1 \pi^+ + 1 p$ , oltre ad altre particelle. Se si conoscono masse e 3-impulsi del  $\pi^+$  e del protone, si calcola, collisione per collisione, la massa invariante dei 2, e se ne fa la distribuzione statistica su tutto il campione di eventi selezionato: la produzione di  $\Delta^{++}$  si evidenzia, anche qui, come un picco nella distribuzione stessa. L'idea e' quindi in realta' molto semplice: la massa dello stato risonante e' una caratteristica invariante dello stato stesso, quindi deve essere uguale prima e dopo il decadimento; in altre parole, i prodotti del decadimento conservano, nelle loro

caratteristiche cinematiche, il ricordo della provenienza da uno stato "madre" di una data massa.

Esempio: risonanza  $\Delta^{++}$  in produzione

Consideriamo la reazione

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$$

Essa avviene a energie del  $\pi^+$  incidente sufficientemente elevate (ossia, quando  $E_{CM} > m_p + 3m_{\pi}$ ). Idealmente, si può pensare di misurare i 3-impulsi di tutte e 4 le particelle cariche dello stato finale (p.es., con uno spettrometro magnetico), e al tempo stesso di poterle identificare (ossia, dire quale è un  $\pi$ , quale un  $p$ ). In questo caso è possibile costruire le 2 masse invarianti:

$$m_{p\pi_1}^2 = \left( \underbrace{p_p + p_{\pi_1}}_{4\text{-vettore}} \right)^2 = \left( \underbrace{E_p + E_{\pi_1}}_{comp.\text{tempo}} \right)^2 - \left( \underbrace{\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\pi_1}}_{comp.\text{spazio}} \right)^2$$

$$m_{p\pi_2}^2 = (p_p + p_{\pi_2})^2 = (E_p + E_{\pi_1})^2 - (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\pi_2})^2$$

In generale, uno stato finale a 4 corpi ha (fissate le 4 masse)  $3 \cdot 4 = 12$  grandezze cinematiche che lo descrivono. La conservazione del 4-impulso impone 4 vincoli, quindi restano  $12 - 4 = 8$  gradi di libertà cinematici, che possono essere scelti come 8 fra le 12 componenti dei 3-impulsi, o (di solito più utile) come 8 funzioni di esse: per esempio, come le 2 masse invarianti definite sopra + altre 6 variabili. In questo caso, quindi, lo spazio delle fasi dello stato finale ha dimensione 8. Come si ricorderà, se non ci sono effetti dinamici, la distribuzione degli eventi nello spazio delle fasi è puramente statistica, e risulta in una certa forma per la distribuzione di frequenza delle variabili scelte. Ora, la presenza di uno stato risonante è evidentemente un effetto dinamico: dipende dall'andamento degli sfasamenti, che dipende dal "potenziale", o da chi ne fa le veci. Quindi, ci si aspetta un aumento nella frequenza degli eventi prodotti, rispetto allo "spazio delle fasi", quando una delle due masse invarianti è vicina al valore di picco della risonanza  $\Delta^{++}$ . Questo è esattamente ciò che si osserva, come si può vedere:

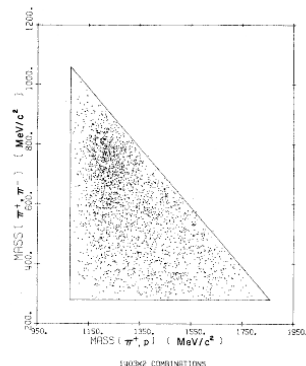


FIG. 1. Two-pion, proton-pion invariant-mass scatterplot for the reaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$ . The boundary curve represents the kinematic limit for events produced by a 1.95-GeV/c momentum beam.

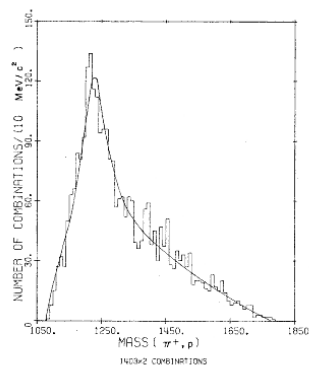


FIG. 3. Proton-pion invariant-mass distribution from the reaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$ . The curve is the best fit to  $\Delta^{++}$  resonance,  $\rho^0$  reflection, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

tions. The curves were constrained to be proportioned identically because the two histograms were simultaneously least-squares fitted.

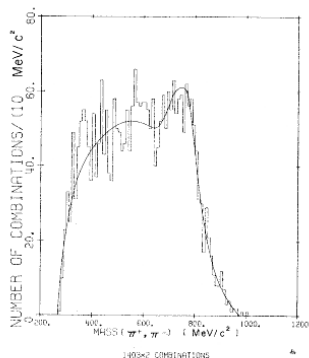


FIG. 2. Two-pion invariant-mass distribution from the reaction  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$ . The fitted curve is composed of  $\rho^0$  resonance,  $\Delta^{++}$  reflection, phase space, and combinatorial background in the proportions given in Table I.

The four functional forms for the hypothesized reactions were obtained by a Monte Carlo generation and contain no production dynamics. The fits to the two distributions are of suitable quality, exhibiting  $\chi^2$  values of 111 and 176 with 90 degrees of freedom in Figs. 2 and 3, respectively.

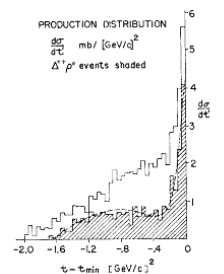


FIG. 4. Two-pion, proton-pion production distribution for  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^+ \pi^-$  events. All combinations appear in the unshaded graph and only those selected as  $\Delta^{++} p$  appear in the shaded plot. 524 events are contained within the shaded histogram of which 46 have a combinatorial ambiguity and are plotted twice with 0.5 weight. The curve is an exponential-plus-background fit which is described in the text.

## 11. Risonanze mesoniche

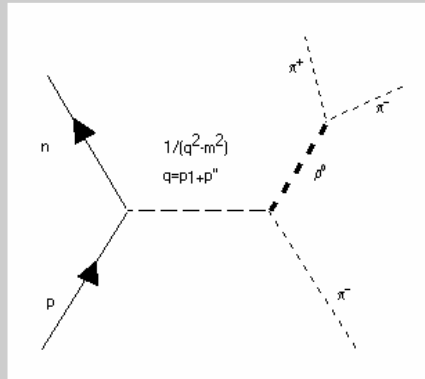
Questo procedimento puo' naturalmente essere esteso a qualunque coppia (o tripletta, o...) di particelle identificate e misurate nello stato finale: la ricerca e lo studio delle risonanze (da taluni chiamato familiarmente "piccologia") puo' quindi estendersi anche a stati con  $B=0$  (risonanze mesoniche). La maggior parte di essi e' stata appunto scoperta e studiata in esperimenti in produzione (tipicamente, in collisioni  $\pi N$  o  $p N$  a energie di qualche GeV nel CM). Lo studio e la determinazione dei numeri quantici delle risonanze, mesoniche e barioniche, ha costituito la gran parte dell'attivita' sperimentale agli acceleratori negli anni '60

Esempio: analisi in spin-parita' della  $\rho$

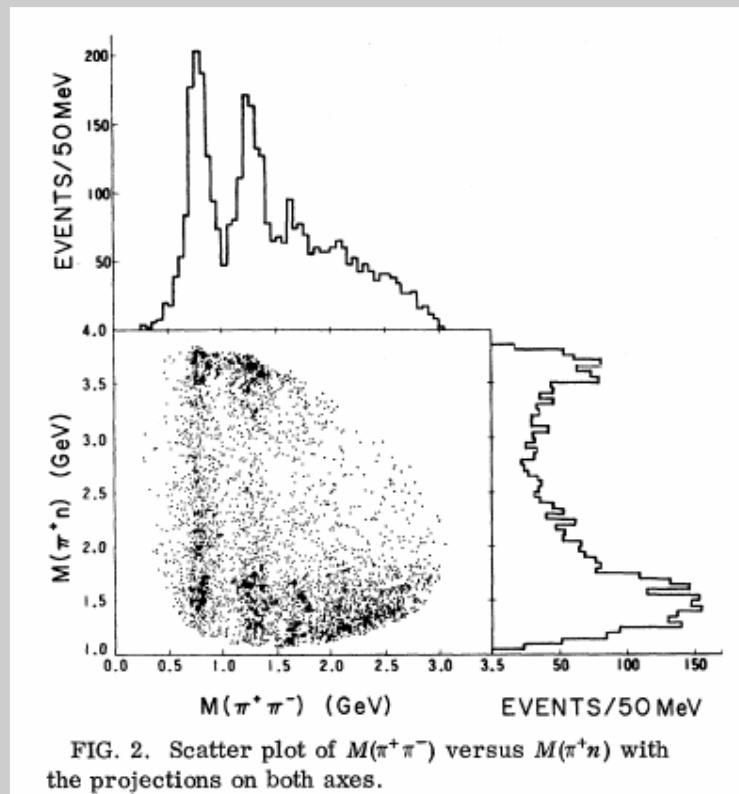
La risonanza mesonica  $\rho$  viene facilmente osservata in reazioni come questa:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$$

in cui il pione incidente ha un impulso di alcuni GeV. La produzione di risonanze mesoniche puo' venir descritta, nel senso approssimato discusso prima, da diagrammi come questo, analogo a quello visto per la produzione della  $\Delta$ :



Ci si attende quindi la produzione di risonanze, sia di tipo barionico ( $n\pi^+$ ,  $n\pi^-$ ) sia nel canale mesonico ( $\pi^+\pi^-$ ). Un tipico spettro di massa osservato in esperimenti di questo tipo e' mostrato nella figura:



Quello che si vede e' il Dalitz plot di  $M(\pi^+\pi^-)$  vs  $M(n\pi^+)$ , e le sue proiezioni: e' evidente la presenza di picchi assai intensi in corrispondenza della massa della  $\Delta^+$ , e a valori di  $M(\pi^+\pi^-)$  attorno a 750 e 1250 MeV. Questi picchi rappresentano un primo segnale della produzione di risonanze nelle collisioni. E' evidente l'interesse a determinare quali siano i numeri quantici degli stati risonanti, al fine di costruire un quadro spettroscopico complessivo per gli adroni.

Il mesone  $\rho$  e' soggetto a decadimento in  $2\pi$  tramite l'interazione forte, quindi con tempi molto brevi, dell'ordine di  $10^{-23}$  s, consistentemente con la sua larghezza di circa 120 MeV. Per determinare il momento angolare della  $\rho$ , si puo' confrontare la distribuzione angolare dei suoi prodotti di decadimento con quella prevista per uno stato di momento angolare dato: la difficolta' risiede nel modo con cui la distribuzione angolare viene misurata. In generale, se ci si pone nel CM dello stato che decade in 2 corpi la distribuzione angolare dei prodotti di decadimento dipende dallo stato di spin della particella madre: si puo' dimostrare che la distribuzione e' isotropa se la particella madre e' a spin 0 (ovvio), oppure se e' totalmente *non polarizzata* (ossia, se tutti i sottostati con diversi valori di  $J_z$  sono popolati uniformemente nella produzione).

