

# Elementi di teoria dello scattering

## 1. Descrizione classica dei processi d'urto

L'origine dei concetti di *sezione d'urto*, *cammino libero medio* etc sta nella teoria cinetica dei gas e nella meccanica statistica (Maxwell ~ 1860, Boltzmann ~ 1870). La teoria cinetica della materia, fondata sull'ipotesi atomico-molecolare, fu sviluppata per interpretare microscopicamente le proprietà termodinamiche dei gas, e poi di tutti i sistemi costituiti da molte particelle. Centrale a questi sviluppi è l'idea che le interazioni fra molecole, nel caso più semplice, consistano essenzialmente in collisioni (*scattering*). Ora, è evidente come una descrizione corretta e realistica di tutti questi processi fra enti microscopici (molecole, atomi, nuclei, particelle elementari) richieda l'uso esteso della meccanica quantistica; tuttavia, la definizione iniziale di alcuni concetti base nell'ambito della fisica classica, come se si trattasse di processi fra enti macroscopici, consente di afferrare più facilmente quel che c'è di intuitivo e di immediato: questa è quindi la ragion d'essere di questa introduzione.

In meccanica classica, ogni evento di *scattering* è definito in maniera del tutto deterministica: per ogni singolo urto, note tutte le forze in gioco, gli angoli di deflessione ( $\theta, \phi$ ) sono completamente determinati dal parametro d'urto e dalla velocità relativa. Si pensi al caso di una cometa su un'orbita iperbolica: tutti i parametri della traiettoria (aperta) sono completamente determinati dalle condizioni in cui avviene la "collisione" (→ incontro ravvicinato) fra cometa e Sole. D'altra parte, è evidente come in un esperimento consistente in una sequenza di molte collisioni sia difficile conoscere le condizioni in cui avviene ogni singolo urto: si pensi ad esempio al caso degli urti molecolari in un gas ideale, che sta in un recipiente ad una certa temperatura. Per esso sarebbe praticamente impossibile (e inutile, vista l'insensibilità dei parametri macroscopici del gas all'effetto di ogni singola collisione) misurare o calcolare ogni singola traiettoria di collisione. Di conseguenza, si è portati a individuare (sperimentalmente e teoricamente) grandezze fisiche che siano caratteristiche *dell'insieme* delle collisioni, originate dalle interazioni di un *insieme* di molte particelle con un *altro insieme*, anch'esso costituito da molte particelle. In concreto, si immagina un insieme costituito da coppie proiettile-bersaglio in condizioni dinamiche sostanzialmente simili, eccetto che per il parametro d'urto (distanza geometrica fra traiettoria iniziale del proiettile e posizione del centro diffusore). Ogni urto darà luogo p.es. ad una certa deflessione, e quel che noi possiamo predire (o misurare) sono solo i parametri *statistici* (che diventano parametri *macroscopici*, o *termodinamici*) dell'insieme delle collisioni: media, varianza, etc per le variabili dinamiche in gioco. È tuttavia possibile, almeno in linea di principio, considerare quantità più dettagliate sull'insieme degli urti: per esempio, si può predire teoricamente, o misurare sperimentalmente, la *distribuzione di frequenza* degli angoli di deflessione. Se la distribuzione di frequenza viene poi normalizzata a 1, essa può

essere reinterpretata come una distribuzione di *probabilità*: essa indica cioè per una collisione generica - della quale non si conosce il parametro d'urto, quale sia la probabilità di produrre un certo angolo di deflessione.

NB: Per il momento ammettiamo che il solo effetto dell'interazione fra una particella qualsiasi del fascio e una del bersaglio sia quello di produrre una deflessione nella traiettoria del fascio; questa è una sovrasemplificazione, utile tuttavia a fissare le idee.

Non si può non far notare come, all'interno del sistema di concetti della fisica classica, l'uso del linguaggio e dei metodi probabilistici sia solo dettato da esigenze di ordine pratico: in linea di principio, nulla vieterebbe di risolvere per ogni particella le equazioni del moto, trovando traiettoria, angolo di deflessione etc. Quando si parla, a livello classico, di *probabilità* di trovare un certo angolo di deflessione in conseguenza di una data collisione, si usa il termine con il sottinteso che, non potendo per motivi pratici conoscere tutti i dettagli dello stato iniziale, ci si accontenta di predire lo stato finale della collisione in termini probabilistici. La situazione è assai diversa in fisica quantistica, come verrà ricordato fra breve.

Nell'applicare quest'idea al caso degli esperimenti di fisica nucleare, o subnucleare, le condizioni sono più definite: l'insieme dei *proiettili* è caratterizzato da diversi parametri sostanzialmente identici per tutte le particelle, come la velocità (in un dato sistema di riferimento), la massa a riposo, la direzione di moto; in questo caso si parla di un *fascio* di particelle incidenti. Così pure, il secondo insieme, quello dei *bersagli*, contiene particelle tutte sostanzialmente nello stesso stato dinamico (p.es., sostanzialmente ferme nel sistema di riferimento citato sopra), distribuite in maniera statisticamente uniforme in un certo volume: parliamo allora di una *targhetta* di particelle (p.es. in quiete). In queste condizioni, ogni singolo urto è caratterizzato da un diverso valore del parametro d'urto, oltre che eventualmente da altre caratteristiche che per ora ignoriamo. Il flusso incidente di proiettili,  $\Phi$ , si misura in **particelle  $m^{-2} s^{-1}$** ; il flusso di particelle diffuse entro un angolo solido  $d\Omega$ ,  $R$ , si misura in **particelle  $sr^{-1} s^{-1}$** . Si ammette che ci sia una proporzionalità diretta fra le due grandezze, per lo meno nella misura in cui effetti cumulativi (particelle con  $> 1$  interazione, frazione di fascio che interagisce molto elevata) siano trascurabili:

$$R = a \Phi \rightarrow \frac{dR}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Phi$$

dove  $a$  è una costante di proporzionalità che ha le dimensioni di un'area e si chiama sezione d'urto differenziale: essa dipende in modo essenziale dalla dinamica dell'interazione fra le due particelle, e quindi misurarla significa ottenere informazioni dirette sulle forze che agiscono fra le due particelle.

Il concetto si puo' estendere classicamente al caso in cui si abbia scattering di radiazione elettromagnetica da parte di una distribuzione di carica elettrica; poiche' in questo caso non e' possibile, almeno classicamente, parlare di numero di particelle, mentre ha perfettamente senso riferirsi alla potenza incidente e diffusa, il flusso incidente si misura in  $W m^{-2}$ , mentre quello diffuso in  $W sr^{-1}$ . Anche in questo caso il rapporto fra i due flussi, ossia la sezione d'urto differenziale per lo scattering di radiazione, ha le dimensioni di un'area.  
 Se esistesse la radiazione gravitazionale, come si crede, la definizione sarebbe del tutto analoga.

E' immediato definire a questo punto la sezione d'urto totale, integrando la sez. d'urto differenziale su tutto l'angolo solido:

$$\sigma = \int_{\Delta\Omega=4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

La sezione d'urto totale e' quindi la misura della probabilita' totale di interazione fra proiettile e bersaglio, integrata su tutti i possibili valori del parametro d'urto. Essa rimane una funzione della velocita' relativa, oltre che del tipo di particelle in gioco. Un modo di vedere il significato fisico di questa grandezza puo' essere questo: consideriamo un fascio di proiettili che penetra entro un volume nel quale si trovano, uniformemente distribuiti, i bersagli. Se consideriamo perduta una particella del fascio che subisca una qualsiasi interazione con il bersaglio, il decremento nell'intensita' del fascio nell'attraversare uno spessore  $dx$  di bersaglio sara' dato da

$$d\Phi = -\Phi k N dx$$

$N$  essendo il numero di particelle bersaglio per unita' di volume e  $k$  una costante di proporzionalita'. Quindi

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -k \frac{\rho}{A} dx$$

Densita' volumetrica di massa  $g cm^{-3}$   
Massa molecolare  $g$

Quindi  $k$  ha le dimensioni di un'area, e si identifica immediatamente con  $\sigma$ . Il suo significato e' quindi quello di misura dell'intensita' globale di interazione fra proiettile e bersaglio. Integrando l'eq. differenziale, si trova:

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\frac{\sigma}{A} x}$$

che rappresenta l'attenuazione progressiva del fascio nell'attraversare il bersaglio. Considerando una sola particella, e ponendo  $\Phi_0 = 1$ , l'equazione descrive l'andamento della probabilita' di sopravvivenza della particella nell'attraversare il bersaglio:

$$\text{Prob. di sopravvivenza} = e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x}$$

$$\text{Prob. di interazione} = 1 - e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x}$$

La quantità  $\lambda$ , con dimensioni di una lunghezza, definita da

$$\lambda = \frac{A}{\sigma\rho} = \frac{1}{\mu}$$

è il cammino libero medio fra due interazioni successive; il suo inverso, indicato con  $\mu$ , si chiama coefficiente di attenuazione lineare del fascio. La definizione data di sezione d'urto totale è estremamente generale: in particolare, essa si applica p.es. al caso in cui il risultato della collisione non sia necessariamente solo la deflessione del proiettile, ma anche la modifica dello stato energetico o interno del proiettile e/o del bersaglio stessi. Per esempio, l'urto fra proiettile e bersaglio comporta in generale una redistribuzione dell'energia cinetica totale a disposizione; inoltre, se il proiettile o il bersaglio hanno una struttura interna (si pensi ad un urto fra atomi), questa può venire modificata in conseguenza della collisione.

