

Elementi di teoria dello scattering

1. Descrizione classica dei processi d'urto

L'origine dei concetti di *sezione d'urto*, *cammino libero medio* etc sta nella teoria cinetica dei gas e nella meccanica statistica (Maxwell ~ 1860, Boltzmann ~ 1870). La teoria cinetica della materia, fondata sull'ipotesi atomico-molecolare, fu sviluppata per interpretare microscopicamente le proprietà termodinamiche dei gas, e poi di tutti i sistemi costituiti da molte particelle. Centrale a questi sviluppi è l'idea che le interazioni fra molecole, nel caso più semplice, consistano essenzialmente in collisioni (*scattering*). Ora, è evidente come una descrizione corretta e realistica di tutti questi processi fra enti microscopici (molecole, atomi, nuclei, particelle elementari) richieda l'uso esteso della meccanica quantistica; tuttavia, la definizione iniziale di alcuni concetti base nell'ambito della fisica classica, come se si trattasse di processi fra enti macroscopici, consente di afferrare più facilmente quel che c'è di intuitivo e di immediato: questa è quindi la ragione d'essere di questa introduzione. In ogni caso, la cosa importante da cogliere è che lo studio delle collisioni fornisce informazione sulle proprietà dei corpi che collidono e sulle interazioni che governano le collisioni stesse.

In meccanica classica, ogni evento di *scattering* è definito in maniera del tutto deterministica: per ogni singolo urto, note tutte le forze in gioco, gli angoli di deflessione (θ, ϕ) sono completamente determinati dal parametro d'urto e dalla velocità relativa. Si pensi al caso di una cometa su un'orbita iperbolica: tutti i parametri della traiettoria (aperta) sono completamente determinati dalle condizioni in cui avviene la "collisione" (\rightarrow incontro ravvicinato) fra cometa e Sole. In casi come questo (macroscopici), la conoscenza dei parametri che fissano le caratteristiche della collisione si può in generale assumere completa: nulla osta, né in linea di principio né in pratica, a che conosciamo energie incidenti, parametri d'urto etc.

Nel considerare invece il caso degli esperimenti di fisica atomica, nucleare o subnucleare, le condizioni sono meno definite: mentre l'insieme dei *proiettili* è caratterizzato da diversi parametri sostanzialmente conosciuti e identici per tutte le particelle, come la velocità (in un dato sistema di riferimento), la massa a riposo, la direzione di moto (si parla in questo caso di un *fascio* di particelle incidenti), e anche il secondo insieme, quello dei *bersagli*, contiene particelle tutte sostanzialmente in uno stesso stato dinamico conosciuto (p.es., sostanzialmente ferme nel sistema di riferimento del laboratorio), il parametro d'urto (e anche altre quantità) di ogni singola collisione restano sconosciute e non misurabili.

Si noti che il significato di questa non misurabilità è totalmente diverso in meccanica classica e in meccanica quantistica: in meccanica classica si tratta di una *impossibilità pratica*, legata alla difficoltà di eseguire misure di lunghezze,

tempi etc su scala microscopica. In meccanica quantistica, come e' noto, il principio di indeterminazione vieta di conoscere con precisione arbitraria coppie di variabili canonicamente coniugate, come posizione e impulso: quindi *l'impossibilita' e' di principio*.

In queste condizioni, dunque, ogni singola collisione e' caratterizzato da un diverso valore del parametro d'urto, oltre che eventualmente da altre caratteristiche, che di fatto ignoriamo completamente: siamo quindi condotti a definire nuove grandezze fisiche che consentano di descrivere *statisticamente* la dinamica della collisione in assenza di informazioni complete sullo stato iniziale.

Il flusso incidente di proiettili, Φ , si misura in **particelle $m^{-2} s^{-1}$** ; il flusso di particelle diffuse entro un angolo solido $d\Omega$, R , si misura in **particelle $sr^{-1} s^{-1}$** : entrambe queste grandezze sono, ovviamente, misurabili. E' ragionevole ammettere che ci sia una proporzionalita' diretta fra le due grandezze, per lo meno nella misura in cui effetti cumulativi (particelle con > 1 interazione, frazione di fascio che interagisce molto elevata) siano trascurabili: allora

$$R = a \Phi \rightarrow \frac{dn}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Phi$$

dove a e' una costante di proporzionalita' che ha le dimensioni di un'area e si chiama *sezione d'urto differenziale*: essa dipende in modo essenziale dalla dinamica dell'interazione fra le due particelle, e quindi misurarla significa ottenere informazioni sulle forze che agiscono fra le due particelle.

Il concetto si puo' estendere classicamente al caso in cui si abbia scattering di radiazione elettromagnetica da parte di una distribuzione di carica elettrica; poiche' in questo caso non e' possibile, almeno classicamente, parlare di numero di particelle incidenti e diffuse, mentre ha perfettamente senso riferirsi alla potenza incidente e diffusa, il flusso incidente si misura in $W m^{-2}$, mentre quello diffuso in $W sr^{-1}$. Anche in questo caso il rapporto fra i due flussi, ossia la sezione d'urto differenziale per lo scattering di radiazione, ha le dimensioni di un'area. Se esistesse la radiazione gravitazionale, come si crede, la definizione sarebbe del tutto simile.

E' immediato definire a questo punto la *sezione d'urto totale*, integrando la sez. d'urto differenziale su tutto l'angolo solido:

$$\sigma = \int_{\Delta\Omega=4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Essa rimane una funzione della velocita' relativa, oltre che del tipo di particelle in gioco. Un modo di vedere il significato fisico di questa grandezza puo' essere questo: consideriamo un fascio di proiettili che penetra entro un volume nel quale si trovano, uniformemente distribuiti, i bersagli. Se consideriamo perduta una particella del

fascio che subisca una qualsiasi interazione con il bersaglio, il decremento nell'intensita' del fascio nell'attraversare uno spessore dx di bersaglio sara' dato da

$$d\Phi = -\Phi k N dx$$

N essendo il numero di particelle bersaglio per unita' di volume e k una costante di proporzionalita'. Quindi

Densita' volumetrica di massa g cm^{-3}

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -k \frac{\rho}{A} dx$$

Massa molecolare g

Quindi k ha le dimensioni di un'area, e si identifica immediatamente con σ . Il suo significato e' quindi quello di misura dell'intensita' globale di interazione fra proiettile e bersaglio. Integrando l'eq. differenziale, si trova:

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x}$$

che rappresenta l'attenuazione progressiva del fascio nell'attraversare il bersaglio. Considerando una sola particella, e ponendo $\Phi_0 = 1$, l'equazione descrive l'andamento della probabilita' di sopravvivenza della particella nell'attraversare il bersaglio:

$$\text{Prob. di sopravvivenza} = e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x}$$

$$\text{Prob. di interazione} = 1 - e^{-\frac{\rho\sigma}{A}x}$$

La quantita' λ , con dimensioni di una lunghezza, definita da

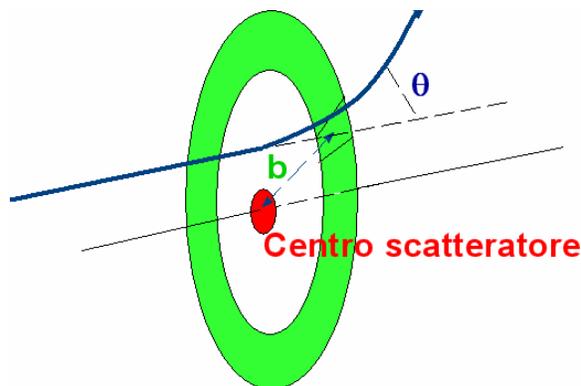
$$\lambda = \frac{A}{\sigma\rho} = \frac{1}{\mu}$$

e' il *cammino libero medio* fra due interazioni successive; il suo inverso, indicato con μ , si chiama *coefficiente di attenuazione lineare* del fascio.