Quest'ultimo risultato si puo' giustificare cosi': si consideri il decadimento in 2 corpi  $A \rightarrow B+C$ . Se lo spin di  $A$  e'  $J$ , e quello di  $B$  e  $C$  e' 0, si ha per la conservazione del momento angolare:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}$$

e della parita':

$$\eta_P^{(A)} = \eta_P^{(B)} \eta_P^{(C)} (-1)^l$$

Si avra' allora per l'ampiezza di decadimento del generico sottostato magnetico in cui si puo' trovare la particella madre:

$$|JM\rangle = |lm\rangle \rightarrow A(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$$

ammesso che la conservazione della parita' lo consenta. Per il nostro caso particolare deve essere

$$\eta_P^{(A)} = (-1)^l$$

$$\eta_C^{(A)} = (-1)^l$$

Se tutti i sottostati sono ugualmente popolati, la probabilita' statistica di ogni singolo sottostato e'  $1/(2J+1)$ . Quindi, la distribuzione angolare viene:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{*m}(\theta, \varphi)$$

Ricordando la proprietà delle armoniche sferiche

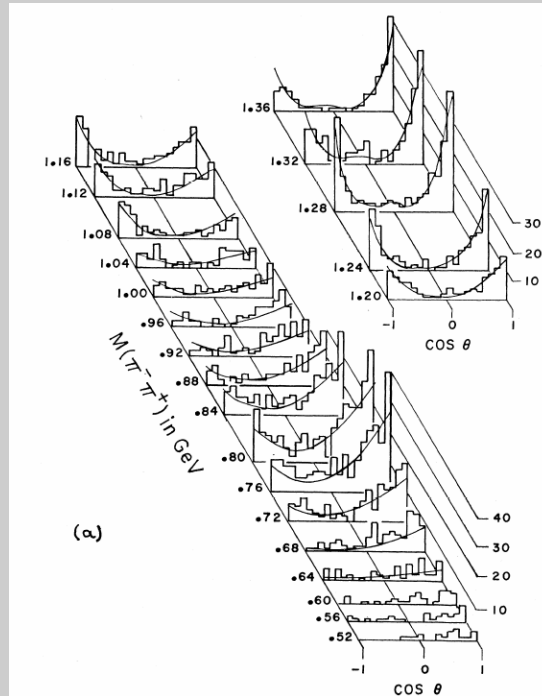
$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m Y_l^{*m} = \frac{2l+1}{4\pi}$$

si ha appunto che

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2J+1} \frac{2J+1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}$$

Quindi, per osservare una distribuzione angolare non isotropa occorre che la  $\rho$  sia prodotta con qualche tipo di polarizzazione (ossia, con qualche disuniformità nella popolazione dei sottostati con diverso valore per la 3° componente dello spin

Si può allora misurare la distribuzione angolare del decadimento della  $\rho$  nel suo CM, ottenendo risultati come questi:



Sull'asse inclinato sono riportati i valori della massa  $\pi^+\pi^-$ , mentre su quello orizzontale i valori di  $\cos\theta$ ; ci sono 2 regioni di massa visualizzate, la prima nell'intorno del picco della  $\rho$ , la seconda attorno al picco di un'altra risonanza, la  $f^0$ . Si osserva immediatamente che la distribuzione angolare cambia decisamente forma vicino al picco: l'andamento è consistente con quello atteso per una risonanza a spin 1, ossia  $|Y_1^0|^2 \propto \cos^2 \theta$ .

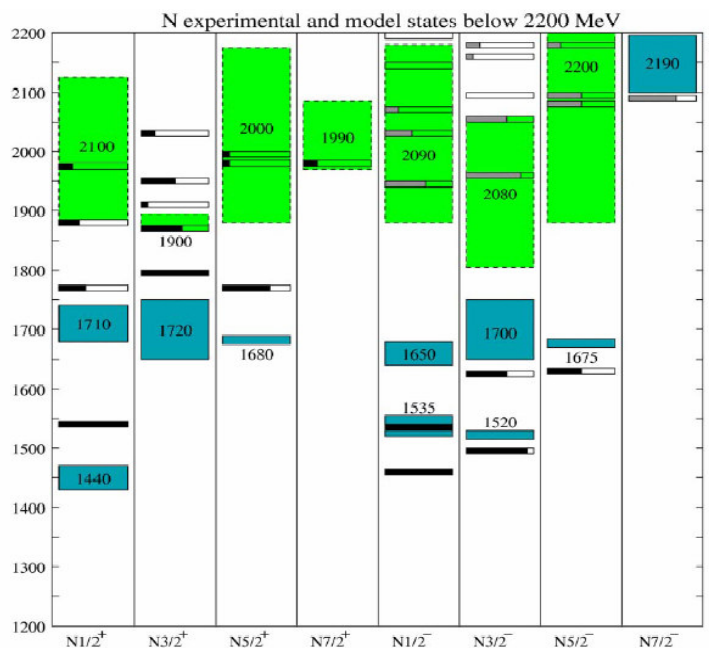
NB Si osservi come invece nella regione della  $f^0$  l'andamento sia diverso, non consistente con spin 1: in effetti, è più consistente con uno spin 2, ossia  $|Y_2^0|^2 \propto (3\cos^2 \theta - 1)^2$

## 12. Resume' sugli stati adronici a stranezza nulla

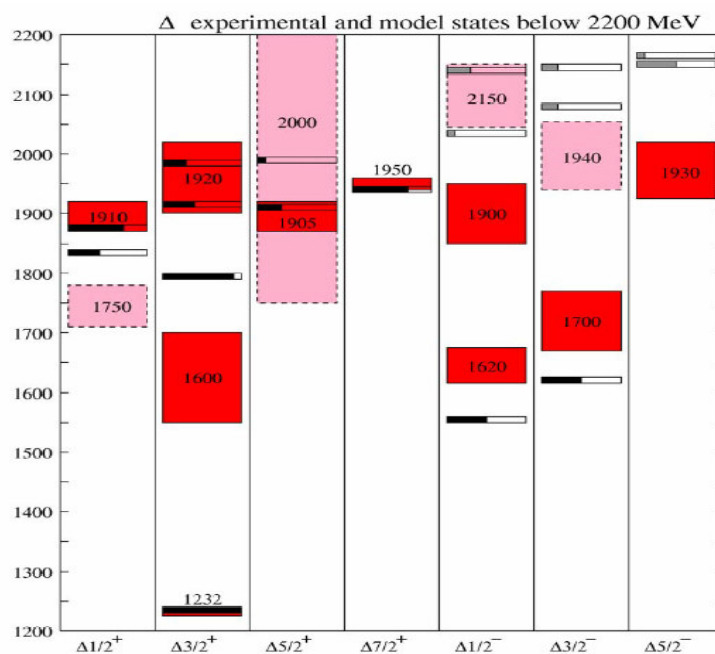
### a) Risonanze barioniche

I seguenti schemi mostrano gli stati eccitati del nucleone, separatamente per la famiglia a isospin  $1/2$  e quella a isospin  $3/2$  (i dati sono tratti dalla presentazione di S.Capstick, Florida State University, alla conferenza *Baryons 2002*.) I grafici mostrano i livelli energetici (energia sull'asse verticale) verso il momento angolare totale (e parita') (asse orizzontale). Occorre ricordare che ognuno degli stati  $\Delta$  compare poi in 4 stati di carica (quartetti,  $I=3/2$ ), mentre ogni stato  $N^*$  compare in 2 stati di carica (doppietti,  $I=1/2$ ). Le barre orizzontali bianconere mostrano il valore sperimentale della massa (la percentuale di nero da' il rapporto di decadimento, fra 0 e 1, per il modo  $N\pi$ ). Le aree colorate mostrano gli intervalli di massa previsti da un modello teorico.

E' evidente la grande ricchezza di questi stati eccitati del nucleone, e anche come l'analisi in spin-parita' porti naturalmente a raggrupparli secondo il valore dei loro numeri quantici, di spin e isospin: considerando i gruppi a massa piu' bassa, osserviamo un doppietto a isospin  $\frac{1}{2}$ , spin  $1/2$  (il nucleone  $N$ ), e un quartetto a isospin  $3/2$ , spin  $3/2$  (la  $\Delta$ )

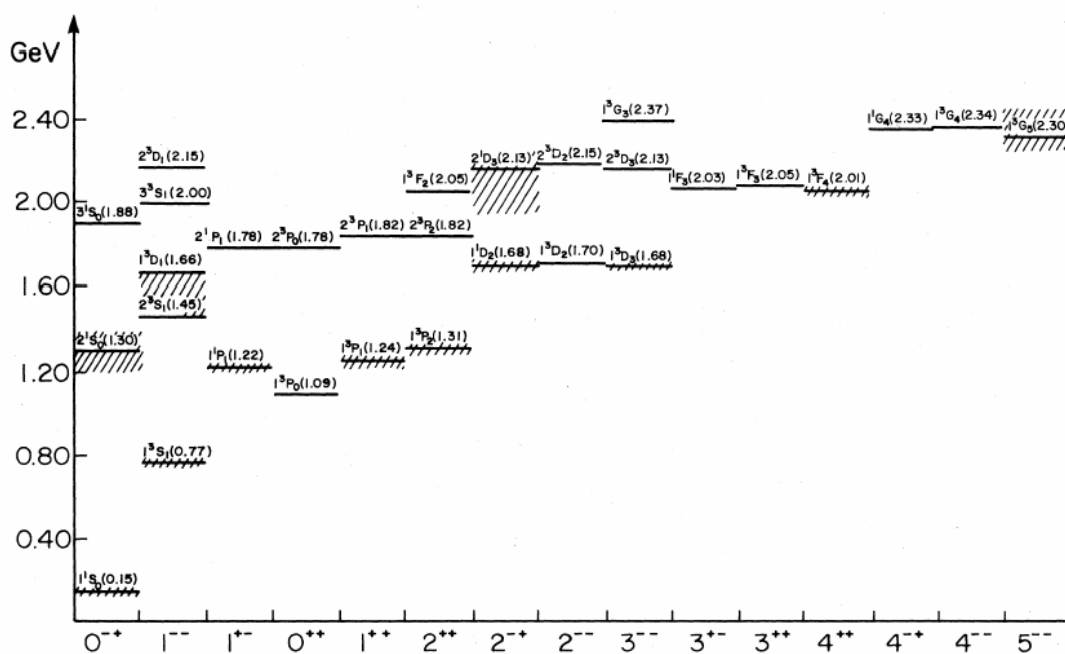


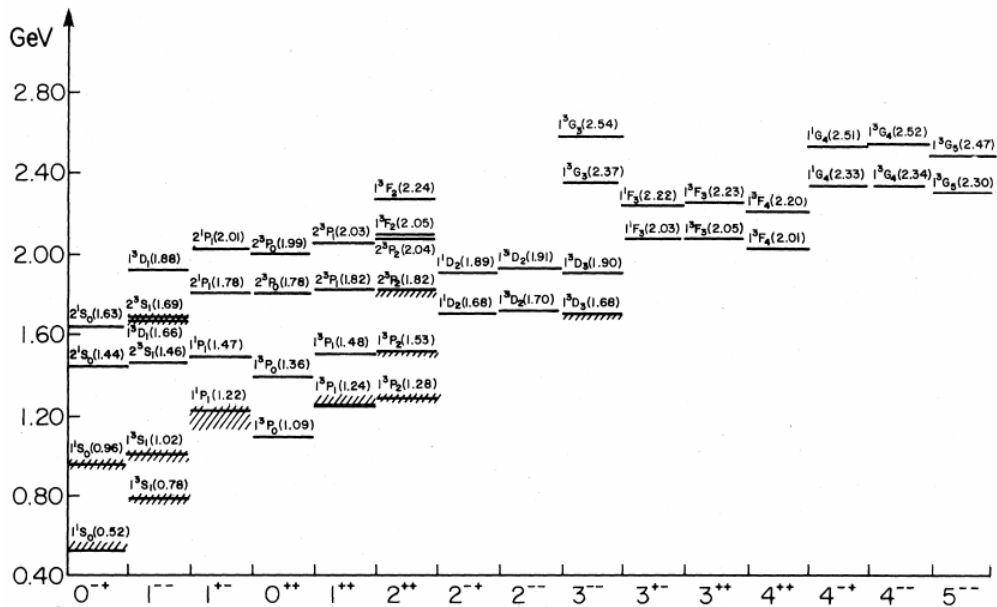




## b) Risonanze mesoniche

I seguenti grafici, tratti da *S. Godfrey et al., PRD 32, 189 (85)*, mostrano una parte dei principali stati mesonici conosciuti, separatamente per stati isovettoriali e isoscalari





Anche qui, sull'asse verticale stanno le energie, mentre sull'asse orizzontale stanno i momenti angolari totali ( e i numeri quantici  $P$  e  $C$ ). Come al solito, le aree ombreggiate indicano le regioni di massa previste da un modello teorico.

**NOTA IMPORTANTE:** In questi grafici non sono rappresentati gli stati con numeri quantici di *stranezza*, *charm*, *bottom* diversi da zero, ne' i cosiddetti *-onia*, ossia gli stati legati  $q$ - $\bar{q}$  dei quark pesanti ( $c, b$ ).

Gli stati con ugual valore di  $J^{PC}$  e diversa energia vengono chiamati le eccitazioni radiali del sistema: essi corrispondono, in senso lato, ai livelli energetici di un atomo o di un nucleo, che hanno un diverso numero quantico principale. Si osservi come gli stati con diverso valore di  $J^{PC}$  non siano degeneri in energia: come si ricordera', nel caso dell'atomo di idrogeno le successive correzioni all'hamiltoniano totale (massa relativistica, struttura fina, struttura iperfina, polarizzazione del vuoto,...) introducono correzioni ai livelli che rimuovono del tutto la elevata degenerazione presente quando si considera solo il potenziale coulombiano. Nell'ipotesi in cui anche gli adroni siano oggetti dotati di struttura interna, il meccanismo puo' essere fondamentalmente simile: ma la forma delle interazioni, e quindi dei termini dell'hamiltoniano, sara' naturalmente assai diversa.