#### *Relazione fra angolo di deflessione e parametro d'urto nel caso generale*

Si consideri un fascio di proiettili che urta un centro diffusore con una distribuzione continua di parametri d'urto; se i proiettili che passano nell'elemento d'area  $bdbd\phi$  sono deflessi nell'angolo solido  $d\Omega$ , si può scrivere:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$d\sigma = b db d\phi$$

$$\rightarrow b db d\phi = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

#### *Sezione d'urto di Rutherford nella versione più semplificata*

In questa versione, la sezione d'urto di Rutherford (scattering di particelle  $\alpha$  da parte di nuclei pesanti) viene ricavata immaginando un centro diffusore (bersaglio) infinitamente pesante, nell'approssimazione non relativistica e trascurando ogni effetto di spin. Il problema viene ricondotto al classico problema dei due corpi, con energia potenziale data da  $U(r) = \alpha/r$  (potenziale coulombiano, repulsivo nel caso di particelle  $\alpha$  su nuclei). L'equazione della traiettoria (aperta, visto che un potenziale repulsivo non genera stati legati) si scrive, in coordinate polari  $(r, \phi)$ , e avendo indicato con  $L$  il momento angolare totale e con  $E$  l'en. totale:

$$\phi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{cost}$$

Indichiamo con  $\rho$  il parametro d'urto, con  $v_\infty$  la velocità iniziale, e con  $\phi_0$  la coordinata angolare dell'asse di simmetria della traiettoria; essendo

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = m\rho v_\infty$$

si ha

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{rmv_\infty^2}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

Ponendo, per l'angolo di deflessione  $\chi$ ,  $\chi = \pi - 2\phi$ , si ha:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{tg}^2 \phi = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2}$$

Questa è la relazione fra parametro d'urto e angolo di deflessione; da essa, usando la relazione generale trovata prima, si trova l'espressione per la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

Se si prova a calcolare la sezione d'urto totale  $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ , si trova che è divergente: questa è una conseguenza del *range infinito* del potenziale coulombiano

### Sezione d'urto per scattering da sfera rigida

Si immagina la diffusione di particelle puntiformi da parte di bersagli sferici infinitamente pesanti e infinitamente rigidi (barriera di potenziale di altezza infinita). Nell'urto vale per la traiettoria del proiettile la legge della riflessione: *angolo di incidenza = angolo di riflessione*.

[Se questo risultato suona arbitrario o non ovvio, si mediti sul punto seguente: *il bersaglio esercita solo forze normali alla sua superficie; quindi la variazione della quantità di moto del proiettile avviene solo normalmente alla superficie del bersaglio. Inoltre, un*

*bersaglio infinitamente rigido – incapace di deformarsi – non consente alcun moto nella direzione normale alla sua superficie. Infine, se il bersaglio e' infinitamente pesante, il proiettile urta elasticamente, conservando la sua energia cinetica e quindi il modulo della sua velocita'. Poiche' la componente trasversale di v resta invariata, quella normale deve cambiare segno].*

Si consideri la geometria del problema (fig. 2), in cui sono stati usati gli stessi simboli usati nell'es. 2: la relazione fra parametro d'urto e angolo di deflessione e' data da

$$\rho = a \sin \phi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

da cui si trae, sempre usando il risultato dell'es. 1

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega$$

Integrando su tutto l'angolo solido, si trova per la sezione d'urto totale

$$\sigma = \pi a^2$$

finita, e coincidente (non sorprendentemente, viste le ipotesi dinamiche fatte!) con la sezione d'urto *geometrica*

Se si considera il caso un po' piu' realistico dell'urto elastico fra due particelle, entrambe di massa finita, si osserva immediatamente che in generale avviene una redistribuzione di energia fra proiettile e bersaglio. Come conseguenza, l'energia del proiettile dopo l'urto dipende, nel riferimento del laboratorio, dall'angolo di deflessione: c'e' quindi una relazione precisa ( $\rightarrow$ cinematica) fra energia e angolo dopo l'urto, sia per il proiettile sia per il bersaglio. La sezione d'urto differenziale puo' quindi essere espressa in funzione di una qualsiasi di queste variabili, usata in modo equivalente all'angolo di deflessione.

## 2. Scattering da potenziale

### a. Descrizione quantistica dei processi d'urto

Riferendosi alla descrizione classica delle collisioni, si puo' osservare che il calcolo della sezione d'urto si svolge facendo uso, diretto o indiretto, delle equazioni del moto: leggi di Newton e conseguenti leggi di conservazione. Come e' noto, in meccanica quantistica tali leggi perdono di validita', insieme a diversi concetti classici fondamentali, fra cui quello di traiettoria. Il loro posto viene preso (in ambito non relativistico) dall'equazione di Schrodinger, la cui soluzione e' la *funzione d'onda*  $\psi(r, t)$ . Nel caso della dinamica di una particella in un potenziale essa si scrive:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(r) \psi(\vec{r}, t) = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

La descrizione quantistica delle collisioni puo' essere fatta in vari modi, sostanzialmente equivalenti. Malgrado il fatto che un processo di collisione rappresenti un esempio praticamente perfetto di fenomeno transitorio, la maniera piu' semplice di accostarsi al problema e' quello di considerare una situazione di tipo *stazionario*, corrispondente p.es. al caso in cui un fascio continuo incida su un bersaglio. Si puo' allora immaginare che a tale situazione corrisponda una funzione d'onda di tipo altrettanto stazionario (corrispondente a uno *stato di scattering* per il sistema), come quella che descrive gli stati stazionari di un sistema legato. Considerando per ora il caso della diffusione di una particella da un potenziale, ci chiediamo innanzi tutto quali debbano essere le proprieta' generali di questa funzione d'onda: se il potenziale ha un range finito, a grande distanza dalla regione del potenziale ci aspettiamo di osservare, per la particella, stati asintotici coincidenti con quelli di una particella libera. Supponendo che il fascio incidente sia descritto da un'onda piana, e quello diffuso da un'onda sferica ( $\leftarrow$  origine di quest'idea: *Il fascio incidente ha, per ipotesi, momento e direzione piuttosto ben definiti. Quindi, trascurando varie questioni formali riguardanti la normalizzazione etc, possiamo rappresentarlo con un'onda piana, p.es. progressiva lungo l'asse z:  $e^{ikz}$ . Il processo di scattering elastico consiste nel cambiamento di direzione casuale della particella incidente, la cui energia viene peraltro conservata. Di conseguenza, il fascio diffuso non ha una direzione particolare, mentre conserva il modulo del momento del fascio incidente. Quindi possiamo rappresentarlo con un'onda sferica, uscente dal centro di diffusione:  $e^{ikr}/r$ ), la soluzione dell'equazione di Schrodinger, che rappresenta lo stato complessivo del sistema, sara', a grande distanza dal centro diffusore, una combinazione lineare dei due:*

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

La grandezza  $f(\theta)$ , che ha le dimensioni di una lunghezza, si chiama *ampiezza di scattering*. Possiamo ora trovare la sezione d'urto, differenziale e totale, per il processo di scattering descritto. La probabilita' per unita' di tempo che la particella diffonda nell'elemento di superficie  $dS=r^2 d\Omega$  e' data dal flusso per  $dS$  (ossia, mod. quadro dell'onda uscente per la velocita' per  $dS$ )

$$dP = v \frac{|f|^2}{r^2} dS = v |f|^2 d\Omega$$

Dividendo per  $v$  (flusso dell'onda incidente) si ha la sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = v \frac{|f|^2}{v} d\Omega = |f|^2 d\Omega \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$$

Nel caso quantistico, l'uso dei concetti di *probabilità*, *flusso di probabilità* etc e' inerente alla condizione dinamica dei sistemi microscopici. Quindi, quando si parla, a livello quantistico, di probabilità di trovare un certo angolo di deflessione in conseguenza di una data collisione, si usa il termine in un contesto non deterministico: nel quadro concettuale della meccanica quantistica (in quella che si chiama l'interpretazione di Copenhagen), non c'e' alcun modo di predire la traiettoria del proiettile durante la collisione, *semplicemente perche' il concetto stesso di traiettoria e' inapplicabile a livello elementare* (relazioni di indeterminazione). Quindi, l'angolo di deflessione puo' essere predetto solo statisticamente, e la sezione d'urto differenziale rappresenta appunto la distribuzione statistica degli angoli di deflessione. Il concetto di sezione d'urto assume quindi un significato piu' fondamentale rispetto al caso classico, in cui l'uso di distribuzioni statistiche etc e' solo dettata da necessita' pratiche.