La definizione data di sezione d'urto totale e' estremamente generale: in particolare, essa si applica p.es. al caso in cui il risultato della collisione non sia necessariamente solo la deflessione del proiettile, ma anche la modifica dello stato energetico o interno del proiettile e/o del bersaglio stessi. Per esempio, l'urto fra proiettile e bersaglio comporta in generale una redistribuzione dell'energia cinetica totale a disposizione; inoltre, se il proiettile o il bersaglio hanno una struttura interna (si pensi ad un urto fra atomi), questa puo' venire modificata in conseguenza della collisione.

La sezione d'urto totale e' quindi una misura della *probabilita' totale* di interazione fra proiettile e bersaglio, integrata su tutti i possibili valori del parametro d'urto, mentre la sezione d'urto differenziale e' una misura della *probabilita' differenziale* dell' interazione che causa una deflessione nell'elemento di angolo solido, quindi legata ad un valore particolare del parametro d'urto: come accennato sopra, il senso di queste probabilita' e' quello classico di limite di una frequenza (per il rate di interazione, o per la distribuzione di frequenza degli angoli di deflessione), restando in un contesto del tutto deterministico. Nel contesto della fisica classica, la sezione d'urto ci dice quale e' la probabilita' statistica di osservare un'interazione se spariamo un proiettile contro un bersaglio, visto che non siamo in grado di dire cosa accada in ogni singolo evento *per motivi pratici*.

La sezione d'urto e' dunque una grandezza misurabile per ogni processo di collisione; assumendo che ci sia una relazione deterministica, uno a uno, fra parametro d'urto e angolo di deflessione, la misura della sezione d'urto differenziale consente di ricavare informazioni sull'interazione responsabile della deflessione. Infatti, restando in ambito classico, si consideri un fascio di proiettili che urta un centro diffusore con una distribuzione continua di parametri d'urto; se i proiettili che passano nell'elemento d'area $bdbd\phi$ sono deflessi nell'angolo solido $d\Omega$



si puo' scrivere:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$d\sigma = b db d\phi$$

$$\rightarrow b db d\phi = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

Si possono fare un paio di esempi per mostrare come la cosa funzioni: in concreto:

Sezione d'urto di Rutherford nella versione piu' semplificata

In questa versione, la sezione d'urto di Rutherford (scattering di particelle α da parte di nuclei pesanti) viene ricavata immaginando un centro diffusore (bersaglio) infinitamente pesante, nell'approssimazione non relativistica e trascurando ogni effetto di spin. Il problema viene ricondotto al classico problema dei due corpi, con energia potenziale data da $U(r)=\alpha/r$ (potenziale coulombiano, repulsivo nel caso di particelle α su nuclei). L'equazione della traiettoria (aperta, visto che un potenziale repulsivo non genera stati legati) si scrive, in coordinate polari (r, ϕ) , e avendo indicato con L il momento angolare totale e con E l'en. totale:

$$\phi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{cost}$$

Indichiamo con ρ il parametro d'urto, con v_∞ la velocita' iniziale, e con ϕ_0 la coordinata angolare dell'asse di simmetria della traiettoria; essendo

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad L = m\rho v_\infty$$

si ha

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{rmv_\infty^2}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

Ponendo, per l'angolo di deflessione χ , $\chi = \pi - 2\phi$, si ha:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{tg}^2 \phi = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2}$$

Questa e' la relazione fra parametro d'urto e angolo di deflessione; da essa, usando la relazione generale trovata prima, si trova l'espressione per la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

Se si prova a calcolare la sezione d'urto totale $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$, si trova che e' divergente: questa e' una conseguenza del *range infinito* del potenziale coulombiano

Sezione d'urto per scattering da sfera rigida

Si immagina la diffusione di particelle puntiformi da parte di bersagli sferici infinitamente pesanti e infinitamente rigidi (barriera di potenziale di altezza infinita). Nell'urto vale per la traiettoria del proiettile la legge della riflessione: *angolo di incidenza = angolo di riflessione*.

[Se questo risultato suona arbitrario o non ovvio, si mediti sul punto seguente: *il bersaglio esercita solo forze normali alla sua superficie; quindi la variazione della quantita' di moto del proiettile avviene solo normalmente alla superficie del bersaglio. Inoltre, un bersaglio infinitamente rigido – incapace di deformarsi – non consente alcun moto nella direzione normale alla sua superficie. Infine, se il bersaglio e' infinitamente pesante, il proiettile urta elasticamente, conservando la sua energia cinetica e quindi il modulo della sua velocita'. Poiche' la componente trasversale di v resta invariata, quella normale deve cambiare segno*].

Si consideri la geometria del problema (fig. 2), in cui sono stati usati gli stessi simboli usati nell'es. 2: la relazione fra parametro d'urto e angolo di deflessione e' data da

$$\rho = a \sin \phi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

da cui si trae, sempre usando il risultato dell'es. 1

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega$$

Integrando su tutto l'angolo solido, si trova per la sezione d'urto totale

$$\sigma = \pi a^2$$

finita, e coincidente (non sorprendentemente, viste le ipotesi dinamiche fatte!) con la sezione d'urto *geometrica*

Se si considera il caso un po' piu' realistico dell'urto elastico fra due particelle, entrambe di massa finita, si osserva immediatamente che in generale avviene una redistribuzione di energia fra proiettile e bersaglio. Come conseguenza, l'energia del proiettile dopo l'urto dipende, nel riferimento del laboratorio, dall'angolo di deflessione: c'e' quindi una relazione precisa (\rightarrow *cinematica*) fra energia e angolo dopo l'urto, sia per il proiettile sia per il bersaglio. La sezione d'urto differenziale puo' quindi essere espressa in funzione di una qualsiasi di queste variabili, usata in modo equivalente all'angolo di deflessione.

2. Descrizione quantistica dei processi d'urto: formalismo indipendente dal tempo

Seguono alcuni richiami sulla descrizione dei fenomeni di scattering non relativistico.

a. Generalita' sullo scattering da potenziale

Riferendosi alla descrizione classica delle collisioni, si puo' osservare che il calcolo della sezione d'urto si svolge facendo uso, diretto o indiretto, delle equazioni del moto: leggi di Newton e conseguenti leggi di conservazione. Come e' noto, in meccanica quantistica le leggi di Newton perdono di validita', insieme a diversi concetti classici fondamentali, fra cui quello di traiettoria. Il loro posto viene preso (in ambito non relativistico) dall'equazione di Schrodinger, la cui soluzione e' la *funzione d'onda* $\psi(r, t)$. Nel caso, non relativistico, della dinamica di una particella in un potenziale essa si scrive:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(r) \psi(\vec{r}, t) = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