In questo caso, gli stati piu' bassi sono un terzetto a *isospin 1, spin 0* (il  $\pi$ ), due singoletti a *isospin 0, spin 0*, (la  $\eta$  e la  $\eta'$ ) un terzetto a *isospin 1, spin 1* (la  $\rho$ ), due singoletti a *isospin 0, spin 1* (la  $\omega$  e la  $\phi$ ). Questi stati sono tutti prodotti con elevata sezione d'urto nelle collisioni fra adroni, e anche nelle interazioni fra il campo elettromagnetico e gli adroni.

### 13. Stranezza: allargamento del quadro osservativo

I numerosi stati mesonici e barionici descritti sopra non esauriscono il quadro osservativo fornito dagli esperimenti. Come e' noto, fra le fine degli anni '40 e l'inizio degli anni '50 fu osservata, prima nella radiazione cosmica, e poi ai primi acceleratori di alta energia ( il *Cosmotron* a Brookhaven e il *Bevatron* a Berkeley), la produzione di stati adronici instabili di tipo peculiare. La loro caratteristica principale e' il forte contrasto fra la elevata sezione d'urto di produzione in urti adrone-adrone, tipica dell'interazione forte, e la lunga vita media, tipica dell'interazione debole: per questo motivo le nuove particelle vennero chiamate "strane".

Puo' non essere inutile ri-inquadrare il contesto concettuale nel quale si situano le particelle strane: perche' sono strane? Il fatto e' che, in linea generale, il meccanismo dinamico che governa la produzione di una particella e' lo stesso che governa il suo decadimento: questo e' una conseguenza di diverse proprieta' di simmetria fondamentali (time reversal, crossing etc). Quindi p.es. se il barione  $\Lambda^0$  viene prodotto con elevata sezione d'urto per interazione forte, non si vede perche' poi non debba decadere, p.es. in  $p+\pi^-$ , sempre per interazione forte e quindi con vita media molto breve. Viceversa, la sua vita media e' molti ordini di grandezza piu' lunga di quella tipica di un decadimento forte, come quella della  $\Delta^{++}$  in  $p+\pi^+$ . Questo fatto indica la presenza di una diversa e particolare regola di selezione.

Un'altra caratteristica osservata sperimentalmente e' la *produzione associata*, ossia il fenomeno per cui le particelle strane erano sempre prodotte a coppie negli urti fra nucleoni o fra pioni e nucleoni. Il puzzle venne infine risolto introducendo un nuovo numero quantico, la *stranezza* appunto, nullo per tutti gli adroni 'tradizionali', e diverso da zero per le particelle strane; e una nuova regola di selezione, la conservazione della stranezza, osservata dalle interazioni forti e violata da quelle deboli. Cosi', la produzione associata veniva spiegata con la necessita' di conservare la stranezza nel processo forte di produzione (infatti, ad ognuno dei due stati strani viene associata una stranezza opposta, p.es. 1 e -1); e il decadimento debole in adroni non strani con la violazione della stranezza. Se si esclude l'aspetto dinamico (ossia il fatto che la carica elettrica e' anche la sorgente di un campo di forze, il campo elettromagnetico), la proprieta' e' abbastanza simile alla conservazione della carica elettrica, o del numero barionico o leptonico, da parte di tutte (??) le interazioni.

La spettroscopia delle particelle strane assomiglia a quella degli adroni tradizionali: ci sono stati mesonici a spin 0 e 1, i mesoni  $K$  e  $K^*$ , che si osservano in 4 variet : 2 con carica +va e -va, e 2 neutri (quest'ultimo fatto ha costituito per parecchio tempo un puzzle nel puzzle generale rappresentato dalle proprieta' delle particelle

strane, perche' c'e' voluto tempo per capire cosa distingue un tipo di mesone  $K$  neutro dall'altro. Lo studio del sistema  $K^0 - \bar{K}^0$  e' in se' e per se' uno dei capitoli piu' interessanti della fisica delle particelle, e una importante finestra sulla fisica del Modello Standard); e stati barionici con spin  $\frac{1}{2}$  e  $3/2$ . Quelli citati sono solo gli stati a momento angolare (e massa) piu' basso, in realta' sono stati osservati anche mesoni e barioni strani con valori piu' alti di  $J$  e  $m$ .

Tutti questi stati si possono raggruppare in vari multipletti di isospin.

L'assegnazione di valori opportuni del numero quantico di stranezza alle particelle strane puo' sembrare un po' artificiosa: dopo tutto, per spiegare qualcosa che non si capisce, si inventa qualcos'altro che non si sa cosa sia! P.es., la stranezza non risulta associata a un campo di interazione, come la carica elettrica: nondimeno, la conservazione della stranezza risulta assai ben verificata nei processi forti ed elettromagnetici, quindi la stranezza e' un numero quantico utile. Puo' risultare non ovvio il meccanismo con cui assegnare le particelle strane a vari multipletti di isospin: esso e' pero' meno arbitrario di quel che puo' sembrare, se si fa riferimento all'ipotesi che l'isospin sia conservato nei processi forti che coinvolgono le particelle strane. Questa ipotesi, oltre che confermata a posteriori, e' in accordo con la nostra generica concezione del meccanismo di interazione, basata sullo scambio di stati virtuali. Per esempio, nella diffusione elastica

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

si puo' assumere, fra gli altri, uno stato virtuale attraverso il quale la reazione puo' procedere:

$$\pi^- + p \rightarrow (K^0 + \Lambda^0)^* \rightarrow \pi^- + p$$

che deve mantenere il valore definito di isospin. Nell'ipotesi che *l'isospin sia conservato anche nelle interazioni forti delle particelle strane*, consideriamo dunque il problema di assegnare ogni particella strana ad un multipletto di isospin:

- a) Barione  $\Lambda^0$ : poiche' si osserva solo nello stato neutro, assegniamo  $I=0, I_3=0$
- b) A bassa energia, si osserva la reazione di produzione associata:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

Quindi lo stato finale deve essere, come quello iniziale, nello stato  $I=1/2$  o  $3/2$ , e quindi il  $K^0$  deve avere isospin  $I=1/2$  o  $3/2$ . L'assenza di stati doppiamente carichi per il  $K$  porta ad escludere l'esistenza di quartetti ( $I=3/2$ ), e ad ipotizzare l'esistenza di due doppietti a  $I=1/2$ . Per uno di essi viene immediato assumere

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Rimane il problema della collocazione del  $K$  nell'altro doppietto. Ora, si può ricordare che le interazioni forti sono invarianti per  $C$  (coniugazione di carica): ci aspettiamo quindi effettivamente che, accanto al doppietto citato, ne debba esistere un secondo, contenente gli stati coniugati di carica di quelli del primo. Esso conterrà quindi il  $K$ , e un secondo stato neutro, secondo lo schema

$$\begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

In altre parole, la conservazione dell'isospin impedisce di assegnare i  $K$  a un tripletto, come si sarebbe tentati di fare sull'esempio dei  $\pi$ ! D'altra parte, l'identificazione del secondo stato neutro è, di primo acchito, assai problematica: ancora una volta, i dati sperimentali vengono in aiuto, con l'indicazione che modi diversi di decadimento del  $K$  neutro hanno due vite medie diverse. Per quanto il mistero resti fin qui tutt'altro che chiarito, c'è per lo meno evidenza che i  $K$  neutri hanno due modalità distinte di decadimento debole: non è quindi del tutto infondata l'ipotesi che ci siano due specie di  $K$  neutri. Gli stati eccitati dei  $K$  (mesoni strani con  $J > 0$ ) sono instabili rispetto al decadimento forte, quindi si presentano come risonanze mesoniche con larghezza elevata (decine di MeV), con decadimenti tipici in  $K + \text{pioni}$ .

Similmente si può procedere per i barioni strani, pervenendo a identificare, oltre al singoletto  $\Lambda^0$ , un tripletto  $\Sigma^{+,0,-}$ , un doppietto  $\Xi^{-,0}$  e un altro singoletto  $\Omega^0$ . Tutte queste particelle, per ciascuna delle quali esiste la corrispondente antiparticella (con carica, stranezza, momento magnetico e numero barionico opposti), risultano stabili rispetto all'interazione forte, e decadono invece debolmente (o, nel caso della  $\Sigma^0$ , elettromagneticamente) in nucleoni o altri barioni strani, accompagnati da vari altri prodotti di decadimento.

Una delle caratteristiche più importanti dei modi di decadimento debole dei barioni (e anche dei mesoni) strani è che sono fortemente sopresse le transizioni con salto di stranezza  $> 1$ . Ci sono in realtà diverse altre regole empiriche che governano i modi di decadimento debole delle particelle strane, il cui significato e la cui interpretazione risultano estremamente semplici nel quadro del modello a quark. Un cenno a questo argomento sarà fatto nel capitolo dedicato all'interazione debole.

L'indagine sperimentale ha dunque via via posto in evidenza la produzione di stati con diverso valore di stranezza, fino a  $S = -3$ ! (Per convenzione storicamente consolidata, per ciò che riguarda i barioni strani - chiamati anche collettivamente *iperoni* - la stranezza degli stati di particella è  $-va$ , mentre quella degli stati di anti-particella è  $+va$ ). Per altro, lo studio sperimentale con fasci di  $K$  su bersagli di

idrogeno o di deuterio rivela, nel caso del  $K^*$ , una struttura a risonanze, analoga a quella osservata con fasci di  $\pi$ , mentre risulta in un andamento liscio della sezione d'urto per il  $K^*$ .

Riassumendo, il numero quantico di stranezza assomiglia un po' alla carica elettrica, con 2 differenze fondamentali:

*la carica elettrica e' assolutamente conservata da tutte le interazioni; la stranezza non e' conservata dalla interazione debole*

*la carica elettrica e' la sorgente del campo elettromagnetico; la stranezza non e' la sorgente di alcun campo fisico*

Le particelle strane a massa piu' bassa possono allora essere raggruppate nei seguenti multipletti di isospin e stranezza:

### MESONI

Spin 0

| $I_3$ | $S=+1$ | $S=-1$      |
|-------|--------|-------------|
| +1/2  | $K^+$  | $\bar{K}^0$ |
| -1/2  | $K^0$  | $K^-$       |

Spin 1

| $I_3$ | $S=+1$   | $S=-1$         |
|-------|----------|----------------|
| +1/2  | $K^{*+}$ | $\bar{K}^{*0}$ |
| -1/2  | $K^{*0}$ | $K^{*-}$       |

### BARIONI

| $I_3$     | $S$ | nome                           |
|-----------|-----|--------------------------------|
| 0         | -1  | $\Lambda^0$                    |
| +1,0,-1   | -1  | $\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ |
| +1/2,-1/2 | -2  | $\Xi^0, \Xi^-$                 |
| 0         | -3  | $\Omega^-$                     |

### ANTIBARIONI

| $I_3$     | $S$ | nome                                             |
|-----------|-----|--------------------------------------------------|
| 0         | +1  | $\bar{\Lambda}^0$                                |
| +1,0,-1   | +1  | $\bar{\Sigma}^+, \bar{\Sigma}^0, \bar{\Sigma}^-$ |
| +1/2,-1/2 | +2  | $\bar{\Xi}^0, \bar{\Xi}^-$                       |
| 0         | +3  | $\bar{\Omega}^-$                                 |

Le relazione di Gell-Mann e Nishijima puo' essere mantenuta valida modificandola nel modo seguente:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

dove la quantita'  $Y$  cosi' definita si chiama *ipercarica*.