## b. Onde parziali

La soluzione generale dell'eq. di Schrodinger in un potenziale centrale puo' scriversi, richiedendo simmetria assiale della soluzione rispetto all'asse  $z$ , direzione di propagazione del fascio incidente:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R_l(r) P_l(\cos \theta)$$

nella quale espressione non c'e' dipendenza da  $\phi$ . Le funzioni angolari  $P_l$  sono i *polinomi di Legendre*; le funzioni radiali  $R_l$  sono soluzioni dell'eq. radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] R_l = 0$$

e hanno forma asintotica

$$R_l(r) \approx \frac{b_l}{r} \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l)$$

Lo sviluppo indicato sopra corrisponde ad analizzare lo stato di scattering in autostati del momento angolare orbitale,  $L$ . Quindi possiamo scrivere in generale

$$\begin{aligned} \psi &\approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r} \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) a_l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{kr} (2l+1) \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) P_l(\cos \theta) \\ &\rightarrow \psi \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{iA_l}{2kr} (2l+1) \left\{ \exp \left[ -i(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) \right] - \exp \left[ i(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) \right] \right\} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

D'altra parte, l'onda piana si puo' scrivere, come e' noto, nel limite asintotico:

$$e^{ikz} \approx \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{i(2l+1)}{2kr} P_l(\cos \theta) \left\{ \exp \left[ -i(kr - l \frac{\pi}{2}) \right] - \exp \left[ i(kr - l \frac{\pi}{2}) \right] \right\}$$

La differenza fra  $\psi$  e  $e^{ikz}$  deve quindi coincidere, asintoticamente, con l'onda sferica uscente; ponendo  $A_l = i^l e^{i\delta_l}$  si trova per l'ampiezza di scattering:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

L'ampiezza di scattering e' quindi completamente determinata dagli *sfasamenti*  $\{\delta_l; l=0, \dots, \infty\}$ , che sono a loro volta determinati dalla forma del potenziale centrale  $U(r)$ . Si vede dunque che il processo di scattering e' descritto da un insieme (in linea di principio infinito) di *ampiezze parziali*, ognuna corrispondente a un valore particolare  $l$  di momento angolare orbitale; la ampiezza  $l$ -esima e' data da

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1)$$

La sez. d'urto totale e' allora data da:

$$\sigma = \int_{\Delta\Omega=4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f|^2 d\Omega$$

Sfruttando l'ortonormalita' dei polinomi di Legendre, si trova cosi':

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

che dimostra come la sez. d'urto totale sia scomponibile in una somma di sez. d'urto parziali, ognuna corrispondente ad un valore diverso di momento angolare orbitale. Si ottiene un importante corollario considerando l'ampiezza di scattering in avanti: tenuto conto che

$$P_l(\cos \theta = 1) = 1, \forall l$$

si puo' scrivere

$$f(\theta = 0) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1)$$

e quindi

$$\text{Im}[f(\theta = 0)] = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

In conclusione

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(\theta = 0)]$$

risultato noto come *Teorema Ottico*. Si noti che la presenza di interazioni ( $\sigma \neq 0$ ) implica che l'ampiezza di scattering sia complessa ( $\text{Im}(f) \neq 0$ ).

### *Sfasamento per lo "scattering" da una buca unidimensionale*

Consideriamo per semplicità lo scattering in una sola dimensione: in pratica, l'effetto dello scattering consiste in questo caso nel determinare un'onda piana riflessa e una trasmessa, in presenza del potenziale, entrambe lungo l'asse delle x (direzione dell'onda incidente). Avremo per ipotesi:

$$U = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Il problema è simile a quello di trovare gli stati stazionari del sistema, e si risolve con una tecnica analoga; data l'unidimensionalità del sistema, ci sarà un solo sfasamento  $\delta$ . Considerando inizialmente il caso  $U=0$ , potremo scrivere, omettendo per comodità la dipendenza da  $t$ :

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Imponendo  $\psi=0$  per  $x=0$  (barriera infinita),

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

dove il fattore  $1/2i$  viene inserito per comodità.

Se ora  $U \neq 0$ , dobbiamo distinguere due regioni dell'asse x:

Nella regione  $x > a$  l'onda entrante rimarrà invariata ( $-\frac{1}{2i} e^{-ikx}$ ), mentre l'onda uscente sarà

moltiplicata per un fattore, che indichiamo con  $\frac{1}{2i} e^{2i\delta}$ ; quindi:

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx+2i\delta} - e^{-ikx}) = e^{i\delta} \sin(kx + \delta), x > a$$

Nella regione  $0 < x < a$ , la funzione d'onda deve soddisfare alla condizione al contorno  $\psi(0)=0$ . Quindi

$$\psi(x) = A \sin k'x, k' = \frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar}, 0 < x < a$$

Imponendo la continuita' di funzione e derivata prima in  $a$ , si trova :

$$\cot \delta = \frac{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k'a}{1 - \frac{k'}{k} \cot k'a \tan ka}$$

Data l'espressione di  $\cot \delta$ , si puo' calcolare il fattore

$$e^{2i\delta} = \frac{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k'a + i(1 - \frac{k'}{k} \cot k'a \tan ka)}{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k'a - i(1 - \frac{k'}{k} \cot k'a \tan ka)}$$

che e', come atteso, consistente con una pura fase.

### c. Dipendenza dall'energia degli sfasamenti - Risonanze

E' interessante studiare l'andamento degli sfasamenti con l'energia, visto che esso finisce per determinare l'andamento delle sezioni d'urto parziali (e di quella totale) appunto con l'energia. L'andamento assume forme diverse a seconda delle caratteristiche del potenziale (p.es., per una buca quadrata: raggio e profondita', come dimostrato nelle seguenti due figure). Ci sono due risultati generali che vale la pena di menzionare:

#### 1) Andamento delle fasi ad alta energia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_l(k) = 0$$

Questo si puo' capire tenendo conto che  $\delta_l \approx U_0 \Delta t / \hbar$ , essendo  $\Delta t$  il tempo speso nella regione con il potenziale  $U_0$ ; questo tempo infatti tende a 0 quando l'energia e' elevata

#### 2) Andamento delle fasi a bassa energia

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta_l(k) = N\pi$$

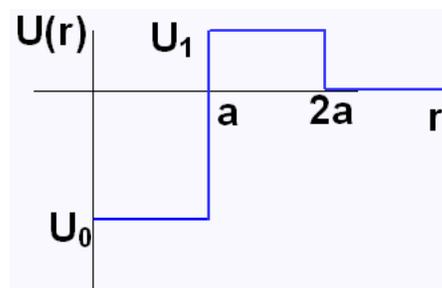
dove  $N$  e' il numero di stati legati del potenziale (teorema di Levinson)

Si noti che il ritardo cui è soggetta la particella incidente nell'essere diffusa da un potenziale a buca non è mai molto grande; si può dimostrare che in generale il ritardo è misurato approssimativamente dalla quantità

$$2 \frac{d\delta}{dE} \hbar = \frac{\text{tempo di transito con } U=0}{a} \frac{d\delta}{dk}$$

che non ha valori elevati se l'andamento di  $\delta$  con  $k$  è liscio e regolare.