La descrizione quantistica delle collisioni puo' essere fatta in vari modi, sostanzialmente equivalenti. Malgrado il fatto che un processo di collisione rappresenti un esempio praticamente perfetto di fenomeno transitorio, la maniera piu' semplice di accostarsi al problema e' quello di considerare una situazione di tipo *stazionario*, corrispondente p.es. al caso in cui un fascio continuo incida su un bersaglio. Si puo' allora immaginare che a tale situazione corrisponda una funzione d'onda di tipo altrettanto stazionario (corrispondente a uno *stato di scattering* per il sistema), come quella che descrive gli stati stazionari di un sistema legato. Considerando per ora il caso della diffusione di una particella da un potenziale, ci chiediamo innanzi tutto quali debbano essere le proprieta' generali di questa funzione d'onda: se il potenziale ha un range finito, a grande distanza dalla regione del potenziale ci aspettiamo di osservare, per la particella, stati asintotici coincidenti con quelli di una particella libera. Supponendo che il fascio incidente sia descritto da un'onda piana, e quello diffuso da un'onda sferica (\leftarrow origine di quest'idea: *Il fascio incidente ha, per ipotesi, momento e direzione piuttosto ben definiti. Quindi, trascurando varie questioni formali riguardanti la normalizzazione etc, possiamo rappresentarlo con un'onda piana, p.es. progressiva lungo l'asse z: e^{ikz} . Il processo di scattering elastico consiste nel cambiamento di direzione casuale della particella incidente, la cui energia viene peraltro conservata. Di conseguenza, il fascio diffuso non ha una direzione particolare, mentre conserva il modulo del momento del fascio incidente. Quindi possiamo rappresentarlo con un'onda sferica, uscente dal centro di diffusione: e^{ikr}/r), la soluzione dell'equazione di Schrodinger, che rappresenta lo stato complessivo del sistema, sara', a grande distanza dal centro diffusore, una combinazione lineare dei due:*

$$\psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

La grandezza $f(\theta)$, che ha le dimensioni di una lunghezza, si chiama *ampiezza di scattering*. Possiamo ora trovare la sezione d'urto, differenziale e totale, per il processo di scattering descritto. La probabilita' per unita' di tempo che la particella diffonda nell'elemento di superficie $dS=r^2d\Omega$ e' data dal flusso per dS (ossia, mod. quadro dell'onda uscente per la velocita' per dS)

$$dP = v \frac{|f|^2}{r^2} dS = v |f|^2 d\Omega$$

Dividendo per v (flusso dell'onda incidente) si ha la sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = v \frac{|f|^2}{v} d\Omega = |f|^2 d\Omega \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$$

Si sottolinea ancora una volta come, nel caso quantistico, l'uso dei concetti di *probabilita'*, *flusso di probabilita'* etc sia inerente alla condizione dinamica dei sistemi microscopici. Quando si parla, a livello quantistico, di probabilita' di trovare un certo angolo di deflessione in conseguenza di una data collisione, si usa il termine in un contesto non deterministico: nel quadro concettuale della meccanica quantistica (in quella che si chiama l'interpretazione di Copenhagen), non c'e' alcun modo di predire la traiettoria del proiettile durante la collisione, *semplicemente perche' il concetto stesso di traiettoria e' inapplicabile a livello elementare* (relazioni di indeterminazione). Quindi, l'angolo di deflessione puo' essere predetto solo statisticamente, e la sezione d'urto differenziale rappresenta appunto la distribuzione statistica degli angoli di deflessione.

b. Onde parziali

La soluzione generale dell'eq. di Schrodinger in un potenziale centrale puo' scriversi, richiedendo simmetria assiale della soluzione rispetto all'asse z , direzione di propagazione del fascio incidente:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R_l(r) P_l(\cos \theta)$$

nella quale espressione non c'e' dipendenza da ϕ . Le funzioni angolari P_l sono i *polinomi di Legendre*; le funzioni radiali R_l sono soluzioni dell'eq. radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] R_l = 0$$

e hanno forma asintotica

$$R_l(r) \approx \frac{b_l}{r} \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l)$$

Lo sviluppo indicato sopra corrisponde ad analizzare lo stato di scattering in autostati del momento angolare orbitale, L . Quindi possiamo scrivere in generale

$$\begin{aligned} \psi &\approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r} \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) a_l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{kr} (2l+1) \sin(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l) P_l(\cos \theta) \\ \rightarrow \psi &\approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{iA_l}{2kr} (2l+1) \left\{ \exp\left[-i(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l)\right] - \exp\left[i(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta_l)\right] \right\} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

D'altra parte, l'onda piana si può scrivere, come è noto, nel limite asintotico:

$$e^{ikz} \approx \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{i(2l+1)}{2kr} P_l(\cos \theta) \left\{ \exp\left[-i(kr - l \frac{\pi}{2})\right] - \exp\left[i(kr - l \frac{\pi}{2})\right] \right\}$$

La differenza fra ψ e e^{ikz} deve quindi coincidere, asintoticamente, con l'onda sferica uscente; ponendo $A_l = i^l e^{i\delta_l}$ si trova per l'ampiezza di scattering:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

L'ampiezza di scattering è quindi completamente determinata dagli *sfasamenti* $\{\delta_l; l=0, \dots, \infty\}$, che sono a loro volta determinati dalla forma del potenziale centrale $U(r)$. Si vede dunque che il processo di scattering è descritto da un insieme (in linea di principio infinito) di *ampiezze parziali*, ognuna corrispondente a un valore particolare l di momento angolare orbitale; la ampiezza l -esima è data da

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1)$$

La sez. d'urto totale è allora data da:

$$\sigma = \int_{\Delta\Omega=4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f|^2 d\Omega$$

Sfruttando l'ortonormalità dei polinomi di Legendre, si trova così:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

che dimostra come la sez. d'urto totale sia scomponibile in una somma di sez. d'urto parziali, ognuna corrispondente ad un valore diverso di momento angolare orbitale. Si ottiene un importante corollario considerando l'ampiezza di scattering in avanti: tenuto conto che

$$P_l(\cos \theta = 1) = 1, \forall l$$

si puo' scrivere

$$f(\theta = 0) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1)$$

e quindi

$$\text{Im}[f(\theta = 0)] = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

In conclusione

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(\theta = 0)]$$

risultato noto come *Teorema Ottico*. Si noti che la presenza di interazioni ($\sigma \neq 0$) implica che l'ampiezza di scattering sia complessa ($\text{Im}(f) \neq 0$).

Sfasamento per lo "scattering" da una buca unidimensionale

Consideriamo per semplicita' lo scattering in una sola dimensione: in pratica, l'effetto dello scattering consiste in questo caso nel determinare un'onda piana riflessa e una trasmessa, in presenza del potenziale, entrambe lungo l'asse delle x (direzione dell'onda incidente). Avremo per ipotesi:

$$U = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases}$$

Il problema e' simile a quello di trovare gli stati stazionari del sistema, e si risolve con una tecnica analoga ; data l'unidimensionalita' del sistema, ci sara' un solo sfasamento δ . Considerando inizialmente il caso $U=0$, potremo scrivere, omettendo per comodita' la dipendenza da t :

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Imponendo $\psi=0$ per $x=0$ (barriera infinita),

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

dove il fattore $1/2i$ viene inserito per comodita' .