Si conclude quindi, che la stranezza, un po' come l'isospin, si presenta come un *nuovo grado di liberta'* delle particelle ad interazione forte

#### 14. Charm, beauty e top

A partire dalla seconda meta' degli anni '70, e nel seguito fino ad oggi, si sono osservate altre due 'famiglie' di particelle 'stabili', analoghe a quelle con stranezza, chiamate particelle con *charm* e con *beauty*. Anche per esse si e' rivelata una ricca struttura spettroscopica, non ancora del tutto svelata e interpretata a causa delle grandi difficolta' sperimentali. Fra l'altro, proprieta' simili a quelle del sistema  $K^0 - \bar{K}^0$  si osservano anche per i sistemi analoghi  $D^0 - \bar{D}^0$  e  $B^0 - \bar{B}^0$ . In accordo con le previsioni del modello a quark, si sono cominciate a osservare anche particelle di tipo 'misto' (con stranezza e charm, stranezza e beauty, charm e beauty). Malgrado si sia trovata una decina di anni fa una chiara evidenza per il sesto quark (top), non si osservano invece, per motivi che diverranno chiari nel seguito, stati 'stabili' (ossia, con vita media molto piu' lunga di quella degli stati soggetti a decadimento forte) con numero quantico di top diverso da zero. La relazione di *Gell-Mann e Nishijima* viene quindi a essere generalizzata nel modo seguente:

$$Q = I_3 + \frac{N_{barion} + S + C + B + T}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}$$

#### 15. Le simmetrie unitarie

Come si ricordera', il numero quantico di isospin viene introdotto per descrivere la proprieta' saliente dell'interazione forte, ossia l'indipendenza dalla carica. Come e' noto, ci sono due fenomeni fondamentali legati a questo nuovo numero quantico:

- *la conservazione dell'isospin totale, e della sua componente z, in ogni processo forte*
- *la classificazione delle particelle a interazione forte in multipletti di isospin*

Entrambe questi aspetti portano a identificare quella di isospin come una *simmetria* dei sistemi contenenti particelle a interazione forte: come sappiamo, ogni legge di conservazione e' legata a una proprieta' di invarianza di  $H$  rispetto a qualche gruppo di trasformazioni, che e' conseguenza di una proprieta' di simmetria

del sistema fisico; d'altra parte, l'osservazione di multipletti di stati con eguale energia e differenti valori di uno o più numeri quantici indica anch'essa l'esistenza di una proprietà di simmetria del sistema fisico in oggetto.

Si noti che le proprietà di simmetria del sistema possono essere espresse come invarianza, rispetto a un gruppo di trasformazioni, di  $H$  (Hamiltoniano), o equivalentemente anche di  $L$  (Lagrangiana, o densità di Lagrangiana per un sistema continuo): poiché per un sistema relativistico, quest'ultima quantità, al contrario di  $H$ , è un invariante di Lorentz, essa è preferibilmente usata in teoria dei campi

Conseguentemente, è naturale porsi la domanda su quale sia il gruppo di simmetria dell'isospin: come risulta evidente, non ci aspettiamo che si tratti di qualche simmetria di tipo geometrico-cinematico, come quelle considerate a suo tempo, ma piuttosto di un nuovo tipo di *simmetria interna* (ossia, che non coinvolge trasformazioni di coordinate spazio temporali; si noti che in questo senso anche la simmetria di coniugazione di carica sarebbe di questo tipo; tuttavia essa è sotto molti aspetti strettamente legata ad altre due simmetrie di tipo "geometrico", quelle per inversione spaziale e temporale).

L'individuazione del gruppo di simmetria collegato aggiunge poco alla nostra comprensione delle conseguenze della conservazione dell'isospin, tuttavia risulta utile per poi capire meglio come funzionano simmetrie interne più complicate.

## 16. Rotazioni, $U(2)$ e $SU(2)$

### a) Rotazioni

Il gruppo delle rotazioni è strettamente imparentato con il gruppo dell'isospin, quindi conviene richiamare alcune delle sue proprietà principali.

Come detto prima, le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni vengono classificate in base al valore dell'unico operatore di Casimir del gruppo: in base all'interpretazione fisica dei generatori delle rotazioni infinitesime come componenti del momento angolare, esso viene identificato con il (quadrato del) momento angolare totale del sistema. I valori possibili dell'operatore sono le quantità  $j(j+1)$ , con  $j$  intero o semintero. Corrispondentemente, le matrici rappresentative degli elementi del gruppo si possono classificare in base alle caratteristiche geometriche degli oggetti geometrici su cui operano:

| $j$ | $2j+1$ | Quantità |
|-----|--------|----------|
| 0   | 1      | Scalare  |
| 1/2 | 2      | Spinore  |
| 1   | 3      | Vettore  |



|       |     |                |
|-------|-----|----------------|
| $3/2$ | $4$ | <i>Spinore</i> |
| $2$   | $5$ | <i>Tensore</i> |

Se consideriamo un sistema composto, per esso la matrice di rotazione risulterà il *prodotto esterno* delle matrici che ruotano i sottosistemi componenti. Si può dimostrare che la rappresentazione prodotto è *riducibile*, ossia può essere scomposta, per mezzo di una trasformazione unitaria, nella somma di rappresentazioni a dimensione minore, ciascuna delle quali è *autonoma* (nel senso che, all'interno di ognuna di esse, le componenti si trasformano fra loro, senza uscire dalla rappresentazione).

P.es., se combiniamo due sottosistemi a spin 1 (vettori, 3 componenti ciascuno), otteniamo 9 prodotti di componenti, che possiamo arrangiare in un vettore composto a 9 righe: su di esso agirà ovviamente una matrice rappresentativa 9x9:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & . & . & . & . & . & . & . & r_{19} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ r_{91} & . & . & . & . & . & . & . & r_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Quando la rappresentazione è riducibile, come in questo caso, è sempre possibile trovare una trasformazione unitaria che riduca la matrice a forma diagonale a blocchi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & a_{33} & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & a_{44} & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{77} & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{pmatrix}$$

Quindi, l'oggetto geometrico su cui la matrice opera si spezza in tre oggetti, a dimensione 1, 3 e 5, sui quali operano indipendentemente l'una dall'altra le 3 sottomatrici indicate. Queste sottomatrici non sono ulteriormente

scomponibili, e quindi costituiscono altrettante rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni. Simbolicamente si scrive:

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$$

per indicare che il *prodotto esterno (tensoriale)* di due rappresentazioni **3** e' la *somma diretta* delle tre rappresentazioni **1, 3, 5**. Si noti che questo risultato, e in generale le regole di scomposizione del prodotto di rappresentazioni, cambiano per i diversi gruppi che si considerano: le regole di SU(2) sono diverse da quelle di SU(3) etc, in conseguenza della diversa struttura dell'algebra di Lie di ogni gruppo.

## b) Rappresentazioni di grado pari

Nelle rappresentazioni di grado dispari le matrici, che operano su tensori a  $(2j+1)$  componenti, sono ortogonali. Le cose sono piu' complicate per quelle di grado pari: se consideriamo p.es. la rappresentazione di grado 2, le relative matrici agiscono su oggetti geometrici a 2 componenti. Questi oggetti *non* sono, evidentemente, normali vettori a 2 componenti reali: una matrice 2x2 che sia ortogonale dipenderebbe da un solo parametro, e quindi non potrebbe rappresentare una rotazione in 3 D, che dipende da 3 angoli.

Si ricordi che una matrice in 2 dimensioni, ortogonale, soddisfa le condizioni:

$$MM^T = 1$$

$$\rightarrow m_{11}^2 + m_{12}^2 = 1$$

$$\rightarrow m_{22}^2 + m_{21}^2 = 1$$

$$\rightarrow m_{12}m_{22} + m_{11}m_{21} = 0$$

che lasciano un solo parametro libero, coerentemente con le attese per la rotazione di un vettore a 2 componenti (che sta in un piano).

Quindi la matrice di ordine 2 agisce su (leggi: *ruota*, visto che e' una rappresentazione del gruppo delle rotazioni) oggetti geometrici a 2 componenti complesse (gli *spinori*, appunto), che hanno proprieta' di trasformazione per rotazioni diverse da quelle dei comuni vettori a 2 dimensioni. L'analisi delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni rivela dunque una nuova varieta' di enti geometrici, che ha applicazioni interessanti in meccanica quantistica. Definendo la norma dello spinore  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  come:

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2 = |a|^2 + |b|^2 = aa^* + bb^*$$

richiediamo, come e' naturale, che essa sia lasciata invariata dalla rotazione. Quindi, siamo portati a individuare le matrici di rotazione per gli spinori (ossia, le matrici della rappresentazione **2**) come tutte le matrici *unitarie*  $2 \times 2$ . In generale potremo scrivere:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow 8 \text{ parametri liberi (Re+Im)}$$

$$MM^\dagger = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 condizioni:

$$\left. \begin{aligned} AA^* + BB^* &= 1 \\ AC^* + BD^* &= 0 \\ CA^* + DB^* &= 0 \\ CC^* + DD^* &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 \text{ parametri liberi}$$

C'e' quindi ancora qualcosa di troppo: l'insieme delle matrici considerate dipende da 4 parametri, uno in piu' rispetto alle rappresentazioni di grado dispari del gruppo delle rotazioni.

c)  $U(2)$  e  $SU(2)$

L'insieme di tutte le matrici unitarie  $2 \times 2$  e' (ovviamente) un gruppo, che si chiama  $U(2)$ . Per queste matrici possiamo scrivere, visto che il determinante del prodotto e' il prodotto dei determinanti:

$$\det(M) \det(M^\dagger) = \det(MM^\dagger) = 1 \rightarrow |\det(M)|^2 = 1$$

il che mostra che il determinante di  $M$  e' una pura fase:

$$\det(M) = e^{i\varphi}$$

Possiamo ridurre di uno il numero dei parametri del gruppo richiedendo la condizione supplementare

$$\det(M) = 1$$

In sostanza, questo si puo' fare perche' la fase di uno stato quantistico e' arbitraria e non misurabile.

Il gruppo di tutte le matrici unitarie e unimodulari si chiama  $SU(2)$ . Esso ha 3 parametri, esattamente come il gruppo delle rotazioni: possiamo così cercare la corrispondenza fra gli elementi dei due gruppi.

Un'osservazione importante sulle matrici unitarie unimodulari

Sappiamo che ogni matrice unitaria si può scrivere nella forma esponenziale:

$$M = e^{iH}$$

in cui  $H$  è una matrice hermitiana. Il determinante di ogni matrice unitaria essendo una pura fase, se si impone la condizione di unimodularità si ottiene

$$\det(M) = 1 \rightarrow \det(e^{iH}) = 1$$

Ora, ci si può sempre mettere nel caso in cui  $M$  è diagonale: se non lo è, possiamo trovare una trasformazione unitaria  $U$  che la diagonalizzi, lasciando invariato il determinante:

$$U : M \rightarrow U M U^{-1}$$

$$\det(M) \rightarrow \det(U M U^{-1}) = \underbrace{\det(U)}_{e^{i\varphi}} \det(M) \underbrace{\det(U^{-1})}_{e^{-i\varphi}} = \det(M)$$

Si noti che  $M$  è diagonale se lo è  $H$  (basta pensare allo sviluppo in serie di potenze di  $e^{iH}$ );  $H$ , essendo hermitiana, è sempre diagonalizzabile. Consideriamo il determinante di  $M$  quando la matrice è diagonale:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n m_{ii} \rightarrow \ln(\det(M)) = \sum_{i=1}^n \ln(m_{ii})$$

$$\ln(m_{ii}) = \ln(e^{iH_{ii}}) = iH_{ii} \rightarrow \sum_{i=1}^n \ln(m_{ii}) = i\text{Tr}(H)$$

Quindi:

$$\ln(\det(M)) = i\text{Tr}(H) \rightarrow \det(M) = e^{i\text{Tr}(H)}$$

Richiedere  $\det(M)=1$  è quindi equivalente a imporre  $\text{Tr}(H)=0$ . Quindi, l'insieme delle matrici  $2 \times 2$ , hermitiane a traccia nulla è sufficiente a costruire tutto il gruppo  $SU(2)$ . Poiché qualunque matrice appartenente a questo insieme può essere scritta come combinazione lineare delle 3 matrici di Pauli, oltre che della matrice identità, queste 3 matrici costituiscono l'insieme dei generatori di  $SU(2)$ : questo non ci stupisce, visto

che esse costituiscono, in quanto componenti del momento angolare, anche l'insieme dei generatori del gruppo delle rotazioni per un sistema a spin  $1/2$

Si può cogliere qualcosa del significato geometrico della corrispondenza fra rotazioni e matrici unitarie nel seguente modo: consideriamo l'insieme delle generiche matrici  $M$ ,  $2 \times 2$ , hermitiane e a traccia nulla:

$$M = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & -a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(M) = -a^2 - b^2 - c^2$$

Tale insieme costituisce anch'esso uno spazio vettoriale, come non è difficile dimostrare; su di esso è quindi possibile realizzare una rappresentazione di  $SU(2)$ . L'azione degli elementi del gruppo  $SU(2)$  in questo spazio vettoriale si esplica secondo le regole di trasformazione delle matrici:

$$M \rightarrow M' = U M U^{-1} = U M U^\dagger$$

Siccome la trasformazione è unitaria, si conservano traccia, determinante, hermiticità. Quindi:

$$M' = \begin{pmatrix} a' & b' - ic' \\ b' + ic' & -a' \end{pmatrix} \rightarrow \det(M') = -a'^2 - b'^2 - c'^2$$

Di conseguenza  $a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2$ ; se ora interpretiamo  $a, b, c$  come le componenti di un vettore, vediamo che il mod. quadro del vettore viene conservato dalla trasformazione di  $SU(2)$ . Questo indica che le matrici del gruppo  $SU(2)$  sono in grado di ruotare i vettori a 3 componenti:  $SU(2)$  è quindi di fatto equivalente al gruppo delle rotazioni.