Se tuttavia il potenziale ha caratteristiche un po' diverse, come quello indicato in figura, le cose possono diventare più interessanti: si può cercare una soluzione per la funzione d'onda dello stato di scattering in modo analogo a quanto fatto prima per la buca semplice, trovando le seguenti relazioni:

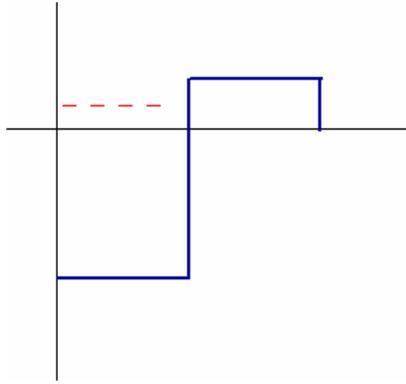


$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin k' x & 0 < x < a \\ B \sin k'' x + C \cos k'' x & a < x < 2a \\ e^{i\delta} \sin(kx + \delta) & x > 2a \end{cases}$$

Richiedendo la continuità di funzione e derivata prima in  $a$  e  $2a$  si trovano le 4 incognite  $A, B, C$  e  $\delta$ . Non si riportano le formule (intricate), ma la conclusione principale è che (per certe combinazioni di valori di  $U_0, U_1$  e  $a$ ) c'è un valore particolare dell'energia, attorno al quale

- lo sfasamento aumenta rapidamente di circa  $\pi$ , passando attraverso  $\pi/2$
- il quadrato di  $f_i$  ha un massimo rilevato, e raggiunge il valore 1
- l'ampiezza dell'onda all'interno della buca ha un massimo rilevato
- la quantità  $d\delta/dk$ , e quindi il ritardo, hanno un massimo rilevato

Le ultime due proprietà (ossia: localizzazione della particella incidente entro la buca per un tempo lungo) fanno rassomigliare lo stato di scattering di cui ci occupiamo a uno stato ~stazionario di un sistema legato. In effetti, si consideri il caso in cui il potenziale descritto prima comporti la presenza di livelli "quasi legati" come quello mostrato in figura:



E' plausibile che uno stato corrispondente al livello mostrato si comporti in modo simile a quello di uno stato stazionario: in effetti, lo stato sarebbe stazionario se non fosse per il tunneling attraverso la barriera di potenziale.

Senza ora restringerci al caso particolare esemplificato prima, possiamo vedere come tutte le proprieta' derivino dalla prima: in effetti, l'andamento di  $\delta(k)$  puo' essere approssimato nell'intorno di  $k=\alpha$  con  $\delta \approx \arctan \frac{\beta}{\alpha-k}$ , che ha lo stesso sviluppo di Taylor

fino al I ordine, essendo  $\frac{1}{\beta} = \frac{d\delta}{dk} \Big|_{k=\alpha}$ . Allora segue:

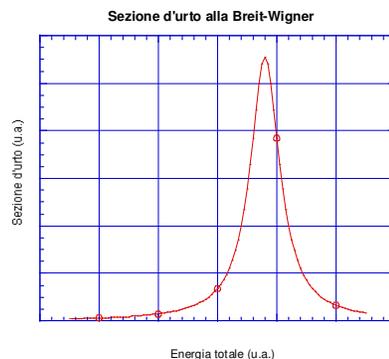
$$e^{2i\delta} = \frac{1+i \tan \delta}{1-i \tan \delta} = \frac{k-\alpha-i\beta}{k-\alpha+i\beta}$$

$$\rightarrow f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2} = \frac{1}{2} \frac{k-\alpha-i\beta-1}{k-\alpha+i\beta}$$

Si puo' scrivere l'espressione in termini dell'energia  $E$ , invece che del numero d'onda  $k$ , ponendo  $E_\alpha = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m}$ ,  $E - E_\alpha \approx (k - \alpha) \frac{\alpha \hbar^2}{m}$ ; si ha allora con  $\Gamma = \frac{2\alpha \hbar^2 \beta}{m}$ :

$$|f|^2 = \sin^2 \delta = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_\alpha)^2 + \Gamma^2/4},$$

formula nota come *risonanza alla Breit-Wigner* (vedi figura).



La proprietà b) è quindi verificata. Le proprietà c) e d) possono essere similmente verificate.

In conclusione, particolari tipi di potenziale possono dare luogo a stati di scattering che hanno proprietà analoghe agli stati stazionari di un sistema legato (confinamento spaziale della funzione d'onda, vita media elevata per la risonanza); in queste condizioni, gli stati risonanti possono, entro certi limiti, venir trattati come se fossero stati legati (p.es., ad essi possono essere attribuiti numeri quantici etc). Gli stati legati, anzi, possono essere considerati come casi limite degli stati risonanti (probabilità di trovare i costituenti del sistema a distanza infinita  $\rightarrow 0$ , vita media  $\rightarrow \infty$ ).

Si può notare come la proprietà di presentare stati risonanti, come quello discusso prima, compare qui come caratteristica di certe configurazioni di potenziale; ma in effetti, che il sistema sia descrivibile o no tramite un potenziale, la proprietà di presentare "picchi" nella sezione d'urto è matematicamente legata solo alla struttura "risonante" dell'ampiezza di scattering in una data onda parziale, struttura che si evidenzia, nell'approssimazione più semplice, nella forma alla Breit-Wigner dell'ampiezza stessa nei dintorni (larghezza  $\Gamma$ ) dell'energia di risonanza ( $E_0$ ):

$$A \propto \frac{\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma}$$

In tutti i casi in cui l'ampiezza di scattering presenta questa caratteristica (il che avviene talvolta anche per fenomeni relativistici di creazione/distruzione di particelle, descritti con il formalismo della teoria dei campi) ci si attende un comportamento risonante ("picco") della sezione d'urto.

### **3. Scattering come perturbazione; ampiezza di transizione; approssimazione di Born**

Un approccio alternativo, e complessivamente più soddisfacente, al trattamento dei problemi di scattering in meccanica quantistica è quello in cui si tiene conto esplicitamente del carattere transitorio del processo. In questo senso, l'interazione (dipendente dal tempo) fra le due particelle viene considerata come una *perturbazione* all'Hamiltoniano imperturbato (indipendente dal tempo).

#### **a. Richiamo su perturbazioni dipendenti dal tempo**

Giova richiamare qui i principali risultati della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, nella forma più adatta agli scopi interessanti la descrizione delle interazioni fra particelle elementari: la ragione di questo richiamo è che la trattazione normalmente svolta nei corsi introduttivi di meccanica quantistica non è di solito presentata nella forma più conveniente per introdurre la matrice  $S$ .

### *Evoluzione temporale*

Si considerano inizialmente due descrizioni, o rappresentazioni, dell'evoluzione temporale di stati e osservabili per un sistema preparato all'istante  $t_0$  nello stato  $|\psi(t_0)\rangle$ :

Schrodinger:

gli stati evolvono, gli operatori no

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_S &= U_F(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ U_F(t, t_0) &= e^{-iH(t-t_0)} \quad H \text{ hamiltoniano full} \\ O_S(t) &= O(t_0) \end{aligned}$$

Heisenberg:

gli stati non evolvono, gli operatori si'

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_H &= |\psi(t_0)\rangle \\ U_F(t, t_0) &= e^{-iH(t-t_0)} \quad H \text{ hamiltoniano full} \\ O_H(t) &= U_F(t, t_0)^\dagger O(t_0) U_F(t, t_0) \end{aligned}$$

Le due descrizioni sono equivalenti perche', come e' evidente, forniscono gli stessi elementi di matrice, che sono le quantita' misurabili

### *Rappresentazione di interazione, o di Dirac*

Si consideri un hamiltoniano che si possa scrivere nella forma:

$$H = H_0 + H'$$

in cui  $H'$  e' la perturbazione. La descrizione di interazione e' definita da

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= U_0(t, t_0)^\dagger U_F(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \equiv U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ U_0(t, t_0) &= e^{-iH_0(t-t_0)} \quad H_0 \text{ hamiltoniano imperturbato} \\ O_I(t) &= U_0(t, t_0)^\dagger O(t_0) U_0(t, t_0) \end{aligned}$$

Si puo' quindi dire che in questa descrizione le osservabili evolvono secondo  $H_0$ , mentre gli stati evolvono secondo  $H'$ ; anche in questo caso gli elementi di matrice non cambiano.