Se ora $U \neq 0$, dobbiamo distinguere due regioni dell'asse x :

Nella regione $x > a$ l'onda entrante rimarra' invariata ($-\frac{1}{2i}e^{-ikx}$), mentre l'onda uscente sara'

moltiplicata per un fattore, che indichiamo con $\frac{1}{2i}e^{2i\delta}$; quindi:

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} (e^{ikx+2i\delta} - e^{-ikx}) = e^{i\delta} \sin(kx + \delta), x > a$$

Nella regione $0 < x < a$, la funzione d'onda deve soddisfare alla condizione al contorno $\psi(0)=0$.
Quindi

$$\psi(x) = A \sin k' x, k' = \frac{\sqrt{2m(E+U_0)}}{\hbar}, 0 < x < a$$

Imponendo la continuita' di funzione e derivata prima in a , si trova :

$$\cot \delta = \frac{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k' a}{1 - \frac{k'}{k} \cot k' a \tan ka}$$

Data l'espressione di $\cot \delta$, si puo' calcolare il fattore

$$e^{2i\delta} = \frac{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k' a + i(1 - \frac{k'}{k} \cot k' a \tan ka)}{\tan ka + \frac{k'}{k} \cot k' a - i(1 - \frac{k'}{k} \cot k' a \tan ka)}$$

che e', come atteso, consistente con una pura fase.

c. Dipendenza dall'energia degli sfasamenti - Risonanze

E' interessante studiare l'andamento degli sfasamenti con l'energia, visto che esso finisce per determinare l'andamento delle sezioni d'urto parziali (e di quella totale) appunto con l'energia. L'andamento assume forme diverse a seconda delle caratteristiche del potenziale (p.es., per una buca quadrata: raggio e profondita', come dimostrato nelle seguenti due figure). Ci sono due risultati generali che vale la pena di menzionare:

1) Andamento delle fasi ad alta energia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_l(k) = 0$$

Questo si può capire tenendo conto che $\delta_l \approx U_0 \Delta t / \hbar$, essendo Δt il tempo speso nella regione con il potenziale U_0 ; questo tempo infatti tende a 0 quando l'energia è elevata

2) Andamento delle fasi a bassa energia

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta_l(k) = N\pi$$

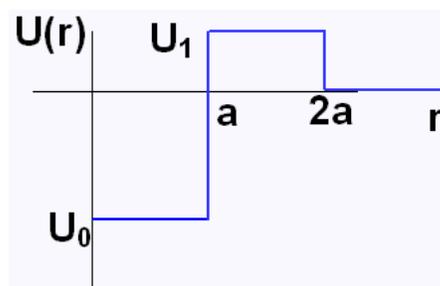
dove N è il numero di stati legati del potenziale (teorema di Levinson)

Si noti che il ritardo cui è soggetta la particella incidente nell'essere diffusa da un potenziale a buca non è, in generale, molto grande; si può dimostrare che in generale il ritardo è misurato approssimativamente dalla quantità'

$$2 \frac{d\delta}{dE} \hbar = \frac{\text{tempo di transito con } U=0}{a} \frac{d\delta}{dk}$$

che non ha valori elevati se l'andamento di δ con k è liscio e regolare.

Se tuttavia il potenziale ha caratteristiche un po' diverse, come quello indicato in figura, le cose possono diventare più interessanti: si può cercare una soluzione per la funzione d'onda dello stato di scattering in modo analogo a quanto fatto prima per la buca semplice, trovando le seguenti relazioni:

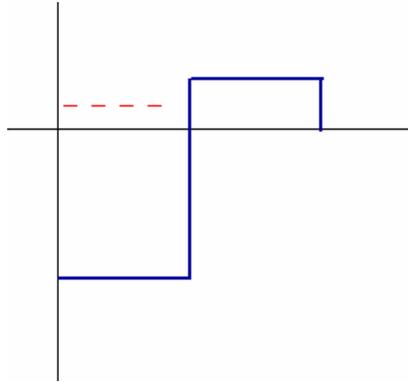


$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin k' x & 0 < x < a \\ B \sin k'' x + C \cos k'' x & a < x < 2a \\ e^{i\delta} \sin(kx + \delta) & x > 2a \end{cases}$$

Richiedendo la continuità di funzione e derivata prima in a e $2a$ si trovano le 4 incognite A, B, C e δ . Non si riportano le formule (intricate), ma la conclusione principale è che (per certe combinazioni di valori di U_0, U_1 e a) c'è un valore particolare dell'energia, attorno al quale

- a) lo sfasamento aumenta rapidamente di circa π , passando attraverso $\pi/2$
- b) il quadrato di f_i ha un massimo rilevato, e raggiunge il valore 1
- c) l'ampiezza dell'onda all'interno della buca ha un massimo rilevato
- d) la quantità $d\delta/dk$, e quindi il ritardo, hanno un massimo rilevato

Le ultime due proprietà (ossia: localizzazione della particella incidente entro la buca per un tempo lungo) fanno rassomigliare lo stato di scattering di cui ci occupiamo a uno stato ~stazionario di un sistema legato. In effetti, si consideri il caso in cui il potenziale descritto prima comporti la presenza di livelli "quasi legati" come quello mostrato in figura:



E' plausibile che uno stato corrispondente al livello mostrato si comporti in modo simile a quello di uno stato stazionario: in effetti, lo stato sarebbe stazionario se non fosse per il tunneling attraverso la barriera di potenziale.

Senza ora restringerci al caso particolare esemplificato prima, possiamo vedere come tutte le proprietà derivino dalla prima: in effetti, l'andamento di $\delta(k)$ può essere approssimato nell'intorno di $k=\alpha$ con $\delta \approx \arctan \frac{\beta}{\alpha-k}$, che ha lo stesso sviluppo di Taylor

fino al I ordine, essendo $\frac{1}{\beta} = \frac{d\delta}{dk} \Big|_{k=\alpha}$. Allora segue:

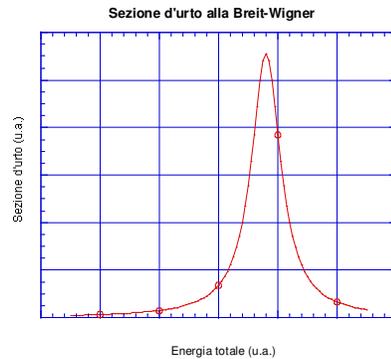
$$e^{2i\delta} = \frac{1+i \tan \delta}{1-i \tan \delta} = \frac{k-\alpha-i\beta}{k-\alpha+i\beta}$$

$$\rightarrow f = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2} = \frac{1}{2} \frac{k-\alpha-i\beta-1}{k-\alpha+i\beta}$$

Si può scrivere l'espressione in termini dell'energia E , invece che del numero d'onda k , ponendo $E_\alpha = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m}$, $E - E_\alpha \approx (k-\alpha) \frac{\alpha \hbar^2}{m}$; si ha allora con $\Gamma = \frac{2\alpha \hbar^2 \beta}{m}$:

$$|f|^2 = \sin^2 \delta = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_\alpha)^2 + \Gamma^2/4},$$

formula nota come *risonanza alla Breit-Wigner* (vedi figura).



La proprietà b) e' quindi verificata. Le proprietà c) e d) possono essere similmente verificate.

In conclusione, particolari tipi di potenziale possono dare luogo a stati di scattering che hanno proprietà analoghe agli stati stazionari di un sistema legato (confinamento spaziale della funzione d'onda, vita media elevata per la risonanza); in queste condizioni, gli stati risonanti possono, entro certi limiti, venir trattati come se fossero stati legati (p.es., ad essi possono essere attribuiti numeri quantici etc). Gli stati legati, anzi, possono essere considerati come casi limite degli stati risonanti (per i quali la probabilità di trovare i costituenti del sistema a distanza infinita $\rightarrow 0$, e la vita media $\rightarrow \infty$).

Si può notare come la proprietà di presentare stati risonanti, come quello discusso prima, compare qui come caratteristica di certe configurazioni di potenziale; ma in effetti, che il sistema sia descrivibile o no tramite un potenziale, la proprietà di presentare "picchi" nella sezione d'urto e' matematicamente legata solo alla struttura "risonante" dell'ampiezza di scattering in una data onda parziale, struttura che si evidenzia, nell'approssimazione più semplice, nella forma alla Breit-Wigner dell'ampiezza stessa nei dintorni (larghezza Γ) dell'energia di risonanza (E_0):

$$A \propto \frac{\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma}$$

In tutti i casi in cui l'ampiezza di scattering presenta questa caratteristica (il che avviene talvolta anche per fenomeni relativistici di creazione/distruzione di particelle, descritti con il formalismo della teoria dei campi) ci si attende un comportamento risonante ("picco") della sezione d'urto.