Quindi, l'insieme delle trasformazioni del gruppo  $SU(2)$  è in corrispondenza con l'insieme delle rotazioni in 3D (non biunivoca: ad ogni rotazione, corrispondono 2 trasformazioni di  $SU(2)$ , con segno opposto): Il gruppo delle rotazioni è  $SU(2)$ , essendo isomorfi (o quasi), hanno le stesse rappresentazioni irriducibili. Possiamo dire, usando un linguaggio non rigoroso, che il gruppo  $SU(2)$  è per definizione l'insieme delle "rotazioni" degli spinori a 2 componenti, ricordando che per ruotare uno spinore non si può usare una matrice ortogonale, ma ne occorre una unitaria.

## 17. $SU(2)$ e isospin

Il gruppo  $SU(2)$  compare dunque come una delle rappresentazioni unitarie del gruppo delle rotazioni. Tuttavia, e' evidentemente possibile partire dalla definizione stessa di  $SU(2)$  come insieme delle matrici  $2 \times 2$  unitarie e unimodulari, in quanto gruppo in se' e per se'. Esso avra' le stesse rappresentazioni del gruppo delle rotazioni, visto che e' ad esso (quasi) isomorfo. Questo punto di vista si rivela utile nell'identificarlo come il gruppo di simmetria dell'isospin.

### *Qualche osservazione sul significato della simmetria di isospin*

Lo scopo di questa nota e' quello di tentare di chiarificare il significato fisico della simmetria di isospin (e, per estensione, di altre simmetrie di flavor: piu' in generale, di simmetrie di tipo interno). Spesso si ha la sensazione che, al di la' degli aspetti e delle manipolazioni formali, il senso fisico di queste simmetrie non venga colto completamente: a parere del sottoscritto, la ragione di questo fatto potrebbe esser fatta risalire a una insufficiente comprensione del significato di spin.

### *Lo spin*

Normalmente, le trattazioni elementari di questo soggetto partono dal concetto di momento angolare: accanto alla componente di origine orbitale, nella trattazione non relativistica si procede di solito a introdurre la componente intrinseca, le cui proprieta' sono scelte ad hoc in modo da accordarsi all'esperienza. L'introduzione di funzioni d'onda a 2 componenti segue come necessaria, in considerazione dell'espressione esplicita delle matrici componenti di  $\mathbf{J}$  quando  $j=1/2$ .

Come visto nel paragrafo precedente, risulta d'altronde possibile introdurre funzioni d'onda a 2 o piu' componenti (alla Pauli), in modo un po' meno surrettizio, anche se fondamentalmente sempre *ad hoc*, richiedendo in modo generale che esse abbiano proprieta' di simmetria definite rispetto al gruppo delle rotazioni: questo e' ragionevole se accettiamo il gruppo delle rotazioni come gruppo di simmetria di  $H$  per una particella. Questa richiesta equivale, come si e' visto, a quella di identificarle come stati appartenenti alle rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni. Poiche', come visto prima, le rappresentazioni irriducibili hanno tutte le dimensioni intere  $d=2j+1$ , siamo condotti in modo naturale ad accettare l'idea che ci siano funzioni d'onda a  $>1$  componenti.

La possibilita' di introdurre funzioni d'onda a piu' di una componente suggerisce che esse descrivano stati nei quali sono presenti ulteriori *gradi di liberta' (interni)* oltre a quelli caratteristici del moto orbitale (che sono la versione quantizzata dell'analogo classico della particella). I generatori del gruppo delle rotazioni nelle rapp. irr. di cui si parla devono quindi rappresentare altrettante *grandezze fisiche* legate a questi ulteriori gradi di liberta'; nel caso delle rotazioni, le grandezze fisiche sono identificabili con le componenti del momento angolare intrinseco (spin) dello stato considerato.

Dal punto di vista matematico, quindi, l'esistenza di multipletti di stati con la stessa energia segue dall'invarianza di  $H$  per rotazioni.

Ora, l'argomento può anche essere usato alla rovescia: l'osservazione di multipletti di stati con la stessa energia e diverso valore di un qualche grado di libertà interno suggerisce l'esistenza di una proprietà di simmetria del sistema, ossia l'invarianza di  $H$  rispetto a un gruppo di trasformazioni. Nel caso citato prima, il grado di libertà interno è una delle componenti del momento angolare, e il gruppo è quindi quello delle rotazioni. Per gli stati delle particelle elementari, a parte alcune complicazioni relativistiche, questo è appunto quel che si osserva: ci sono stati a momento angolare intrinseco nullo (scalari), come i pioni e i  $K$ , stati a spin  $1/2$  (spinori), come gli elettroni, i protoni o i quark, a spin 1 (vettori), come i fotoni e i mesoni  $\rho$ , etc.

### *L'isospin*

L'osservazione sperimentale mette in luce, come è noto, l'esistenza di altri multipletti, famiglie di particelle a *interazione forte* in cui il grado di libertà interno non è legato a proprietà "meccaniche", come il momento angolare intrinseco, ma piuttosto al valore della carica elettrica. In altre parole, si osservano famiglie di particelle di massa *molto simile* (ossia, non identica come nel caso della simmetria per rotazioni) e diverso valore della carica elettrica. Unito all'indipendenza dell'interazione forte dalla carica elettrica, osservata p.es. confrontando lo scattering  $pp$ ,  $pn$  e  $nn$  a bassa energia, o i livelli energetici dei nuclei speculari, questo fatto suggerisce di interpretare tutte le particelle di una data famiglia come diversi stati di un'unica particella: in ognuno di questi stati abbiamo un valore diverso per qualche grado di libertà interno (*non meccanico*), da investigare.

Se questo modo di considerare le cose è sensato, la struttura dei multipletti osservati dovrebbe metterci in grado di stabilire quale sia il gruppo di simmetria di  $H$  del quale i multipletti stessi sono la manifestazione. Ora, nel considerare le famiglie di particelle a interazione forte, si osservano singoletti, doppietti, triplette, quadruplette: in altre parole, tutti i multipletti più bassi di  $SU(2)$ . Questo fa pensare che, almeno provvisoriamente, il gruppo di simmetria delle interazioni forti sia da identificare con  $SU(2)$ . Per la sua completa analogia con l'altro  $SU(2)$ , quello che definisce il grado di libertà interno legato allo spin degli stati, esso viene chiamato il *gruppo dell'isospin*. L'isospin è dunque la grandezza fisica i cui autovalori definiscono la struttura a multipletti delle particelle a interazione forte: pur non essendo una grandezza meccanica, esso è nondimeno una grandezza fisica a tutti gli effetti, al pari della carica elettrica (con l'importante differenza che non possiamo prenderlo come sorgente di un campo di forza).

Consideriamo il caso di un nucleone: l'ipotesi base della simmetria di isospin è che protone e neutrone siano i due possibili stati dinamici per una particella generica, il nucleone, nello stesso modo in cui i due stati a spin "su" e a spin "giù" sono i possibili stati per un elettrone. Il nucleone viene quindi ad avere un *nuovo grado di libertà*, che non compare per le particelle, come gli elettroni o i neutrini, che non

sono soggette all'interazione forte. In questa descrizione, quindi, i due stati base nello spazio degli isospin per il nucleone sono:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi stati sono, nello spazio dell'isospin, gli stati base dell'insieme degli spinori a 2 componenti: ogni altro stato del nucleone risulta raggiungibile da questi tramite una "rotazione", che si effettua come visto tramite una delle matrici unitarie di  $SU(2)$ .

Occorre però precisare che, agli effetti pratici, non tutte le combinazioni lineari degli stati base sono fisicamente realizzabili: visto che la carica elettrica è assolutamente conservata (regola di superselezione), gli stati a carica non definita non sono stati fisici e non possono realizzarsi. Lo potrebbero se l'interazione e.m. potesse essere spenta...

Supponiamo che l'Hamiltoniano di interazione (quello cioè dell'int. forte) sia invariante rispetto a queste "rotazioni": allora, la conseguenza è che l'operatore di Casimir del gruppo (che, in analogia al gruppo delle rotazioni nello spazio ordinario, è appunto  $I(I+1)$ ) viene conservato, insieme a una delle componenti di  $\mathbf{I}$  (di solito si sceglie  $I_3$ ); inoltre, che gli stati appartengono alle rappresentazioni irriducibili del gruppo.

Riassumendo: siccome  $SU(2)$  è isomorfo al gruppo delle rotazioni, ha le stesse rapp. irriducibili (*scalare/singoletto, spinore/doppietto, vettore/tripletto, ...*). In generale, gli operatori infinitesimi sono identici alle matrici del momento angolare; nel caso della rappresentazione **2**, essi coincidono con le matrici con le quali il gruppo è definito. Ricordando che i generatori sono rappresentati all'ordine 2 dalle matrici di Pauli (indicate in questo contesto con il simbolo  $\tau$ ), l'operatore di isospin per un doppietto è quindi:  $\mathbf{I} = \tau/2$ .

Questa introduzione all'argomento, per quanto breve e incompleta, mostra però quale sia l'origine e il significato profondo dell'affermazione, altrimenti alquanto sconcertante, che l'interazione forte è *invariante per rotazioni* nello spazio dell'isospin.

#### *Isospin e carica elettrica*

È abbastanza naturale confrontare grandezze conservate e proprietà generali dell'interazione elettromagnetica e di quella forte, *così come compresa fino a questo punto*, per metterne in luce analogie e differenze. È utile ricordare, a questo scopo, che in QED si dimostra come la conservazione della carica elettrica sia una conseguenza di una proprietà di invarianza, quella per trasformazioni di fase globali del campo dell'elettrone.



L'insieme di queste trasformazioni e' un gruppo abeliano a 1 parametro, chiamato  $U(1)$ , il quale in senso generale e' una versione 1-dimensionale del gruppo delle rotazioni.

#### Int. Elettromagnetica

Grandezza conservata: *Carica elettrica*  
 Grandezza scalare (1 comp)  
 Simmetria: trasformazioni di fase  
 ( $\equiv$  'rotazioni' 1-dimensionali)  
 Gruppo:  $U(1)$   
*Abeliano*  
 Rapp.irr.: solo 1-dimensionali  
 Multipletti: singoletti

Valori di  $Q$  (in unita' di  $e$ ) *non fissati*  
 (la quantizzazione della carica *non e'*  
 spiegata in QED)  
 Sorgente di un campo

#### Int. Forte

Grandezza conservata: *Isospin*  
 Grandezza vettoriale (3 comp)  
 Simmetria: rotazione interna  
 ( $\equiv$  estensione della trasf. di fase)  
 Gruppo:  $SU(2)$   
*Non abeliano*  
 Rapp.irr.: 1,2,3,4,...-dimensionali  
 Multipletti: singoletti, doppietti,  
 ...

Valori di  $I, I_3$  *fissati*  
 (i valori di  $I$  e  $I_3$  sono fissati dalle  
 proprieta' di  $SU(2)$ )  
 Non sorgente di un campo

In questo quadro, dunque, l'analogia fra carica elettrica ed isospin e' limitata: mentre entrambe le quantita' si possono identificare come grandezze conservate, l'isospin non sembra ricoprire fin qui alcun ruolo dinamico. In particolare, le proprieta' del numero quantico di isospin *non specificano* le caratteristiche del campo delle interazioni forti, tanto e' vero che sono stati proposti diversi modelli di interazione forte (scambio di pioni, scambio di mesoni vettoriali, etc) tutti costruiti in modo da rispettare la conservazione dell'isospin.

Come si vedra' in seguito, la natura duale della carica elettrica – grandezza conservata e sorgente di un campo di forza, puo' essere compresa come conseguenza di proprieta' di simmetria piu' generali di quella considerata fin qui. Essa puo' effettivamente essere estesa con successo anche alle quantita' conservate caratteristiche dell'interazione forte, le *cariche di colore*: il gruppo di simmetria coinvolto (analogo a  $SU(2)$ , anche se piu' complicato) e' chiamato  $SU(3)$  di colore.