Occorre ora trovare le equazioni del moto per stati e operatori in questa descrizione. A questo scopo, si consideri la definizione dello stato nella rappresentazione di interazione

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle_S &= e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I \rightarrow |\psi(t)\rangle_I = e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \\
\rightarrow \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} &= iH_0 e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S + e^{+iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} \\
\rightarrow e^{+iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} - iH_0 e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \\
\rightarrow \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} - iH_0 |\psi(t)\rangle_S \\
\rightarrow i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} + H_0 |\psi(t)\rangle_S
\end{aligned}$$

Ricordando l'equazione di Schrodinger:

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} = (H_0 + H') |\psi(t)\rangle_S$$

troviamo:

$$\begin{aligned}
(H_0 + H') |\psi(t)\rangle_S &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} + H_0 |\psi(t)\rangle_S \\
\rightarrow H' |\psi(t)\rangle_S &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\
\rightarrow H' e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\
\rightarrow \underbrace{e^{+iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}}_{H'_I} |\psi(t)\rangle_I &= i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t}
\end{aligned}$$

Quindi nella rappresentazione di interazione gli stati evolvono secondo un'eq. di Schrodinger in cui l'hamiltoniano e' ridotto alla sola perturbazione. Per altro, le osservabili evolvono secondo un'eq. di Heisenberg in cui l'hamiltoniano e' ridotto alla sola parte imperturbata:

$$\frac{dA_I}{dt} = -i[A_I, H_0] \quad A \text{ non dipendente esplicitamente dal tempo}$$

*Serie di Dyson*

Trovare un'espressione esplicita per gli operatori di evoluzione temporale e' di solito impossibile, tuttavia e' spesso sufficiente trovare uno sviluppo perturbativo dell'operatore di evoluzione. L'equazione che descrive l'evoluzione temporale nella rapp. interazione

$$H_I |\psi(t)\rangle_I = i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t}$$

puo' essere riscritta in termini dell'operatore di evoluzione temporale in quella descrizione

$$U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I = |\psi(t)\rangle_I$$

come:

$$\begin{aligned} H_I |\psi(t)\rangle_I &= i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\ i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} &= i \frac{\partial (U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I)}{\partial t} \\ |\psi(t)\rangle_I &= U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \\ \rightarrow i \frac{\partial (U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I)}{\partial t} &= H' U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \\ \rightarrow i \frac{\partial U_I(t, t_0)}{\partial t} &= H' U_I(t, t_0) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un'eq. differenziale per l'operatore  $U_I$ , con la "condizione iniziale"

$$U_I(t, t_0) \Big|_{t=t_0} = 1$$

L'equazione trovata sopra puo' essere trasformata in un'equazione integrale, eseguendo formalmente l'integrazione e tenendo conto della condizione iniziale:

$$\begin{aligned} dU_I &= -i H' U_I dt \\ \rightarrow U_I(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t H' U_I(t', t_0) dt' \end{aligned}$$

L'integrazione e' formale perche' l'integrando contiene l'operatore incognito. L'equazione integrale non e' piu' facile da risolvere di quella differenziale, ma si presta meglio a definire lo sviluppo perturbativo, che in effetti si puo' scrivere sotto forma di serie nel seguente modo, assumendo per comodita'  $t_0=0$ :

Ordine 0: si prende nell'integrale  $U_I(t', 0) = 1$

$$\rightarrow U_I^{(0)}(t, 0) = 1$$

Ordine 1: si prende nell'integrale  $U_I(t', 0) = U_I^{(0)}(t', 0) = 1$

$$\rightarrow U_I^{(1)}(t, 0) = -i \int_0^t dt_1 H'(t_1)$$

Ordine 2: si prende nell'integrale  $U_I(t',0) = -i \int_0^{t'} dt_1 H'(t_1)$

$$\rightarrow U_I^{(2)}(t,0) = (-i)^2 \int_0^t dt_2 H'(t_2) \int_0^{t_2} dt_1 H'(t_1)$$

.....

etc

L'operatore completo e' la somma di tutti i termini dello sviluppo (ammesso che la serie converga):

$$U_I(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t,0)$$

Quello appena ricavato e' lo sviluppo in serie di Dyson (o di Born) dell'operatore di evoluzione temporale.

Sempre restando per il momento nell'ambito dei problemi di scattering da potenziale, il processo individuale di scattering viene ora descritto come conseguente ad una perturbazione dipendente dal tempo, semplicemente perche' la durata dell'interazione fra particella e potenziale che ha l'effetto di modificare la direzione di moto della particella, e' limitata nel tempo.

### b. Ampiezza di transizione; diagrammi di Feynman

La quantita' centrale nella descrizione dello scattering come perturbazione dipendente dal tempo e' l' *ampiezza di transizione*, che si introduce considerando (quando e' possibile) gli stati asintotici del sistema, ossia gli stati nel lontano passato e lontano futuro rispetto all'intervallo di tempo in cui proiettile e bersaglio interagiscono. Se prendiamo l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale, possiamo riesprimerlo nella descrizione si Schrodinger invece che in quella di interazione:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= U_I(t,t') |\psi_I(t')\rangle = e^{iH_0 t} |\psi_S(t)\rangle \\ &= e^{iH_0 t} U_S(t,t') |\psi_S(t')\rangle \\ &= e^{iH_0 t} U_S(t,t') e^{-iH_0 t'} |\psi_I(t')\rangle \\ \rightarrow U_I(t,t') |\psi_I(t')\rangle &= e^{iH_0 t} U_S(t,t') e^{-iH_0 t'} |\psi_I(t')\rangle \\ \rightarrow U_I(t,t') &= e^{iH_0 t} U_S(t,t') e^{-iH_0 t'} \\ \rightarrow U_S(t,t') &= e^{-iH_0 t} U_I(t,t') e^{iH_0 t'} \end{aligned}$$

Riprendendo lo sviluppo perturbativo di  $U$ , potremo scriverlo nella nuova rappresentazione:

$$\begin{aligned}
U_I(t, t') &= \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t') \\
\rightarrow U_S(t, t') &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iH_0 t} U_I^{(n)}(t, t') e^{iH_0 t'} = \sum_{n=0}^{\infty} U_S^{(n)}(t, t') \\
U_S^{(0)}(t, t') &= e^{-iH_0(t-t')} \\
U_S^{(1)}(t, t') &= -i \int_{t'}^t dt_1 e^{-iH_0(t-t_1)} H'(t_1) e^{-iH_0(t_1-t')} \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

Definiamo ora l'ampiezza di transizione da uno stato iniziale, al tempo  $t=0$ , a uno finale al tempo  $t$ , nel modo più semplice come la proiezione dello stato evoluto da quello iniziale su quello finale:

$$A_{fi}(t) = \langle f | U(t, 0) | i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_{fi}^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f | U^{(n)}(t) | i \rangle$$

Se assumiamo che  $H'$  sia indipendente dal tempo, abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
A_{fi}^{(0)} &= \langle f | i \rangle e^{-iE_i t} \\
A_{fi}^{(1)} &= -i \int_0^t dt_1 e^{-iE_f(t-t_1)} \langle f | H' | i \rangle e^{-iE_i t_1} \\
&= -\frac{i}{i(E_f - E_i)} e^{-iE_f t} \left( e^{i(E_f - E_i)t} - 1 \right) \langle f | H' | i \rangle \\
&= \frac{1}{(E_f - E_i)} \left( e^{-iE_f t} - e^{-iE_i t} \right) \langle f | H' | i \rangle \\
A_{fi}^{(2)} &= (-i)^2 \sum_a \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 e^{-iE_f(t-t_2)} \langle f | H' | a \rangle e^{-iE_a(t_2-t_1)} \langle a | H' | i \rangle e^{-iE_i t_1} \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

Il termine di ordine 0 dello sviluppo dell'ampiezza di transizione rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale, senza scambio di energia con l'interazione.

Il termine di ordine 1 rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale fino all'istante  $t_1$ , in cui avviene uno scambio di energia con l'interazione che lascia il sistema nello stato finale; lo stato finale evolve poi liberamente fino all'istante  $t$ . L'ampiezza al I ordine si ottiene sommando tutti i possibili contributi, provenienti da scambi ("vertici") che avvengono ad ogni istante fra 0 e  $t$ .

L'ampiezza al II ordine rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale fino all'istante  $t_2$ , in cui avviene uno scambio di energia con l'interazione; tale scambio lascia in questo



dove  $N$ ,  $N'$  sono costanti di normalizzazione, la cui determinazione e' collegata alla determinazione del fattore densita' degli stati: in altre parole, ogni diversa scelta delle costanti di normalizzazione implica un diverso fattore di densita' degli stati.

### *Normalizzazioni*

Gli stati di particella libera a impulso definito non sono, come e' noto, normalizzabili in senso stretto. Per essi e' tuttavia possibile stabilire diverse normalizzazioni "convenzionali":

#### *Normalizzazione in una scatola*

In questo caso si assume che le particelle siano vincolate entro una grande scatola cubica di lato  $L$ ; allora le funzioni d'onda sono scritte come

$$\psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$$

#### *Normalizzazione nello spazio degli impulsi*

In questo caso si parte dall'ortogonalita' delle autofunzioni dell'impulso per ottenere

$$\psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}$$

Occorre poi trovare la densita' degli stati; assumendo la normalizzazione in una scatola, essa puo' essere trovata nel seguente modo: l'elemento di volume nello spazio delle fasi e'  $d\tau = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = dVp^2dpd\Omega$ . Ogni stato occupa il volume  $h^3$ , quindi nell'elemento  $d\tau$  abbiamo  $dn = d\tau/h^3$  stati. Poiche' siamo interessati alla densita' di stati nello spazio degli impulsi, possiamo integrare sul volume spaziale, ottenendo la densita' ridotta:

$$dN = \int_{\mathcal{V}} dn = \frac{V}{h^3} p^2 dp d\Omega$$

Poiche'  $p^2 = 2mE \rightarrow p^2 dp = 2mEm \frac{dE}{p} = m\sqrt{2mE}dE$ , e quindi

$$dN = \frac{V}{h^3} m\sqrt{2mE}dEd\Omega$$

che e' la densita' degli stati cercata.