3. Scattering come perturbazione; ampiezza di transizione

Un approccio alternativo, e complessivamente più generale e soddisfacente, al trattamento dei problemi di scattering in meccanica quantistica e' quello in cui si tiene

conto esplicitamente del carattere transitorio del processo. In questo senso, l'interazione fra le due particelle viene considerata come una *perturbazione* all' Hamiltoniano imperturbato.

a. Richiamo su perturbazioni dipendenti dal tempo; serie di Dyson

Giova richiamare qui i principali risultati della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, nella forma piu' adatta agli scopi interessanti la descrizione delle interazioni fra particelle elementari: la ragione di questo richiamo e' che la trattazione normalmente svolta nei corsi introduttivi di meccanica quantistica non e' di solito presentata nella forma piu' conveniente per introdurre la matrice S.

Evoluzione temporale

Si considerano inizialmente due descrizioni, o rappresentazioni, dell'evoluzione temporale di stati e osservabili per un sistema preparato all'istante t_0 nello stato $|\psi(t_0)\rangle$:

Schrodinger:

gli stati evolvono, gli operatori no

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_S &= U_F(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ U_F(t, t_0) &= e^{-iH(t-t_0)} \quad H \text{ hamiltoniano full} \\ O_S(t) &= O(t_0) \end{aligned}$$

Heisenberg:

gli stati non evolvono, gli operatori si'

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_H &= |\psi(t_0)\rangle \\ U_F(t, t_0) &= e^{-iH(t-t_0)} \quad H \text{ hamiltoniano full} \\ O_H(t) &= U_F(t, t_0)^\dagger O(t_0) U_F(t, t_0) \end{aligned}$$

Le due descrizioni sono equivalenti perche', come e' evidente, forniscono gli stessi elementi di matrice, che sono le quantita' misurabili

Rappresentazione di interazione, o di Dirac

Si consideri un hamiltoniano che si possa scrivere nella forma:

$$H = H_0 + H'$$

in cui H' e' la perturbazione. La descrizione di interazione e' definita da

$$|\psi(t)\rangle_I = U_0(t, t_0)^\dagger U_F(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \equiv U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} \quad H_0 \text{ hamiltoniano imperturbato}$$

$$O_I(t) = U_0(t, t_0)^\dagger O(t_0) U_0(t, t_0)$$

Si puo' quindi dire che in questa descrizione le osservabili evolvono secondo H_0 , mentre gli stati evolvono secondo H' ; anche in questo caso gli elementi di matrice non cambiano. Occorre ora trovare le equazioni del moto per stati e operatori in questa descrizione. A questo scopo, si consideri la definizione dello stato nella rappresentazione di interazione

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_S &= e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I \rightarrow |\psi(t)\rangle_I = e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \\ \rightarrow \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} &= iH_0 e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S + e^{+iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} \\ \rightarrow e^{+iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} - iH_0 e^{+iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \\ \rightarrow \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} - iH_0 |\psi(t)\rangle_S \\ \rightarrow i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} + H_0 |\psi(t)\rangle_S \end{aligned}$$

Ricordando l'equazione di Schrodinger:

$$i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_S}{\partial t} = (H_0 + H') |\psi(t)\rangle_S$$

troviamo:

$$\begin{aligned} (H_0 + H') |\psi(t)\rangle_S &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} + H_0 |\psi(t)\rangle_S \\ \rightarrow H' |\psi(t)\rangle_S &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\ \rightarrow H' e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I &= i e^{-iH_0 t} \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\ \rightarrow \underbrace{e^{+iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}}_{H'_I} |\psi(t)\rangle_I &= i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \end{aligned}$$

Quindi nella rappresentazione di interazione gli stati evolvono secondo un'eq. di Schrodinger in cui l'hamiltoniano e' ridotto alla sola perturbazione. Per altro, le osservabili evolvono secondo un'eq. di Heisenberg in cui l'hamiltoniano e' ridotto alla sola parte imperturbata:

$$\frac{dA_I}{dt} = -i[A_I, H_0] \quad A \text{ non dipendente esplicitamente dal tempo}$$

Serie di Dyson

Trovare un'espressione esplicita per l'operatore di evoluzione temporale e' di solito impossibile, tuttavia e' spesso sufficiente trovare per esso uno sviluppo perturbativo. L'equazione che descrive l'evoluzione temporale nella rapp. interazione

$$H_I |\psi(t)\rangle_I = i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t}$$

puo' essere riscritta in termini dell'operatore di evoluzione temporale in quella stessa descrizione

$$U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I = |\psi(t)\rangle_I$$

come:

$$\begin{aligned} H_I |\psi(t)\rangle_I &= i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} \\ i \frac{\partial |\psi(t)\rangle_I}{\partial t} &= i \frac{\partial (U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I)}{\partial t} \\ |\psi(t)\rangle_I &= U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \\ \rightarrow i \frac{\partial (U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I)}{\partial t} &= H' U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \\ \rightarrow i \frac{\partial (U_I(t, t_0))}{\partial t} &= H' U_I(t, t_0) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un'eq. differenziale per l'operatore U_I , con la "condizione iniziale"

$$U_I(t, t_0) \Big|_{t=t_0} = 1$$

L'equazione trovata sopra puo' essere trasformata in un'equazione integrale, eseguendo formalmente l'integrazione e tenendo conto della condizione iniziale:

$$dU_I = -iH'U_I dt$$

$$\rightarrow U_I(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H' U_I(t', t_0) dt'$$

L'integrazione e' formale perche' l'integrando contiene l'operatore incognito. L'equazione integrale non e' piu' facile da risolvere di quella differenziale, ma si presta meglio a definire lo sviluppo perturbativo, che in effetti si puo' scrivere sotto forma di serie nel seguente modo:

Ordine 0: si prende *nell'integrale* $U_I(t', 0) = 0$
 $\rightarrow U_I^{(0)}(t, t_0) = 1$

Ordine 1: si prende *nell'integrale* $U_I(t', t_0) = U_I^{(0)}(t', t_0) = 1$
 $\rightarrow U_I^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt_1 H'(t_1)$

Ordine 2: si prende *nell'integrale* $U_I(t', t_0) = -i \int_{t_0}^{t'} dt_1 H'(t_1)$
 $\rightarrow U_I^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_2 H'(t_2) \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H'(t_1)$

.....
 etc

L'operatore completo e' la somma di tutti i termini dello sviluppo (ammesso che la serie converga):

$$U_I(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t_0)$$

Quello appena ricavato e' lo sviluppo *in serie di Dyson (o di Born)* dell'operatore di evoluzione temporale.

Sempre restando per il momento nell'ambito dei problemi di scattering da potenziale, il processo individuale di scattering viene ora descritto come conseguente ad una perturbazione dipendente dal tempo, semplicemente perche' la durata dell'interazione fra particella e potenziale che ha l'effetto di modificare la direzione di moto della particella, e' limitata nel tempo.

b. Ampiezza di transizione; diagrammi di Feynman

La quantità centrale nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo e' l' *ampiezza di transizione*; nel caso di processi di scattering, dovremo poi considerare il limite dell'ampiezza di transizione considerando (quando e' possibile) gli stati asintotici del sistema, ossia gli stati nel lontano passato e lontano futuro rispetto all'intervallo di tempo in cui proiettile e bersaglio interagiscono.