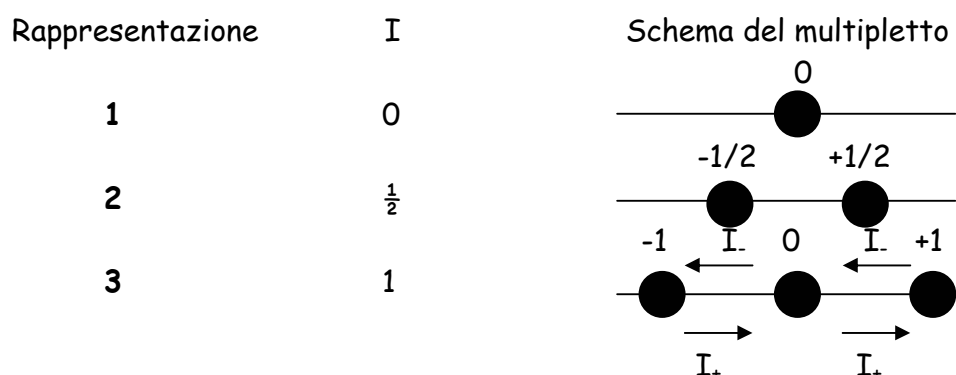
## 18. Multipletti

Possiamo dare una rappresentazione grafica dei multipletti che risultano dalla simmetria di isospin: visto che c'e' un solo operatore che commuta con l'operatore di Casimir, possiamo rappresentare ogni multipletto su una retta: ogni cerchio rappresenta un possibile valore di  $I_3$ . Gli operatori  $I_i$ ,  $i=1,2,3$  sono i generatori delle rotazioni nello spazio dell'isospin. Si possono costruire due operatori ausiliari:

$$I_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 + iI_2)$$

$$I_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 - iI_2)$$

il cui effetto sugli stati e' quello di far passare da un membro del multipletto ad un altro, incrementando o diminuendo di 1 il valore di  $I_3$ :

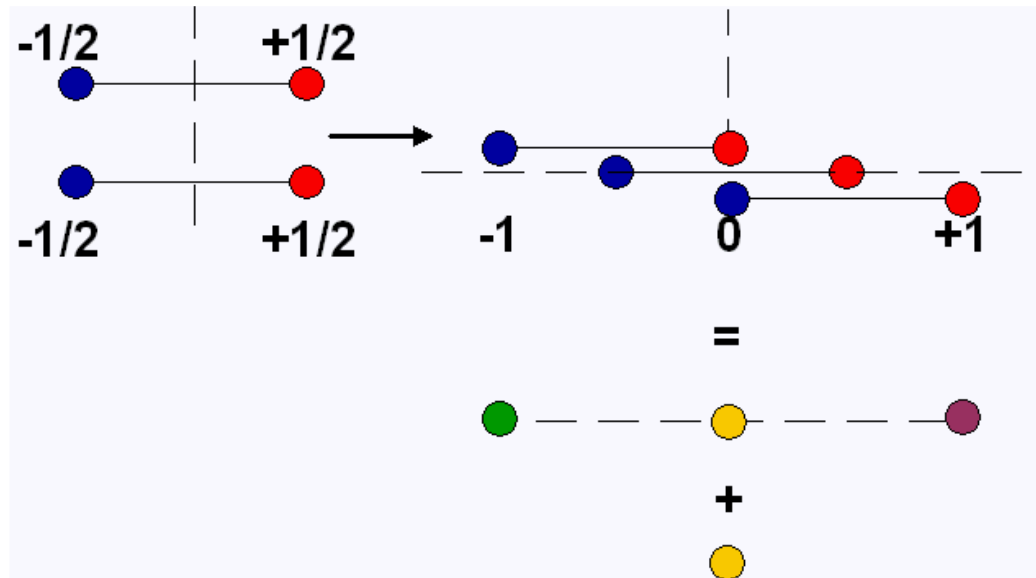


etc. Poiche' gli elementi di un multipletto sono distinti dalla loro carica elettrica, possiamo scrivere per le rappresentazioni dispari:  $Q = I_3$ . Questa relazione deve essere modificata per le rappresentazioni pari, nelle quali  $I_3$  assume valori semiinteri; considerando che ad essa appartiene il nucleone, che ha numero barionico 1, possiamo scrivere la relazione piu' generale  $Q = I_3 + B/2$ . Questa e' la forma piu' semplice della relazione di Gell-Mann e Nishijima, e vale per tutti gli stati adronici (mesoni e barioni) non strani (e non charmati, etc).

## 19. Rappresentazioni prodotto in $SU(2)$

Nell'ipotesi che l'isospin sia una simmetria delle particelle a interazione forte, ogni stato fisico di un sistema di particelle a interazione forte deve appartenere ad una rappresentazione di  $SU(2)$ : quindi, quando si ha a che fare con un sistema composto occorre combinare correttamente i multipletti di isospin dei diversi componenti. Questa operazione e' del tutto analoga alla somma dei momenti angolari, e segue in realta' le stesse regole matematiche, visto l'isomorfismo fra  $SU(2)$  e il gruppo delle rotazioni. Un modo assai semplice di combinare i multipletti e' quello che fa uso dei diagrammi dei pesi: graficamente, si sovrappone il diagramma del II multipletto ("moltiplicatore") centrandolo su ognuno dei siti del I multipletto ("moltiplicando"). Gli autovalori dell'operatore diagonale ( $I_3$ ) si sommano linearmente in ogni sito, e il risultato e' un diagramma dei pesi del sistema composto, in cui ci sono i siti risultanti e la molteplicita' di ogni sito. L'esempio mostrato in figura mostra come si combinano i pesi di due doppietti di isospin: si

riporta il centro di un multipletto in corrispondenza della posizione di ogni autovalore dell'altro. La combinazione ottenuta non è una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$  (l'autovalore 0 compare con peso 2), e può essere scomposta in una somma di rappresentazioni irriducibili come indicato



In pratica, le regole di composizione degli isospin sono condensate nei coefficienti di Clebsch-Gordan, come per i momenti angolari.

## 20. Rappresentazione coniugata

Ad ogni rappresentazione irriducibile è possibile associare una rappresentazione coniugata (o duale) nel seguente modo: consideriamo la rappresentazione definita dall'equazione

$$\psi' = D(\alpha)\psi$$

$\psi$  è un vettore e  $D$  è una matrice della rappresentazione considerata, che si può come è noto scrivere:

$$D(\alpha) = e^{i\alpha F}$$

con  $F$  hermitiana. Facendo il complesso coniugato dell'equazione si trova:

$$\begin{aligned}\psi^* &= D^* \psi^* \\ D^* &= e^{-i\alpha(F)^*} \equiv e^{i\alpha \tilde{F}}\end{aligned}$$

in cui  $\tilde{F} = -F^*$  sono i generatori della rappresentazione coniugata  $D^*$ ; quest'ultima è effettivamente una rappresentazione perché prendere il complesso coniugato

degli elementi delle matrici non altera le proprietà dei loro prodotti. Ora, si vede che gli autovalori nella rappresentazione coniugata hanno segno opposto a quelli nella rappresentazione originale: quindi, poiché il diagramma dei pesi originale è simmetrico rispetto all'origine, quello coniugato è del tutto equivalente; si ritrovano cioè gli stessi autovalori, solo rinominati. In conclusione, per  $SU(2)$  la rappresentazione coniugata è equivalente all'originale (leggi: indistinguibile).

## 21. Stranezza

Per riassumere in breve una storia già detta, il puzzle rappresentato dalle strane proprietà di una famiglia di particelle osservate prima nei raggi cosmici e poi copiosamente prodotte agli acceleratori di alta energia, viene risolto introducendo un nuovo numero quantico, la *stranezza* appunto, che vale 0 per tutti gli stati "normali", mentre è  $\neq 0$  per le particelle strane: l'assegnazione del numero quantico di stranezza viene fatta in modo che la stranezza stessa sia conservata in tutti i processi forti (v. capitolo su risonanze).

Quest'ultima è l'idea base per spiegare la fenomenologia delle particelle strane:

*c'è un nuovo grado di libertà, la stranezza, che è conservata dalla interazione forte e da quella elettromagnetica, mentre può essere violata da quella debole*

In questo modo si spiega il decadimento lento delle particelle strane (stranezza violata:  $\Delta S \neq 0 \rightarrow$  non interazione forte o e.m., solo debole, quindi processo lento), e anche la loro produzione associata (stranezza conservata:  $\Delta S = 0 \rightarrow$  processo forte OK se sono prodotte 2 particelle strane con stranezza opposta; ovviamente anche altre configurazioni sono possibili, purché complessivamente  $\Delta S = 0$ ). Quindi il numero quantico di stranezza assomiglia un po' alla carica elettrica, con 2 differenze fondamentali:

- *la carica elettrica è assolutamente conservata da tutte le interazioni; la stranezza non è conservata dalla interazione debole*
- *la carica elettrica è la sorgente del campo elettromagnetico; la stranezza non è la sorgente di alcun campo fisico*

Poiché le particelle strane interagiscono fortemente, sono portatrici anche del numero quantico di isospin, che viene assegnato esattamente con gli stessi criteri con cui viene assegnato alle particelle non strane.

Si noti che anche le particelle con charm e beauty si raggruppano naturalmente in multipletti di isospin: la cosa è meno interessante a causa della grande differenza fra le loro masse e quelle delle particelle senza

numeri quantici extra e strane, che rende implausibile la ricerca di simmetrie unitarie piu' elevate di  $SU(3)$ , come si vedra' fra breve.

Le particelle strane a massa piu' bassa possono allora essere raggruppate nei seguenti multipletti di isospin e stranezza:

### MESONI

| $I_3$  | $S=+1$ | $S=-1$      |
|--------|--------|-------------|
| $+1/2$ | $K^+$  | $\bar{K}^0$ |
| $-1/2$ | $K^0$  | $K^-$       |

### BARIONI

| $I_3$        | $S$ | nome                           |
|--------------|-----|--------------------------------|
| 0            | -1  | $\Lambda^0$                    |
| $+1,0,-1$    | -1  | $\Sigma^+, \Sigma^-, \Sigma^0$ |
| $+1/2, -1/2$ | -2  | $\Xi^0, \Xi^-$                 |
| 0            | -3  | $\Omega^-$                     |

### ANTIBARIONI

| $I_3$        | $S$ | nome                                             |
|--------------|-----|--------------------------------------------------|
| 0            | +1  | $\bar{\Lambda}^0$                                |
| $+1,0,-1$    | +1  | $\bar{\Sigma}^+, \bar{\Sigma}^0, \bar{\Sigma}^-$ |
| $+1/2, -1/2$ | +2  | $\bar{\Xi}^0, \bar{\Xi}^-$                       |
| 0            | +3  | $\bar{\Omega}^-$                                 |

## 22. Supermultipletti

Viene spontaneo chiedersi se tutta la popolazione dei vari multipletti di isospin non possa essere raggruppata in famiglie piu' vaste. Storicamente, i primi tentativi di unificazione e semplificazione della complessa fenomenologia delle interazioni forti furono proprio nel senso di identificare dei "multipletti di multipletti": anche se questa strada non ha poi portato di per se' a una comprensione corretta e completa della dinamica dell'interazione forte, il risultato e' lo stesso interessante, e conduce direttamente all'idea di costituenti. Il pattern che si presenta e' riassunto nelle tabelle seguenti, nelle quali sono indicati i vari multipletti di  $(S, I)$  osservati, separati per spin/parita': questa separazione e' ragionevole, visto che ci aspettiamo che l'Hamiltoniano delle interazioni forti commuti con il momento angolare totale e con la parita'.

## MESONI

$$J^P=0^-$$

| I   | S=+1 | S=0           | S=-1      |
|-----|------|---------------|-----------|
| 0   |      | $\eta, \eta'$ |           |
| 1/2 | $K$  |               | $\bar{K}$ |
| 1   |      | $\pi$         |           |

$$J^P=1^-$$

| I   | S=+1  | S=0               | S=-1        |
|-----|-------|-------------------|-------------|
| 0   |       | $\omega, \varphi$ |             |
| 1/2 | $K^*$ |                   | $\bar{K}^*$ |
| 1   |       | $\rho$            |             |

$$J^P=2^+$$

| I   | S=+1     | S=0        | S=-1           |
|-----|----------|------------|----------------|
| 0   |          | $f_0, f_1$ |                |
| 1/2 | $K^{**}$ |            | $\bar{K}^{**}$ |
| 1   |          | $a_2$      |                |

## BARIONI

$$J^P=1/2^+$$

| I   | S=-2  | S=-1                      | S=0 |
|-----|-------|---------------------------|-----|
| 0   |       | $\Lambda^0, \Lambda^{0*}$ |     |
| 1/2 | $\Xi$ |                           | $N$ |
| 1   |       | $\Sigma$                  |     |

$$J^P=3/2^+$$

| I   | S=-3       | S=-2    | S=-1       | S=0      |
|-----|------------|---------|------------|----------|
| 0   | $\Omega^-$ |         |            |          |
| 1/2 |            | $\Xi^*$ |            |          |
| 1   |            |         | $\Sigma^*$ |          |
| 3/2 |            |         |            | $\Delta$ |

E' evidente la presenza di regolarita' nei numeri quantici, anche se non e' evidente che ci sia un'unica regola con cui i multipletti si dispongono. Non stupisce quindi che per molto tempo si sia cercato uno schema unificatore per stranezza e isospin.