Scriveremo allora per la probabilita' di transizione per unita' di tempo:

$$dw_{pp'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} U(r) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} d\mathbf{r} \right|^2 \frac{V}{h^3} m\sqrt{2mE} \delta(E - E') dE' d\Omega$$

Integrando sull'energia della particella finale, si elimina la funzione  $\delta$ , e rimane

$$dw_{pp'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int U(r) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \frac{1}{h^3} m\sqrt{2mE} d\Omega$$

Si osservi come la quantità  $\frac{dw_{pp'}}{d\Omega}$  calcolata abbia le dimensioni  $[T^{-1}] [sr^{-1}]$ ; questo suggerisce di dividerla per il flusso incidente, che ha dimensioni  $[T^{-1}] [L^{-2}]$  per ottenere la sezione d'urto differenziale, come da definizione.

Circa il flusso incidente: la densità di corrente di probabilità è definita da

$$j = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Il calcolo è allora estremamente diretto, e si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikx}, \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ikx} \\ \rightarrow j &= -\frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{ik}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V}} - \frac{-ik}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V}} \right) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{2ik}{V} = \frac{1}{m} \frac{p}{V} = \frac{\sqrt{2mE}}{mV} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned}$$

Il flusso incidente, con la normalizzazione scelta, è dunque  $\frac{1}{V} \sqrt{\frac{2E}{m}}$ ; si ha infine:

$$d\sigma = \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \int U(r) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 d\Omega$$

La derivazione mostrata non dà la fase dell'ampiezza di scattering. Si osservi anche come la sezione d'urto calcolata in meccanica quantistica sia costituita essenzialmente da tre fattori, come conseguenza di quanto visto per la probabilità di transizione per unità di tempo:

- elemento di matrice (nell'app. di Born è la trasformata di Fourier del potenziale): esso contiene la dinamica dell'interazione
- flusso incidente: esso è un semplice fattore cinematico
- spazio delle fasi: esso è un altro fattore cinematico, semplice nel caso considerato fin qui dello scattering da potenziale, ma più complicato nel caso di reazioni fra particelle elementari

#### 4. Matrice S; regola d'oro

Il caso esaminato sopra dello scattering da potenziale non è particolarmente interessante per le applicazioni relativistiche, nelle quali oltre al processo elastico possono avvenire, in conseguenza all'equivalenza massa-energia, molti diversi tipi di reazioni, con creazione e distruzione di particelle. Mentre è possibile, in una certa misura, rendere conto in modo globale dei processi anelastici competitivi tramite l'introduzione di potenziali e sfasamenti complessi (assorbitivi), tale approccio non è molto utile per descrivere con dettaglio ciò che avviene in generale in una reazione ad alta energia fra particelle elementari. Processi che coinvolgono creazione e distruzione di particelle richiedono, per essere descritti in maniera completa e soddisfacente, l'uso di concetti e tecniche propri della teoria dei campi, attraverso i quali è possibile trattare l'evoluzione di sistemi fisici a numero infinito di gradi di libertà, e a numero variabile di particelle; ed è proprio all'interno della teoria quantistica dei campi che si può sviluppare una descrizione potente e generale per le interazioni fra particelle elementari, nota come teoria della *matrice di scattering*, o *matrice S*. Nel rinviare quindi ai corsi e ai testi di teoria dei campi per una trattazione esauriente, qui di seguito si accenna all'argomento per sommi capi, limitandosi ad alcuni risultati di interesse per ciò che seguirà.

##### a. Ampiezza di transizione nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza

Lo sviluppo perturbativo dell'ampiezza di transizione visto sopra è definito nel dominio del tempo, che è quello più ovvio in considerazione del tipo di problema da risolvere. È tuttavia utile riscrivere lo sviluppo stesso nel dominio della frequenza, perché i calcoli in genere diventano più semplici.

##### *Perturbazioni dipendenti dal tempo nel dominio della frequenza*

L'operatore di evoluzione temporale può essere formalmente sviluppato in integrale di Fourier, come se fosse una normale funzione del tempo: a questo scopo, consideriamo l'integrale nel piano complesso:

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{i}{\omega - a + i\epsilon}$$

L'integrando ha un polo per  $\omega = a - i\epsilon$ , per cui per calcolare  $I$  possiamo usare il teorema dei residui: per  $t > 0$ , usando il percorso che va, lungo l'asse reale, da  $-\infty$  a  $+\infty$ , e chiudendolo su un semicerchio con  $\text{Im}(\omega) < 0$  e raggio  $\infty$ , quest'ultima parte non contribuisce all'integrale, visto il fattore esponenziale smorzato  $\exp(-\text{Im}(\omega)t)$ . Quindi si ha

$$I(a) = -2\pi i \frac{i}{2\pi} e^{-iat} = e^{-iat}$$

per  $t < 0$ , usiamo un percorso simile al precedente, ma nel semipiano  $Im(\omega) > 0$  per avere come al solito l'esponenziale smorzato. In questo caso il residuo e' zero.

Quindi possiamo rappresentare  $U$  come:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} K(\omega)$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega - H + i\varepsilon}$$

Nelle unita' naturali, la frequenza ha le stesse dimensioni dell'energia: quindi il significato dello sviluppo di Fourier descritto sopra e' quello di scomporre l'operatore di evoluzione temporale in una "serie" (in generale con indice continuo) di operatori che fanno evolvere stati ad energia definita. Ognuno di essi e' il prodotto di un fattore oscillante, caratteristico dell'evoluzione libera con energia  $\omega$ , e di un *propagatore*  $K(\omega)$ , che misura il "peso" relativo di ogni contributo. Il termine  $+i\varepsilon$ , presente nel propagatore, ma assente nella somma finale, e' necessario per la convergenza dello sviluppo di Fourier, come visto prima; esso corrisponde ad usare, nello sviluppo, stati ad energia *parzialmente definita*, con incertezza dell'ordine di  $\varepsilon$ .

Supponiamo ora che  $H$  sia la somma di una parte imperturbata e di una perturbazione: allora la trasformata di Fourier dell'operatore di evoluzione (il propagatore del sistema: ossia, l'operatore di evoluzione temporale nel dominio della frequenza) si scrivera'

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega - (H_0 + H') + i\varepsilon}$$

Usando lo sviluppo in serie per l'operatore inverso:

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

[Infatti:

$$(A - B) \left[ \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \right] =$$

$$= 1 - \frac{B}{A} + \frac{B}{A} - B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots = 1]$$

$K$  si puo' scrivere allora come :

$$\begin{aligned}
K(\omega) = & \frac{i}{\omega - H_0 + i\varepsilon} + \\
& + i \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} H' \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} + \\
& + i \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} H' \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} H' \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Questa e' in pratica una versione della serie di Dyson per l'operatore di evoluzione temporale nel dominio della frequenza.

## b. Matrice S

Questa riscrittura dell'operatore di evoluzione temporale nel dominio della frequenza e' particolarmente utile per definire un nuovo operatore, che ha importanza centrale nella descrizione matematica di qualsiasi processo di scattering: la *matrice S*, o di scattering appunto.

Il sistema si considera non interagente con la perturbazione a tempi lunghi nel passato e nel futuro. I suoi stati saranno allora descrivibili come:

$$\begin{aligned}
|\psi^+\rangle &= |\psi_f\rangle e^{-iE_f t'} \\
|\psi^-\rangle &= |\psi_i\rangle e^{-iE_i t}
\end{aligned}$$

$|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$  sono autostati di  $H_0$ , indipendenti dal tempo. Allora, come sappiamo, possiamo scrivere per l'ampiezza di transizione

$$A(t', t) = e^{iE_f t'} \langle \psi_f | U(t', t) | \psi_i \rangle e^{-iE_i t}$$

dove  $U$  e' l'operatore di evoluzione temporale del sistema. Questo operatore e' dato formalmente da

$$U(0, t) = e^{-iHt} \rightarrow U(t', t) = e^{-iH(t-t')}$$

dove  $H$  e' l'hamiltoniano totale del sistema.