Se prendiamo l'espressione dell'operatore di evoluzione temporale, possiamo riesprimerlo nella descrizione si Schrodinger invece che in quella di interazione:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle_I &= U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle = e^{iH_0 t} |\psi_S(t_0)\rangle \\
 &= e^{iH_0 t} U_S(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle \\
 &= e^{iH_0 t} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0} |\psi_I(t_0)\rangle \\
 \rightarrow U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle &= e^{iH_0 t} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0} |\psi_I(t_0)\rangle \\
 \rightarrow U_I(t, t_0) &= e^{iH_0 t} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0} \\
 \rightarrow U_S(t, t_0) &= e^{-iH_0 t} U_I(t, t_0) e^{iH_0 t_0}
 \end{aligned}$$

Lo scopo di questo cambiamento di rappresentazione e' quello di facilitare il calcolo dei termini dello sviluppo perturbativo, che si esegue calcolando elementi di matrice della perturbazione fra autostati dell'hamiltoniano imperturbato.

Riprendendo lo sviluppo perturbativo di U , potremo scriverlo nella nuova rappresentazione:

$$\begin{aligned}
 U_S(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iH_0 t} U_I^{(n)}(t, t_0) e^{iH_0 t_0} = \sum_{n=0}^{\infty} U_S^{(n)}(t, t_0) \\
 U_S^{(0)}(t, t_0) &= e^{-iH_0(t-t_0)} \\
 U_S^{(1)}(t, t_0) &= -i \int_{t_0}^t dt_1 e^{-iH_0(t-t_1)} H'(t_1) e^{-iH_0(t_1-t_0)} \\
 U_S^{(2)}(t, t_0) &= -i \int_{t_0}^t dt_1 \left(e^{-iH_0(t-t_1)} H'(t_1) e^{-iH_0(t_1-t_0)} \int_{t_0}^{t_1} dt_2 e^{-iH_0(t_1-t_0)} H'(t_2) e^{-iH_0(t_2-t_0)} \right) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Definiamo ora l'ampiezza di transizione da uno stato iniziale, al tempo $t=t_0$, a uno finale al tempo t , nel modo piu' semplice come la proiezione dello stato evoluto da quello iniziale su quello finale:

$$A_{fi}(t, t_0) = \langle f | U_S(t, t_0) | i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_{fi}^{(n)}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f | U_S^{(n)}(t, t_0) | i \rangle$$

Se assumiamo che H' sia indipendente dal tempo, abbiamo allora per i primi termini dello sviluppo perturbativo:

$$A_{fi}^{(0)} = \langle f | i \rangle e^{-iE_i(t-t_0)}$$

$$\begin{aligned} A_{fi}^{(1)} &= -i \int_{t_0}^t dt_1 e^{-iE_f(t-t_1)} \langle f | H' | i \rangle e^{-iE_i(t_1-t_0)} \\ &= \frac{\left(e^{-iE_i(t-t_0)} - e^{-iE_f(t-t_0)} \right)}{(E_f - E_i)} \langle f | H' | i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{fi}^{(2)} &= (-i)^2 \sum_a \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 e^{-iE_f(t-t_2)} \langle f | H' | a \rangle e^{-iE_a(t_2-t_1)} \langle a | H' | i \rangle e^{-iE_i(t_1-t_0)} \\ &= (-i)^2 e^{-i(E_f t - E_i t_0)} i \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_a - E_i} \left[\frac{\left(e^{i(E_f - E_a)(t-t_0)} - 1 \right)}{E_f - E_a} e^{i[(E_f - E_a) + (E_f - E_i)]t_0} - \frac{\left(e^{i(E_f - E_i)t} - e^{i(E_f - E_i)t_0} \right)}{E_f - E_i} \right] \end{aligned}$$

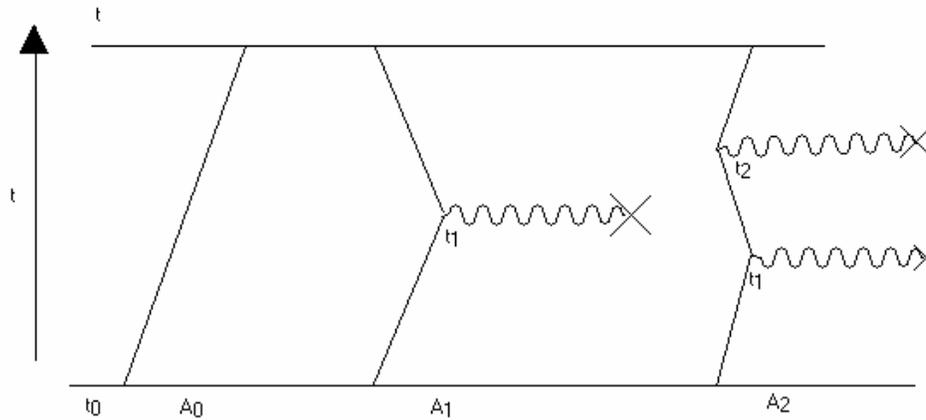
Formalmente, il termine di ordine 2 nella forma indicata si ottiene nel modo seguente: si inserisce una somma sull'insieme (completo) di autostati di H_0 , $\{|a\rangle, a=1,2,\dots\}$, fra l'argomento dell'integrale esterno e l'integrale interno; essendo l'insieme completo, la somma coincide con l'operatore identità, quindi questo è consentito.

Il termine di ordine 0 dello sviluppo dell'ampiezza di transizione rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale fra gli istanti t_0 e t , senza scambio di energia con l'interazione.

Il termine di ordine 1 rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale dall'istante t_0 fino all'istante t_1 , in cui avviene uno scambio di energia con l'interazione che lascia il sistema nello stato finale; lo stato finale evolve poi liberamente fino all'istante t . L'ampiezza al I ordine si ottiene sommando tutti i possibili contributi, provenienti da scambi ("vertici") che avvengono ad ogni istante fra 0 e t_1 .

L'ampiezza di ordine 2 rappresenta l'evoluzione libera dello stato iniziale dall'istante t_0 fino all'istante t_2 , in cui avviene uno scambio di energia con l'interazione; tale scambio lascia in questo caso il sistema in uno stato intermedio a , che evolve a suo volta liberamente fra t_1 e t_2 ; all'istante t_2 c'è un secondo scambio con l'interazione, il cui risultato è quello di lasciare il sistema nello stato finale, che poi evolve al solito liberamente fino all'istante t . In questo caso, oltre a sommare (leggi: integrare) su tutti i possibili istanti per i vertici, t_1 e t_2 , si presenta la necessità di sommare anche su tutti i possibili stati intermedi a , in cui il sistema può essere lasciato dal primo vertice. E così via a tutti gli ordini perturbativi...

Di questo sviluppo perturbativo dell'ampiezza di transizione si puo' dare una visualizzazione grafica in termini di *diagrammi di Feynman*, nella loro versione non relativistica:



Riassumendo, ad ogni ordine perturbativo, il sistema evolve liberamente, secondo l'hamiltoniano imperturbato H_0 , fra *vertici*, nei quali interagisce con la perturbazione H' .