### 23. $SU(3)$

a) Si e' visto come il gruppo di simmetria dell'isospin sia  $SU(2)$ . Nella ricerca di un gruppo di simmetria piu' allargato, occorre trovare un gruppo con:

- 1) Due generatori che commutano ( $S$  e  $I_3$  sono contemporaneamente diagonali nel supermultipletto)  $\rightarrow$  rango 2
- 2) Struttura a multipletti conforme ai dati sperimentali

b) Il gruppo  $SU(3)$  soddisfa a entrambe queste richieste. Le sue caratteristiche principali sono:

- $SU(3)$ : gruppo delle matrici unitarie, unimodulari  $3 \times 3$   
Esse agiscono su spinori complessi a 3 componenti, in completa analogia alle matrici di  $SU(2)$  sugli spinori a 2 componenti
- No. parametri : 8 (= no. generatori)  
Matrice complessa  $3 \times 3 \rightarrow 2 \times 9 = 18$  parametri; 9 condizioni di unitarieta'; 1 condizione di unimodularita'  $\rightarrow$  8 parametri liberi

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Operatori infinitesimi: 8 matrici di Gell-Mann, (v. sopra), analoghe alle matrici di Pauli per  $SU(2)$
- 2 generatori che commutano,  $\lambda_3$  e  $\lambda_8 \rightarrow$  rango = 2 (Cfr.  $SU(2)$ , 1 generatore che commuta); se ridefinisco  $F_i = \frac{\lambda_i}{2}$  trovo le relazioni di commutazione  $[F_i, F_j] = if_{ijk} F_k$ , essendo  $f_{ijk}$  le costanti di struttura date da:

$$f_{123} = 1$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

Tutte le altre  $f$  sono zero. Le  $f$  sono antisimmetriche nello scambio di 2 indici.

- Gli operatori  $I_3$  ed  $Y$  si identificano con:

$$I_3 = F_3$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

- Gli stati di un supermultipletto sono etichettati dai valori di  $I_3$  e  $Y$  (cfr.  $SU(2)$ , solo dai valori di  $I_3$ ), quindi gli autovalori si dispongono in un piano
- Essendo il rango 2, ci sono 2 operatori di Casimir; il loro significato fisico non e' trasparente, ed essi in generale non sono particolarmente utili nelle applicazioni piu' comuni di  $SU(3)$

## 24. Rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$

Come si sara' intuito, cosi' come  $SU(2)$  e' un gruppo unitario equivalente al gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni,  $SU(3)$  e' anch'esso un gruppo unitario (non equivalente al gruppo delle rotazioni in 8 dimensioni !). Le sue caratteristiche essenziali sono riassunte di seguito:

*Rappresentazione fondamentale:* dim. minima  $> 1$       matrici  $3 \times 3$

*Rappresentazione aggiunta:* dim. = numero parametri      matrici  $8 \times 8$

Autostati della rappresentazione fondamentale: 3 vettori unitari (cfr.  $SU(2)$ , 2 vettori unitari), con autovalori:

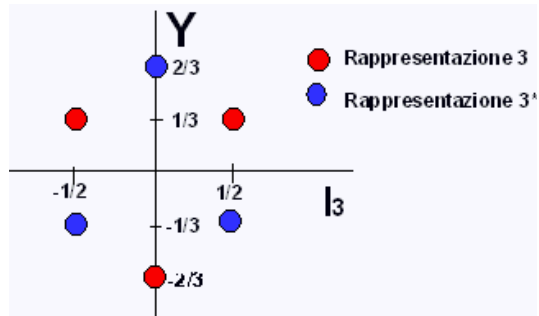
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = -\frac{1}{2} \\ Y = \frac{1}{3} \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = 0 \\ Y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Si noti che ogni autostato e' etichettato da 2 numeri quantici, per altro con ipercarica frazionaria

Nel caso di  $SU(3)$  la rappresentazione fondamentale e la sua coniugata non sono equivalenti: questo avviene perche' gli autovalori dell'ipercarica non sono



simmetrici rispetto allo zero. La rappresentazione fondamentale e' un tripletto; possiamo riportare graficamente le 2 rappresentazioni fondamentali:



Gli operatori  $I_+$  e  $I_-$  di  $SU(2)$  vengono sostituiti da 3 coppie di operatori di shift:

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7$$

che inducono le seguenti trasformazioni all'interno di ogni multipletto:

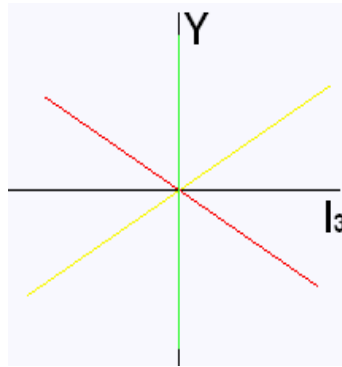
$$I_{\pm} \rightarrow \Delta Y = 0, \Delta I_3 = \pm 1$$

$$U_{\pm} \rightarrow \Delta Y = \pm 1, \Delta I_3 = \mp 1/2$$

$$V_{\pm} \rightarrow \Delta Y = \pm 1, \Delta I_3 = \pm 1/2$$

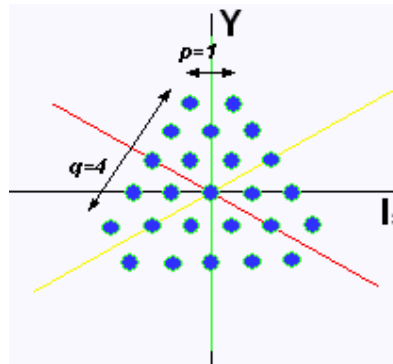
Diversamente da cio' che accade in  $SU(2)$ , nelle cui rappresentazioni irriducibili ogni stato si presenta con peso unitario (leggi: una sola volta), nelle rappresentazioni irriducibili di  $SU(3)$  il peso di certi stati, definiti da  $(I_3, Y)$ , puo' essere maggiore di 1. Questa extra-degenerazione indica la presenza di un altro numero quantico, che deve commutare con  $I_3$  e  $Y$ : esso e' il quadrato dell'isospin, che puo' essere usato per distinguere gli stati degeneri all'interno di un multipletto. Le proprieta' principali delle rappresentazioni di  $SU(3)$ , non difficili da dimostrare, si possono elencare come segue:

- a) i multipletti posseggono simmetria esagonale, essendo del tutto simmetrici rispetto ai 3 assi a  $120^\circ$  indicati (uno dei quali coincide con  $Y$ ):



- b) i multipletti sono completamente specificati dai due numeri interi  $p$  e  $q$   
 $p$  = numero spazi in un lato esterno del diagramma dei pesi  
 $q$  = numero spazi nel lato successivo del diagramma dei pesi

La figura mostra il multipletto (1,4)

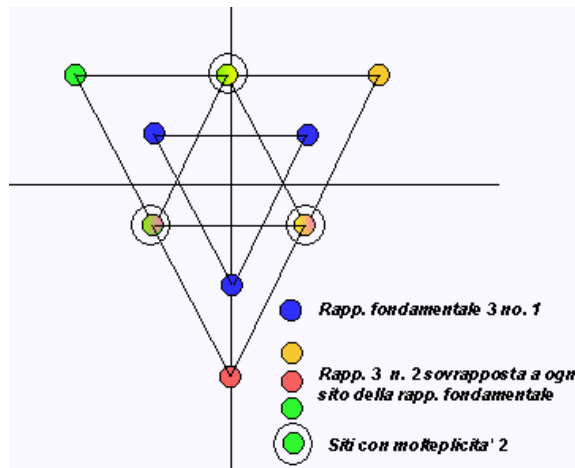


- c) La molteplicità (leggi: peso) di ogni sito aumenta di 1 ad ogni "strato", fino a che il perimetro diventa un triangolo, quindi rimane costante  
d) La dimensionalità (leggi: numero di sottostati) di un multipletto è data da:

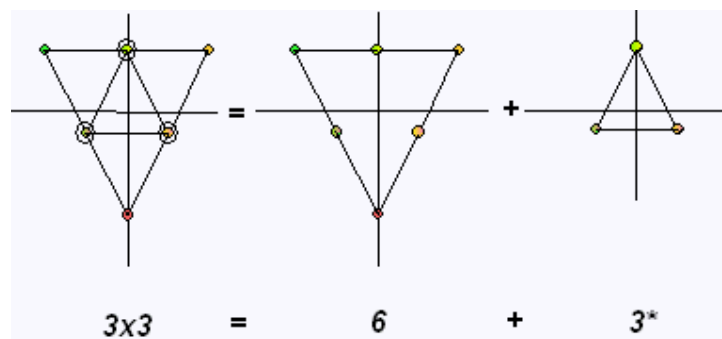
$$n = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

## 24. Rappresentazioni prodotto in SU(3)

Considerata l'additività dei 2 numeri quantici  $I_3$  e  $Y$ , si può procedere come per SU(2) nel costruire tutte le rappresentazioni a partire dalla fondamentale: p.es., per costruire il prodotto  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$  si procede come indicato in figura:



Il multipletto prodotto non e' una rappresentazione irriducibile di  $SU(3)$ : esso puo' essere scomposto in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili, come illustrato per l'esempio di seguito:



Come si vede, nella scomposizione in somma diretta compare la nuova rappresentazione **6** e la rapp. fondamentale coniugata **3\***. Similmente, si puo' vedere che

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 &= 6 \oplus 3^* \\ 6 \otimes 3 &= 8 \oplus 10 \\ 3 \otimes 3^* &= 1 \oplus 8 \\ 3 \otimes 3 \otimes 3 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \end{aligned}$$

etc etc.

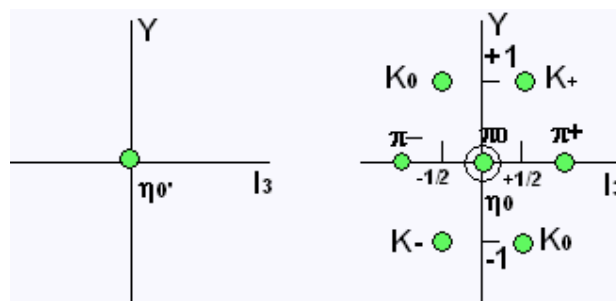
## 25. Adroni e supermultipletti

L'interesse originario di  $SU(3)$  per la fisica delle particelle sta nel fatto che le sue rappresentazioni irriducibili si adattano bene a descrivere il pattern di supermultipletti adronici osservati sperimentalmente. Quando si dice che si rappresentano bene, occorre precisare che l'accordo e' molto buono per cio' che

riguarda i numeri quantici: all'interno di ogni supermultipletto, le differenze di massa sono molto grandi, e di fatto non sono compatibili con un'interazione forte indipendente dall'ipercarica, molto meno di quanto all'interno di un multipletto di isospin le differenze di massa siano spiegabili con effetti elettromagnetici.

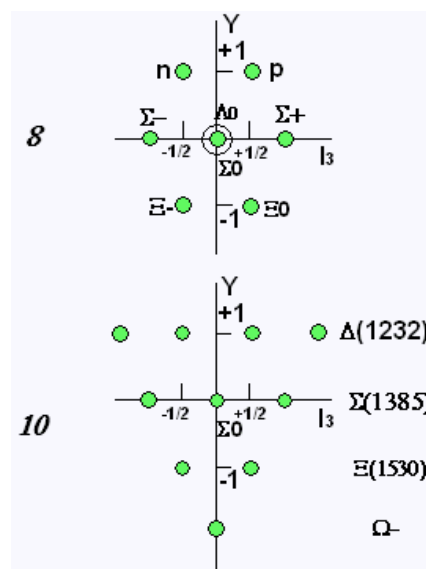
#### a) Mesoni

Si ricorderà come i mesoni si possano classificare in famiglie di data spin-parità: di ogni famiglia fanno parte 9 stati individuali, raggruppati in, 2 singoletti, 2 doppietti e 1 tripletto di isospin. Gli stati di ogni famiglia quindi si rappresentano nel piano  $(I_3, Y)$  esattamente come i multipletti delle due rappresentazioni **1** e **8** di SU(3) visti prima:



#### b) Barioni

I barioni a spin  $\frac{1}{2}$  si rappresentano bene nel multipletto **8**, quelli a spin  $\frac{3}{2}$  nel multipletto **10**, come mostrato in figura:



La cosa piu' interessante e' la concordanza dei numeri quantici, e l'assenza di stati con numeri quantici fuori dallo schema di SU(3) (assenza di *stati esotici*). Questa e' stata la motivazione principale del grande interesse che inizialmente si e' avuto per questa simmetria, chiamata allora, con termine preso a prestito dalla meditazione buddista, la *via ottuplice (eightfold way)*.