Se ora riprendiamo l'espressione per l'ampiezza di transizione, possiamo scriverla, prendendo per semplicita'  $t'=0$ , e ricordando che

$$e^{-iH_0 t'} |\psi_-\rangle = e^{-iE_i t'} |\psi_i\rangle$$

$$e^{+iH_0 t'} |\psi_+\rangle = e^{+iE_f t'} |\psi_i\rangle$$

come:

$$A(0,t) = \langle \psi^- | U(0,t) | \psi^+ \rangle =$$

$$= \langle \psi^- | \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[ \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} + \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} H' \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} + \dots \right] \right] | \psi^+ \rangle =$$

termine che da  $e^{-iH_0 t}$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \langle \psi^+ | \psi^- \rangle \frac{1}{\omega - E_i + i\varepsilon}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega - E_f + i\varepsilon} \langle \psi^+ | H' | \psi^- \rangle \frac{1}{\omega - E_i + i\varepsilon}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_a \frac{1}{\omega - E_f + i\varepsilon} \langle \psi^+ | H' | \psi_a \rangle \frac{1}{\omega - E_a + i\varepsilon} \langle \psi_a | H' | \psi^- \rangle \frac{1}{\omega - E_i + i\varepsilon}$$

$$+ \dots$$

Si osservi che ora gli integrandi sono funzioni, e non operatori. Svolgendo il calcolo per  $A(t',t)$  si trova:

$$A_{fi}(t',t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\langle \psi_f | \psi_i \rangle e^{i(E_f - \omega)t' - i(E_i - \omega)t}}{\omega - E_i + i\varepsilon}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i(E_f - \omega)t'}}{\omega - E_i + i\varepsilon} T_{fi} \frac{e^{-i(E_i - \omega)t}}{\omega - E_i + i\varepsilon}$$

avendo definito:

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle + \langle \psi_f | H' \frac{1}{\omega - H_0 + i\varepsilon} H' | \psi_i \rangle + \dots$$

$T$  e' la *matrice di transizione*, i cui elementi, fra coppie di stati imperturbati, rappresentano ciascuno la somma (in principio infinita) delle ampiezze per lo scambio di  $1, 2, \dots, n, \dots$  quanti fra sistema imperturbato e perturbazione.

In altre parole, lo sviluppo perturbativo dell'ampiezza di transizione fornisce una serie di termini, in ognuno dei quali compaiono gli elementi di matrice della perturbazione fra stati imperturbati (iniziale, finale, o intermedio). La presenza degli stati intermedi si puo' interpretare come una raffigurazione dello scambio di energia, tramite quanti individuali, fra sistema imperturbato e perturbazione: lo stato iniziale viene eccitato ad uno stato intermedio, che scambia poi ancora energia con la perturbazione, e poi ancora e ancora, fino a che il sistema e' evoluto nello stato finale. Come e' ovvio, risulta lecito arrestare lo sviluppo perturbativo allo scambio di uno, due o pochi quanti, a seconda del valore delle ampiezze di transizione corrispondenti: quando sono sufficientemente piccole di fronte alle prime, possono essere trascurate.

Ricordando che gli stati asintotici sono ortogonali, si ha che

$$\langle \psi_f | \psi_i \rangle = \delta_{fi};$$

Infine, dobbiamo chiederci quale sia il limite dell'ampiezza di transizione teste' trovata, e che e' funzione di  $(t, t')$ , per tempi molto grandi, nel passato e nel futuro: tale limite e' la quantita' di interesse, e viene definito come l'elemento della matrice  $S$  fra i due stati asintotici considerati. Da un punto di vista rigoroso, tutta questa discussione richiederebbe particolare cura, essenzialmente perche' l'esistenza di questo limite non e' ovvia, e puo' essere provata solo con diverse ipotesi aggiuntive. Indicativamente, e senza la minima pretesa di rigore, le cose vanno cosi':

si consideri il limite

$$J = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon}$$

Quando  $t$  e' grande ( $-\infty$ ), le oscillazioni dell'esponenziale sono molto rapide, e non c'e' contributo all'integrale; i contributi vengono solo dalla regione

$$|\omega| \leq \frac{1}{|t|}$$

che tende a zero per  $t$  grande in modulo. Quindi, approssimativamente:

$$J \cong f(0) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon}$$

il che indica che il limite dell'integrando, sotto il segno di integrale, si comporta come una delta di Dirac. In effetti, eseguendo l'integrale nel piano complesso, facendo il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  e poi quello per  $t \rightarrow -\infty$  si trova:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\pi i e^{\varepsilon t}) = -2\pi i \\ \rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} &\approx -2\pi i \delta(\omega) \end{aligned}$$

Possiamo applicare questo risultato per valutare il limite per tempi lunghi dell'ampiezza di transizione trovata prima:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty}} A_{fi}(t', t) &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i(E_f - \omega)t'} (-2\pi i) \delta(\omega - E_i) \langle \psi_f | \psi_i \rangle \\ &+ \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i(E_f - \omega)t'}}{\omega - E_f + i\varepsilon} (-2\pi i) \delta(\omega - E_i) T_{fi} \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty} \left[ \langle \psi_f | \psi_i \rangle e^{i(E_f - E_i)t'} + \frac{e^{i(E_f - E_i)t'}}{E_i - E_f + i\varepsilon} T_{fi} \right] \\ &= \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \\ &\equiv S_{fi} \end{aligned}$$

La forma assunta dalla serie perturbativa, basata sul formalismo generale della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, suggerisce come accennato sopra un'interpretazione fisica particolarmente intuitiva: essa e' basata sulla presenza degli *stati intermedi*, che compaiono negli ordini superiori a quello fondamentale dello sviluppo perturbativo per l'ampiezza di transizione. Come si ricordera', tali stati compaiono come "stazioni" di partenza e arrivo per transizioni interne al processo, che puo' essere quindi immaginato come una sequenza di transizioni, al limite infinita se si considerano tutti gli ordini della serie perturbativa, in ognuna delle quali il sistema, inizialmente in uno stato imperturbato, scambia energia con il potenziale della perturbazione. Si noti che ad ogni

"interazione" intermedia il sistema non conserva l'energia, che viene invece globalmente conservata grazie alla presenza della funzione  $\delta(E-E')$  a fattore.

c. Regola d'oro

Riprendendo l'espressione per la matrice  $S$ , e arrestandosi al  $I$  ordine perturbativo per la matrice  $T$ , otteniamo la seguente espressione:

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle$$

che, inserita nell'espressione di  $S$ , da' :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \underbrace{\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle}_{M_{fi}} \delta(E_f - E_i)$$

La regola d'oro si ottiene facendo il modulo quadro del II termine di  $S_{fi}$ : nel farlo, compare il quadrato di una  $\delta$ , quantita' difficile da interpretare. Si puo' cavarsela in modo non rigoroso nel solito modo: si prende una delle rappresentazioni limite delle  $\delta$ :

$$\delta(E_f - E_i) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt$$

Se ora, invece della prob. di transizione  $|M|^2$ , si considera la prob. di transizione per unita' di tempo si ha:

$$w_{fi} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|M_{fi}|^2}{\tau} = 2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt$$

$$\rightarrow w_{fi} = 2\pi \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

dove l'ultimo passaggio viene dalla presenza della prima  $\delta$ , che fissa  $E_f - E_i = 0$ . Questa espressione della probabilita' di transizione, per quanto plausibile e ragionevole, ha il difetto di essere divergente, a causa della presenza della funzione delta: in realta', il problema e' solo apparente, come risulta dalle seguenti considerazioni:

- la prob. di transizione per unita' di tempo scritta sopra e' fra lo stato  $i$  e lo stato  $f$ , che sono specificati solo dalle loro energie
- tuttavia, fissare  $E_f$  non fissa, in generale, in maniera univoca lo stato finale: esiste cioe' in generale una molteplicita' di stati finali corrispondenti a una data energia; questa molteplicita' e' una funzione dell'energia

- per una data energia dello stato finale, si puo' determinare *la densita' di configurazioni di stato finale/intervallo di energia* (chiamata colloquialmente *la densita' degli stati finali per intervallo di energia*)

$$\rho(E_f) = \left. \frac{dn}{dE} \right|_{E=E_f}$$

che non e' altro che l'incremento del numero di stati accessibili alla energia finale per incremento dell'energia stessa, calcolato per  $E=E_f$

- quindi, in ogni caso concreto siamo interessati alla probabilita' di transizione per unita' di tempo verso un gruppo di stati finali, tutti con energia  $E_f$
- la prob. di transizione verso un gruppo di stati finali si ottiene, evidentemente, sommando  $w_{fi}$  su tutti gli stati finali che si considerano
- in pratica, occorre eseguire la somma su *TUTTI o PARTE* degli stati che corrispondono ad ogni dato valore di energia; normalmente e' possibile approssimare la somma con un integrale

$$\sum_n \dots \rightarrow \int \dots dn$$

- Allora, la somma delle  $w_{fi}$  sugli stati finali con energia  $E_f$  si scrive

$$\begin{aligned} W &= \sum_n w_{fi} = \int_{\text{molteplicita'}} 2\pi \left| \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) dn \\ &= \int_{\text{energia finale}} 2\pi \left| \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{dn}{dE_f} dE_f \\ &\rightarrow W = 2\pi \left| \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{dn}{dE_i} \end{aligned}$$

il che mostra che la divergenza dell'espressione e' solo apparente

## 5. Estensione al caso relativistico

Senza voler entrare nella formulazione covariante della teoria perturbativa, che e' uno dei soggetti centrali della teoria quantistica dei campi, si intende solo citare quale sia l'estensione della regola d'oro al caso di una interazione qualsiasi (non limitata a scambi di energia con un potenziale), ossia della prob. di transizione per unita' di tempo per un processo generico (reazione, decadimento) nel quale ci sia come risultato uno stato finale formato da  $n$  particelle.