4. Matrice S; regola d'oro

Il caso esaminato sopra dello scattering da potenziale non e' particolarmente interessante per le applicazioni relativistiche, nelle quali oltre al processo elastico possono avvenire, in conseguenza all'equivalenza massa-energia, molti diversi tipi di reazioni, con creazione e distruzione di particelle. Mentre e' possibile, in una certa misura, rendere conto in modo globale dei processi anelastici competitivi tramite l'introduzione di potenziali e sfasamenti complessi (assorbitivi), tale approccio non e' molto utile per descrivere con dettaglio cio' che avviene in generale in una reazione ad alta energia fra particelle elementari. Processi che coinvolgono creazione e distruzione di particelle richiedono, per essere descritti in maniera completa e soddisfacente, l'uso di concetti e tecniche propri della teoria dei campi, attraverso i quali e' possibile trattare l'evoluzione di sistemi fisici a numero infinito di gradi di liberta', e a numero variabile di particelle; ed e' proprio all'interno della teoria quantistica dei campi che si puo' sviluppare una descrizione potente e generale per le interazioni fra particelle elementari, nota come teoria della *matrice di scattering*, o *matrice S*. Nel rinviare quindi ai corsi e ai testi di teoria dei campi per una trattazione esauriente, qui di seguito si accenna all'argomento per sommi capi, limitandosi ad alcuni risultati di interesse per cio' che seguira'.

a. Matrice S

La definizione di ampiezza di transizione per un intervallo temporale finito, vista sopra, puo' essere estesa al caso, piu' interessante per lo studio dei processi di scattering, di un intervallo infinito. Possiamo cosi' definire un nuovo operatore, che ha importanza centrale nella descrizione matematica di qualsiasi processo di scattering: la *matrice S*, o di scattering appunto.

Il sistema si considera non interagente con la perturbazione a tempi lunghi nel passato e nel futuro. I suoi stati asintotici saranno allora descrivibili come:

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle &= |\psi_f\rangle e^{-iE_f t} \\ |\psi^-\rangle &= |\psi_i\rangle e^{-iE_i t_0} \end{aligned}$$

$|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$ sono autostati di H_0 , indipendenti dal tempo. In senso perturbativo, possiamo scambiare (forzando un bel po' la matematica...) il simbolo di limite con quello di serie, e scrivere:

$$S_{fi} = \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{fi}^{(n)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} A_{fi}^{(n)}(t-t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{fi}^{(n)}$$

I primi termini si trovano allora come:

$$S_{fi}^{(0)} = \langle f|i \rangle = \delta_{fi}$$

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} \frac{(e^{-iE_i(t-t_0)} - e^{-iE_f(t-t_0)})}{(E_f - E_i)} \langle f|H|i \rangle \\ &= -i(2\pi)\delta(E_i - E_f) \langle f|H|i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} (-i)^2 e^{-i(E_f t - E_i t_0)} i \sum_a \frac{\langle f|H|a \rangle \langle a|H|i \rangle}{E_a - E_i} \left[\frac{(e^{i(E_f - E_a)(t-t_0)} - 1)}{E_f - E_a} e^{i[(E_f - E_a) + (E_f - E_i)]t_0} - \frac{(e^{i(E_f - E_i)t} - e^{i(E_f - E_i)t_0})}{E_f - E_i} \right] \\ &= (-i)^2 (2\pi) i \delta(E_i - E_f) \sum_a \frac{\langle f|H|a \rangle \langle a|H|i \rangle}{(E_a - E_i)} \end{aligned}$$

.....

I limiti indicati portano alla comparsa della funzione δ che conserva l'energia, nell'espressione degli elementi della matrice S; la somma sugli stati intermedi deve essere intesa in senso generico, ad indicare eventualmente anche integrazione sui gradi di liberta' continui.

Se la serie si potesse/sapesse sommare (cosa raramente ovvia/possibile) il risultato si potrebbe scrivere come

$$S_{fi} \equiv \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi}$$

T e' la *matrice di transizione*, i cui elementi, fra coppie di stati imperturbati, rappresentano ciascuno la somma (in principio infinita) delle ampiezze per lo scambio di $1, 2, \dots, n, \dots$ quanti fra sistema imperturbato e perturbazione. L'espressione generale per la matrice T e' quindi la seguente:

$$T_{fi} = \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{(E_a - E_i)} + \dots$$

Riassumendo, lo sviluppo perturbativo dell'ampiezza di transizione fornisce una serie di termini, in ognuno dei quali compaiono gli elementi di matrice della perturbazione fra stati imperturbati (iniziale, finale, o intermedio).

La forma assunta dalla serie, basata sul formalismo generale della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, suggerisce come accennato sopra un'interpretazione fisica particolarmente suggestiva: essa e' basata sulla presenza degli *stati intermedi*, che compaiono negli ordini superiori al primo dello sviluppo perturbativo per l'ampiezza di transizione. Come si ricordera', tali stati, che vengono anche comunemente chiamati *stati virtuali*, compaiono come "stazioni" di partenza e arrivo per transizioni interne al processo, che puo' essere appunto immaginato come una sequenza di transizioni, al limite infinita se si considerano tutti gli ordini della serie perturbativa, in ognuna delle quali il sistema, inizialmente in uno stato imperturbato, scambia energia con il potenziale della perturbazione.

Si noti che ad ogni "interazione" intermedia il sistema non conserva l'energia, che viene invece globalmente conservata grazie alla presenza della funzione $\delta(E-E')$ a fattore; formalmente questo fatto puo' venir fatto risalire alla relazione di indeterminazione tempo-energia, in considerazione dell'incertezza essenziale sull'istante di interazione per ogni transizione interna. Nel caso di un processo di scattering fra particelle, ad ogni vertice viene invece conservato l'impulso, in accordo con l'invarianza per traslazioni spaziali che si puo' normalmente assumere per un sistema isolato. Si noti altresì che questo non avviene nel caso in cui si consideri invece un'interazione (evidentemente non covariante) con un potenziale statico, caso in cui, fra l'altro, l'impulso non viene conservato neppure globalmente.

Ci si puo' chiedere come si inserisca il formalismo dello sviluppo in onde parziali, ricordato all'inizio, nel quadro generale del formalismo della matrice S : restringendosi per semplicita' al caso di particelle prive di spin, si puo' subito dire che se l'hamiltoniano di interazione e' invariante per rotazioni, la matrice S commuta con l'operatore momento angolare orbitale L . Si puo' aggiungere che S commuta

anche con l'hamiltoniano imperturbato H_0 (dimostrazione non difficile, anche se un po' intricata). L'insieme dei tre operatori L^2 , L_z ed H_0 costituisce un'osservabile massima per il sistema; di conseguenza si puo' costruire una base di stati definiti dagli autovalori di H_0 , L^2 , L_z nella quale S e' una matrice diagonale: definiamo

$$s_l \equiv \langle E', l', m' | S | E, l, m \rangle = \delta(E - E') \delta_{ll'} \delta_{mm'} e^{2i\delta_l}$$

nella quale espressione l'ultimo fattore deriva dal fatto che, essendo S unitaria, i suoi elementi hanno modulo = 1. Se ora partiamo dall'espressione della matrice S :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \\ \rightarrow S_{fi} - 1 &= -2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \end{aligned}$$

possiamo sviluppare $S-1$ in autostati di H_0 , L^2 , L_z . Scegliendo la direzione di incidenza lungo l'asse z , troviamo, senza troppe difficolta', introducendo l'ampiezza di scattering $f(E, \theta)$:

$$\begin{aligned} f(E, \theta) &\equiv -(2\pi)^2 m T_{fi} \\ \rightarrow f(E, \theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(s_l - 1) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

che riproduce quella trovata originariamente.