Un po' come nel caso dei primi modelli della struttura atomica, che cercavano di interpretare le regolarita' sistematiche della tavola periodica di Mendeleev in termini di costituenti, la simmetria unitaria non e' tanto importante perche' rifletta un aspetto fondamentale della realta' fisica (la simmetria – approssimata – di isospin o di SU(3) e' oggi considerata un fenomeno accidentale, dovuto al piccolo valore della massa dei quark leggeri rispetto alla scala di energia delle interazioni di colore), quanto perche' per la prima volta ha introdotto in forma quantitativamente comprensibile l'idea di costituenti degli adroni.

## 26. SU(3) come simmetria rotta: formule di massa

Malgrado i suoi limiti, il modello a simmetria unitaria ha fornito una serie di previsioni e spiegazioni davvero notevole: esse riguardano in particolare le masse degli adroni leggeri. Questi risultati si ottengono facendo delle ipotesi sul meccanismo di rottura della simmetria SU(3); che essa debba rompersi e' piuttosto evidente dal fatto che le masse degli adroni di un supermultipletto non sono uguali: si riportano di seguito i casi dell'ottetto dei mesoni pseudoscalari e di quello dei barioni a spin  $\frac{1}{2}$ , nonche' del decupletto a spin  $\frac{3}{2}$ :

Mesoni

$$J^P=0^-$$

| I   | S=-1           | S=0                     | S=+1     |
|-----|----------------|-------------------------|----------|
| 0   |                | $\eta(547), \eta'(958)$ |          |
| 1/2 | $\bar{K}(496)$ |                         | $K(496)$ |
| 1   |                | $\pi(137)$              |          |

$$J^P=1^-$$

| I   | S=-1             | S=0                          | S=+1       |
|-----|------------------|------------------------------|------------|
| 0   |                  | $\omega(782), \varphi(1020)$ |            |
| 1/2 | $\bar{K}^*(892)$ |                              | $K^*(892)$ |
| 1   |                  | $\rho(770)$                  |            |

$$J^P=2^+$$

| I   | S=-1                 | S=0                     | S=+1           |
|-----|----------------------|-------------------------|----------------|
| 0   |                      | $f_2(1270), f_2'(1525)$ |                |
| 1/2 | $\bar{K}^{**}(1430)$ |                         | $K^{**}(1430)$ |
| 1   |                      | $a_2(1320)$             |                |

## BARIONI

$$J^P=1/2^+$$

| I   | S=-2        | S=-1                                  | S=0      |
|-----|-------------|---------------------------------------|----------|
| 0   |             | $\Lambda^0(1116), \Lambda^{0*}(1405)$ |          |
| 1/2 | $\Xi(1317)$ |                                       | $N(938)$ |
| 1   |             | $\Sigma(1192)$                        |          |

$$J^P=3/2^+$$

| I   | S=-3             | S=-2          | S=-1             | S=0            |
|-----|------------------|---------------|------------------|----------------|
| 0   | $\Omega^-(1672)$ |               |                  |                |
| 1/2 |                  | $\Xi^*(1530)$ |                  |                |
| 1   |                  |               | $\Sigma^*(1385)$ |                |
| 3/2 |                  |               |                  | $\Delta(1232)$ |

Come si vede, le differenze di massa sono molto grandi, e questa e' stata una delle ragioni principali che hanno impedito per lungo tempo il riconoscimento, nel pattern complicato delle masse, della simmetria sottostante. Una spiegazione *fenomenologica* (ossia, non derivante da una teoria completa e consistente, ma piuttosto formulata in accordo con qualche modello, piu' o meno ad hoc) puo' essere trovata se si assume che l'hamiltoniano dell'adrone (il cui valore medio nello stato fondamentale dell'adrone deve riprodurre la sua massa) non si trasformi come un invariante di SU(3), ma in modo un po' piu' complicato. All'epoca quest'idea venne concretizzata immaginando che ci fossero due tipi di interazione forte, una *molto forte* e una *medio-forte*: in questo modo l'hamiltoniano totale veniva scritto come:

$$H_S = H_{VS} + H_{MS}$$

Le proprietà di trasformazione dei due termini rispetto alle trasformazioni di  $SU(3)$  sono per ipotesi diverse:

$H_{VS}$  è invariante

$H_{MS}$  non è invariante

Il primo termine darà un contributo identico a tutti i membri di un multipletto, mentre il secondo darà un contributo diverso ai vari membri. In termini più specifici, la cosa si può vedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle a | H | a \rangle &\rightarrow \underbrace{\langle a | U^{-1} H}_{\text{stato } SU(3) \text{ trasformato}} \underbrace{U | a \rangle}_{\text{stato } SU(3) \text{ trasformato}} \\ &\rightarrow \langle a | U^{-1} (H_{VS} + H_{MS}) U | a \rangle = \langle a | U^{-1} H_{VS} U | a \rangle + \langle a | U^{-1} H_{MS} U | a \rangle \\ H_{VS} \text{ invariante} &\rightarrow U^{-1} H_{VS} U = H_{VS} \\ H_{MS} \text{ non invariante} &\rightarrow U^{-1} H_{MS} U \neq H_{MS} \\ &\rightarrow \langle a | H | a \rangle = \langle a | U^{-1} H_{VS} U | a \rangle + \langle a | U^{-1} H_{MS} U | a \rangle = \langle a | H_{VS} | a \rangle + \langle a | U^{-1} H_{MS} U | a \rangle \end{aligned}$$

Qual è la proprietà di trasformazione rispetto a  $SU(3)$  che può assumere  $H_{MS}$ ? Abbiamo un paio di vincoli:  $H_{MS}$  non deve commutare con  $U$ , trasformazione unitaria di  $SU(3)$ , quindi non deve commutare con tutti i generatori del gruppo; tuttavia, i membri dei multipletti hanno valori definiti di  $I_3$  e  $S$ , quindi  $H_{MS}$  deve commutare con i generatori corrispondenti a questi operatori: come sappiamo, l'identificazione è:

$$\begin{aligned} I_3 &= F_3 \\ Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \end{aligned}$$

quindi la possibilità più semplice è che  $H_{MS} \propto F_8 \propto Y$ ; si noti che introdurre una dipendenza da  $I_3$  sarebbe contraddittorio, visto che si verifica una ottima uniformità delle masse all'interno dei multipletti di isospin, rotta solo da effetti elettromagnetici. Okubo e Gell-Mann dimostrarono che in una rappresentazione qualsiasi di  $SU(3)$  si ha:

$$\langle a | H_{MS} | a \rangle \propto \langle a | F_8 | a \rangle \propto A + BY + C[Y^2/4 - I(I+1)]$$

dove  $A, B$  e  $C$  sono coefficienti che dipendono dalla rappresentazione considerata. Ci aspettiamo dunque, se il modello ha qualcosa a che fare con la realta':

$$m(Y, I) = m_0 + bY + c \left[ Y^2/4 - I(I+1) \right]$$

per la massa dei membri di un supermultipletto.

Questa formula fu usata da Gell-Mann per predire la massa del membro mancante (nel 1962) del decupletto dei barioni, la particella con  $S=-3$  chiamata  $\Omega$ ; in effetti, per il decupletto deve essere:

$$\Delta m_{ij} = m_i - m_j = b(\Delta Y)_{ij} + c \left[ (Y_i^2 - Y_j^2)/4 - (I_i(I_i+1) - I_j(I_j+1)) \right]$$

Se ora si prendono le masse dei 3 stati allora conosciuti  $\Delta^{++}(1232)$ ,  $\Sigma^+(1385)$ ,  $\Xi^*(1530)$  si hanno le 2 differenze

$$m_{\Sigma} - m_{\Delta} \approx m_{\Xi} - m_{\Sigma} \approx 150 \text{ MeV}$$

che fissano  $b$  e  $c$ . Questi ultimi furono usati da Gell-Mann per predire la massa della particella mancante, prevista a 1672 MeV e trovata, l'anno dopo, a 1675 MeV! Nello stesso modo, si trovano altre relazioni di massa, come questa per l'ottetto di barioni:

$$\frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}m_{\Xi^0} = \frac{1}{4}m_{\Sigma^0} + \frac{3}{4}m_{\Lambda^0}$$

corretta a circa 1%. La situazione risulta invece meno brillante nel caso dei mesoni, con discrepanze fino al 10-12 %.

La simmetria di  $SU(3)$  sommariamente descritta di sopra viene spesso chiamata *simmetria di flavor*, e indicata per questo motivo con  $SU(3)_f$ , per distinguerla da un'altra simmetria  $SU(3)$ , legata ad un altro e piu' importante grado di liberta' dei quark, chiamato *colore*.

#### *L'origine delle simmetrie di flavor, ieri e oggi*

Il *flavor* e', nella visione moderna, nient'altro che un'etichetta indicante il *tipo* di quark, che gioca un ruolo importante nel modello standard in quanto cambia nella maggior parte dei processi deboli: come tale, non segue, a livello fondamentale, la simmetria  $SU(3)_f$  sopra descritta, ma un'altra totalmente diversa. Cosa resta in comune fra queste due descrizioni?

Il flavor deve in realta' essere considerato uno speciale grado di liberta' presente al livello di sottostruttura degli adroni (leggi: a livello di quark), e propagato a livello di adroni, che dai quark sono costituiti: quindi, un adrone



strano lo è perché contiene almeno un quark  $s$ , e così via. Questo punto resta certamente valido in entrambe le descrizioni.

L'ipotesi di simmetria unitaria esatta (estensione della simmetria di isospin, prototipo di tutte le simmetrie di flavor) prevede che tutti gli adroni di un supermultipletto abbiano la stessa massa (degenerazione completa): ovviamente, questo non può essere vero, perché sappiamo che fra gli adroni che costituiscono un multipletto unitario ci sono forti differenze di massa. Come abbiamo visto, l'origine di queste differenze venne all'inizio attribuita a componenti dell'interazione forte (si pensi per concretezza a diversi termini dell'hamiltoniano forte) con diverse proprietà di trasformazione rispetto a  $SU(3)$ , e quindi in grado di rompere la simmetria: p.es., un termine che si trasforma come un ottetto mescola gli stati dell'ottetto, etc. Oggi pensiamo che non sia questo il meccanismo di rottura della simmetria di flavor, che viene rotta per il semplice fatto che le masse dei quark non sono uguali. Quest'ultima idea si è potuta sviluppare dopo il chiarimento portato, nell'ambito del modello unificato delle interazioni elettrodeboli, dalla (creduta) comprensione del meccanismo di rottura spontanea di simmetria elettrodebole e dell'origine della massa (che non ha, per quel che si pensa oggi, origine dall'interazione forte: ma tutto questo soggetto è tuttora, di fatto, non privo di controversie).

Inoltre, oggi pensiamo che non ci sia un campo fisico generato dal flavor, così come ci sono quelli legati alle cariche elettriche e deboli e alla carica di colore: la simmetria di flavor non è dunque una simmetria di *gauge*, come quella elettrodebole o quella di colore, ma solo *accidentale*, dovuta cioè alla relativa piccolezza delle masse dei primi 3 quark  $u, d, s$  rispetto alla scala di energia delle interazioni forti, che è dell'ordine delle centinaia di MeV. Quindi, la classificazione degli adroni in multipletti di isospin, di  $SU(3)$  etc, è oggi interpretata come un fatto del tutto fortuito; le leggi di conservazione dell'isospin, della stranezza, del charm etc, verificate esattamente dalle interazioni forti, e variamente violate da quelle deboli ed elettromagnetiche, sono d'altra parte interpretate come derivanti da una legge semplice e generale di conservazione del tipo di quark nelle interazioni di colore. In altre parole, *l'interazione di colore fra due quark è insensibile al loro flavor, e non lo cambia*. Nondimeno, le simmetrie di flavor, come isospin e  $SU(3)$ , anche se accidentali, restano abbastanza ben verificate, e non sono quindi meno utili, *anche se solo fenomenologicamente*, che se avessero un'origine fondamentale.