Si osservi come il quadro concettuale debba essere modificato in una teoria che sia relativistica: come conseguenza della equivalenza fra massa ed energia, e quindi della

possibilita' di distruggere e creare particelle, i fenomeni di collisione devono essere considerati da un punto di vista piu' generale di quello visto prima a proposito dello scattering non relativistico. In sostanza, in ogni caso si parla di processi, scattering compreso, nei quali, tramite l'interazione, viene *distrutto* lo stato iniziale e *creato* quello finale. Conservare l'idea che ci sia una qualche continuita' fra particelle dello stato iniziale e dello stato finale e' in realta' errato, anche se a volte comodo, e puo' portare a equivoci e apparenti paradossi (molti dei quali hanno a che fare con l'uso improprio e "troppo classico" del concetto di velocita').

L'espressione per la matrice  $S$  e' analoga a quella trovata prima, con la sola variante dell'introduzione di quantita' 4-dimensionali

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \mathcal{T}_{fi}$$

in cui  $\mathcal{T}$  e' l'elemento di matrice di transizione *invariante*

$$\mathcal{T}_{fi} = -i \langle f | \int d^4x \mathcal{H}' | i \rangle$$

$\mathcal{H}'$ : densita' volumetrica di hamiltoniano di interazione

In tutti i casi di interesse, nell'espressione esplicita di  $\mathcal{T}_{fi}$  compare una funzione  $\delta$  4-dimensionale, che garantisce la conservazione del 4-impulso totale. Si puo' osservare che in questa forma covariante viene garantita la conservazione di energia e impulso, mentre nella versione non relativistica di interazione tramite un potenziale, vista prima, l'impulso non viene conservato (in effetti, un potenziale  $V$  statico dipende da  $\mathbf{r}$  ma non da  $t$ : quindi non ha componenti di Fourier che trasferiscono energia, mentre ne ha che trasferiscono impulso; v. dopo per un esempio).

Il processo produce uno stato finale generico, che contiene  $n$  particelle ognuna nello stesso volume  $V$  e nell'elemento di volume individuale  $d^3\mathbf{p}_i$  nello spazio degli impulsi; quindi la probabilita' di transizione verso un gruppo di stati finali del continuo si scrivera':

$$d\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \delta^4(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) dn$$

dove  $dn$  e', come prima, l'incremento nel numero di stati accessibili al processo (per l'intera configurazione dello stato finale del processo) per incremento di energia totale. Si tratta quindi di esprimere  $dn$  in termini delle variabili cinematiche dello stato finale. Consideriamo la normalizzazione dello stato con 1 particella in un volume  $V$ : avremo allora

$$\int |\psi|^2 dV = 1 \rightarrow [\psi] = \left[ \frac{1}{V^{1/2}} \right]$$

Imponendo condizioni al contorno periodiche su ciascuno dei 3 lati di lunghezza  $L=V^{1/3}$  otteniamo p.es. per i possibili valori della componente  $x$  dell'impulso

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, n_x = 0, \pm 1, \dots$$

da cui il numero di stati per intervallo di  $p_x$ :

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \dots \rightarrow \underset{\text{incremento no. stati/incremento } dp_x}{dn_x} = \frac{L}{2\pi} dp_x \rightarrow dn = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dp_x dp_y dp_z$$

$$\rightarrow dn = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}$$

Conviene assumere il volume  $V$  unitario, per semplificare le espressioni. Per uno stato finale con  $N$  particelle potremo allora scrivere, essendo il numero di stati una variabile moltiplicativa (v. meccanica statistica):

$$dn = \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 \mathbf{p}_N}{(2\pi)^3}$$

Il guaio di questa espressione, che si deve poi usare nel calcolo della probabilita' di transizione (regola d'oro), e' che non e' un invariante di Lorentz. Infatti, l'elemento di volume nello spazio degli impulsi si trasforma come:

$$d^3 p = d^2 p_{\perp} dp_{\parallel} \rightarrow d^3 p' = d^2 p'_{\perp} dp'_{\parallel} = d^2 p_{\perp} \gamma (dp_{\parallel} + \beta dE)$$

$$= d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_{\parallel}}\right) = d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(1 + \beta \frac{p_{\parallel}}{E}\right) = d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(\frac{E + \beta p_{\parallel}}{E}\right)$$

$$\rightarrow d^3 p' = d^3 p \frac{E'}{E} \rightarrow \frac{d^3 p'}{E'} = \frac{d^3 p}{E}$$

La quantita'  $d^3 p/E$  e' quindi, invece, un invariante; i processi che normalmente si considerano sono decadimenti o reazioni, come indicato di sotto:

$$a \rightarrow "1" + "2" + \dots + "N"$$

$$a + b \rightarrow "1" + "2" + \dots + "N"$$

se ora ridefiniamo l'elemento di matrice invariante, rispettivamente come

$$\mathcal{T}_{fi} \leftarrow (2E_a)^{1/2} (2E_1)^{1/2} \dots (2E_N)^{1/2} \mathcal{T}_{fi} \quad \text{decadimento}$$

$$\mathcal{T}_{fi} \leftarrow (2E_a)^{1/2} (2E_b)^{1/2} (2E_1)^{1/2} \dots (2E_N)^{1/2} \mathcal{T}_{fi} \quad \text{reazione}$$

(il fattore 2 a denominatore e' convenzionale), possiamo riscrivere la regola d'oro, nei due casi, rispettivamente come:

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{2E_a} \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{2E_a 2E_b} \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

Tutto questo e' equivalente a normalizzare gli stati di particella libera, iniziali e finali, a  $2E$  invece che a 1 (normalizzazione convenzionale degli stati relativistici).

Va sottolineato che i gradi di liberta' qui presi in considerazione sono solo quelli orbitali; nel caso in cui si considerino particelle con spin, le espressioni trovate vengono modificate tramite appropriati fattori numerici

Si osservi che il rate di transizione (= prob. di transizione per unita' di tempo), come dato dalla regola d'oro, *non e'* un invariante di Lorentz; questo fatto, apparentemente sorprendente, e' in realta' corretto, alla luce delle seguenti considerazioni:

#### a. Decadimenti

L'inverso del rate e' la *vita media* dello stato (instabile); essa e' una quantita' non invariante, come ovvio (v. dilatazione dei tempi, quindi anche della vita media in un sistema di riferimento in moto rispetto a quello proprio – di quiete – dello stato)

#### b. Reazioni

Anche in questo caso il rate non e' una quantita' invariante: questo e' ovvio, se si pensa che il rate stesso e' misurato in interazioni/unita' di tempo, e l'unita' di tempo dipende dal riferimento scelto. E' tuttavia possibile definire una quantita' invariante, che e' la *sezione d'urto totale*, nel seguente modo: si divide il rate per il flusso incidente (no. particelle/unita' di area\*unita' di tempo). Considerando la normalizzazione a 1 particella/volume unitario che abbiamo usato fin qui, tale flusso e' dato dalla velocita' relativa (in modulo) fra le particelle dello stato iniziale (perche' con 1 *particella/volume unitario*, sia per *a* che per *b*, c'e' un flusso di 1 *particella/area unitaria\*tempo necessario a percorrere la distanza unitaria* – tempo che e'  $1/v_{rel}$ ). Quindi:

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b} \int |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

La quantita'

$$|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b = \left| \frac{\mathbf{p}_a}{E_a} - \frac{\mathbf{p}_b}{E_b} \right| 2E_a 2E_b \equiv 4(p_a p_b - m_a^2 m_b^2)^{1/2}$$

e' il flusso invariante. In questo modo viene dunque definita la sezione d'urto totale per interazioni fra particelle elementari.

