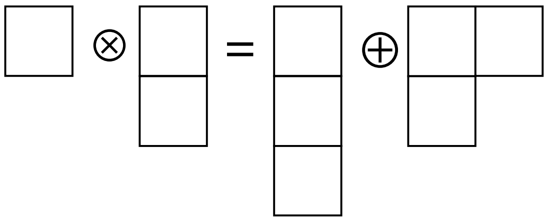
Nota sulle proprieta' di simmetria per scambio del singoletto di SU(3)

Nella scomposizione in irreps del prodotto tensoriale di $SU(3)_C$

$$\boldsymbol{3} \otimes \overline{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{1} \oplus \boldsymbol{8}$$

compaiono un singoletto e un ottetto. Usando la tecnica dei diagrammi di Young, si puo' scrivere la scomposizione come



Le proprieta' di simmetria delle rapp.irr. ottenute si deducono dalla forma del diagramma di Young corrispondente; questa proprieta' si applica normalmente al caso in cui il prodotto tensoriale sia realizzato fra *n* copie di una stessa rappresentazione, con gli stati risultanti composti quindi da *n* particelle identiche. Se consideriamo la scomposizione in somma diretta di irreps del prodotto diretto

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$$

si trova che in effetti il singoletto e' antisimmetrico:

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(uds - usd + dus - dsu + sud - sdu\right)$$

$$\chi_1 \underset{\text{scambio di } 2\ q}{\rightarrow} -\chi_1$$

Esempio: Scambio $1 \leftrightarrow 2$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\left(dus - sud + sdu - uds + usd - dsu\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-uds + usd - dsu + dus - sud + sdu\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu\right)$$

Il problema nasce quando si considera il singoletto ottenuto dal prodotto diretto

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$$

La domanda e': qual e' la proprieta' di simmetria per scambio di questo singoletto?

Se si esamina la funzione d'onda corrispondente, la proprieta' non e' immediatamente apparente:

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u(1)\overline{u}(2) + d(1)\overline{d}(2) + s(1)\overline{s}(2)\right)$$

χ_1 non sembra godere di proprieta' di simmetria per scambio.

Due approcci possibili:

I: La funzione d'onda non e' a simmetria definita, e questo non da' fastidio perche' non descrive lo stato di due particelle identiche

II: Esiste un solo singoletto di SU(3), che ha una proprieta' di simmetria definita dal diagramma di Young corrispondente. Si puo' allora ragionare cosi':

La funzione d'onda di cui si parla deriva dalla decomposizione del prodotto diretto:

$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}^* = \mathbf{1}\oplus\mathbf{8}$

Ma:

$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{3}^*\oplus\mathbf{6}$

$\rightarrow \mathbf{3}^*$ (antiquark) e' equivalente a $\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}$ (diquark)

Quindi possiamo dire che lo scambio $q \leftrightarrow \overline{q}$ e' equivalente allo scambio $q \leftrightarrow (qq)$

Allora:

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u(1)\overline{u}(2) + d(1)\overline{d}(2) + s(1)\overline{s}(2)\right) \sim \frac{1}{\sqrt{3}}\left[u(ds - sd) + d(su - us) + s(ud - du)\right]$$

Poiche':

$$\chi_1 \underset{q\leftrightarrow\overline{q}}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(ds - sd)u + (su - us)d + (ud - du)s\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[u(ds - sd) + d(su - us) + s(ud - du)\right]$$

si ha:

$$\chi_1 \underset{q\leftrightarrow\overline{q}}{\rightarrow} +\chi_1$$

Quindi la funzione d'onda e' *simmetrica* per lo scambio $q \leftrightarrow \overline{q}$.

Questa proprieta' e' in realta' in accordo con quella del diagramma di Young del singoletto, perche' come si e' visto lo scambio $q \leftrightarrow \overline{q}$ e' equivalente allo scambio $q \leftrightarrow (qq)$, quindi a *2 scambi* $q \leftrightarrow q$: i due segni – risultano in un segno + complessivo.
La proprieta' di simmetria di ogni diagramma di Young e' relativa allo scambio di *due particelle identiche*, ed e' quindi confermata anche in questo caso.