Nel caso semplice dello scattering da potenziale, dunque, la matrice S si puo' scrivere:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} = \delta_{fi} + \frac{2\pi}{(2\pi)^2 m} i \delta(E_f - E_i) f(E, \theta) \\ \rightarrow S_{fi} &= \delta_{fi} + \frac{2\pi}{(2\pi)^2 m} i \delta(E_f - E_i) \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(s_l - 1) P_l(\cos \theta) \\ \rightarrow S_{fi} - 1 &= \frac{i}{2\pi m} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \underbrace{\frac{(e^{2i\delta_l} - 1)}{2ik}}_{=f_l} P_l(\cos \theta) \delta(E_f - E_i) \end{aligned}$$

Il contenuto essenziale dell'espressione precedente risiede nell'insieme delle ampiezze parziali f_l , quantita' funzioni dell'energia. Riassumendo in breve una lunga serie di risultati, trovati inizialmente per il caso dello scattering da potenziale ed in seguito estesi in vario modo, e piu' o meno arbitrariamente, a quello di interazioni qualsiasi, si puo' dire che:

- Risulta conveniente considerare le quantita' f_l come funzioni dell'energia o dell'impulso nel campo complesso
- Di conseguenza, anche la matrice S deve essere considerata come una funzione dell'energia o dell'impulso come variabili complesse

- L'insieme delle ampiezze parziali si può considerare come una funzione dell'energia (complessa) e del momento angolare (intero ≥ 0); è possibile estendere il campo di definizione delle ampiezze, considerandole come funzioni di l in quanto variabile complessa. Si ottiene in questo modo *la rappresentazione di Regge* dell'ampiezza di scattering
- Le proprietà del sistema fisico sono riflesse nelle caratteristiche delle funzioni f_l :

I *poli reali* di una data ampiezza parziale possono corrispondere a *stati legati* per il sistema. Questo avviene se l'impulso è puramente immaginario, e se inoltre $Im(p) > 0$; si osservi infatti che

$$E = \frac{p^2}{2m} < 0 \text{ quando } p \text{ è immaginario}$$

Quindi in termini di energia questi poli si trovano sul semiasse $E < 0$, come atteso per uno stato legato.

Se $Im(p) < 0$ si ha uno *stato virtuale*: il significato preciso di questa espressione, difficile da rendere in breve, ha a che fare con il comportamento della sezione d'urto totale a bassa energia. Si noti che, tecnicamente, questo specifico senso dell'espressione stato virtuale non ha nulla a che fare con l'uso della stessa espressione per indicare stati intermedi in una transizione.

Quando l'ampiezza parziale ha un *polo complesso* E_R nel piano dell'energia, e vale $Im(E_R) < 0$, esso corrisponde all'esistenza di uno *stato risonante*.

Occorre a questo punto tentare di dare un senso fisico a queste proprietà matematiche:

Questo modo di vedere si può estendere abbastanza facilmente al caso relativistico, in cui acquista un significato molto importante, visto che gli *stati virtuali* possono a tutti gli effetti essere considerati *particelle virtuali*, il cui ruolo è completamente analogo a quello delle particelle reali.

b. Regola d'oro

Riprendendo l'espressione per la matrice S , e arrestandosi al I ordine perturbativo per la matrice T , otteniamo la seguente espressione:

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle$$

che, inserita nell'espressione di S , dà:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \underbrace{\langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle}_{M_{fi}} \delta(E_f - E_i)$$

Se ora riprendiamo l'espressione per l'ampiezza di transizione, possiamo considerarne il modulo quadro, corrispondente alla *probabilità di transizione* dallo stato iniziale a quello finale; prendendo in successione i vari termini dello sviluppo perturbativo (ad esclusione di quello di ordine 0, che rappresenta l'assenza di transizioni):

$$\begin{aligned}
 A_{fi}^{(1)} &= \frac{\left(e^{-iE_i(t-t_0)} - e^{-iE_f(t-t_0)} \right)}{(E_f - E_i)} \langle f | H | i \rangle \\
 \rightarrow |A_{fi}^{(1)}|^2 &= \left| \frac{\left(e^{-iE_i(t-t_0)} - e^{-iE_f(t-t_0)} \right)}{(E_f - E_i)} \right|^2 |\langle f | H | i \rangle|^2 \\
 &= |\langle f | H | i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{E_f - E_i}{2} (t - t_0) \right]}{\left(\frac{E_f - E_i}{2} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Il limite di questa espressione per $(t-t_0) \rightarrow \infty$ e', per definizione, la probabilità di transizione (al I ordine!) fra gli stati asintotici (liberi) $|i\rangle, |f\rangle$. Il limite si trova essere:

$$\begin{aligned}
 W_{fi} &= \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} |\langle f | H | i \rangle|^2 \frac{\sin^2 \left[\frac{E_f - E_i}{2} (t - t_0) \right]}{\left(\frac{E_f - E_i}{2} \right)^2} \\
 &= 2\pi (t - t_0) |\langle f | H | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)
 \end{aligned}$$

Brevemente, il limite suddetto viene fuori così: si consideri la rappresentazione della δ :

$$\delta(\omega) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega u}{\pi \omega}$$

Allora si ha il limite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}u\right)}{\pi \frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}u\right)}{\frac{\omega}{2}u} = \delta\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\delta(\omega)$$

$$\rightarrow \lim_{(t-t_0) \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left[\frac{E_f - E_i}{2}(t-t_0)\right]}{\left(\frac{E_f - E_i}{2}\right)^2} = 2\pi(t-t_0)\delta(E_f - E_i)$$

Se consideriamo ora la *probabilità di transizione per unità di tempo*, troviamo:

$$w_{fi} = 2\pi |\langle f | H' | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$

La probabilità di transizione si può trovare, come visto sopra, facendo il limite del modulo quadro del II termine di A_{fi} quella che segue e' invece una discussione un po' piu' estesa del calcolo di questa quantità direttamente da S_{fi} .

Nel calcolo, fatto direttamente dall'elemento della matrice S , compare il quadrato di una δ quantità difficile da interpretare. Si può cavarsela in modo non rigoroso in questo modo, dovuto a Fermi: si prende una delle rappresentazioni limite delle δ :

$$\delta(E_f - E_i) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt$$

Se ora, invece della prob. di transizione $|M|^2$, si considera la prob. di transizione per unità di tempo si ha:

$$w_{fi} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{|M_{fi}|^2}{\tau} = 2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt$$

$$\rightarrow w_{fi} = 2\pi |\langle f | H' | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$

dove l'ultimo passaggio viene dalla presenza della prima δ , che fissa $E_f - E_i = 0$.

c. Ordini perturbativi superiori al primo

Il calcolo della probabilità di transizione per unità di tempo ad ordini perturbativi superiori al primo e' abbastanza complicato, e non può essere richiamato qui in dettaglio. E' tuttavia importante cogliere almeno i risultati essenziali, perché e' solo agli ordini perturbativi superiori al primo che compaiono i "denominatori" che giocano un

ruolo essenziale nelle estensioni relativistiche del formalismo. Al secondo ordine perturbativo, la probabilita' di transizione per unita' di tempo si scrive:

$$w_{fi} = 2\pi \left| \langle f | H' | i \rangle + \sum_a \frac{\langle f | H' | a \rangle \langle a | H' | i \rangle}{E_i^{(0)} - E_a^{(0)}} \right|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Nell'espressione citata, la somma e' da intendersi in senso esteso, quindi come un integrale sugli eventuali gradi di liberta' continui; le energie a denominatore sono quelle degli stati iniziale e intermedio (generico), e si assume che anche il numeratore si annulli quando si annulla il denominatore. Questo punto e' in realta' delicato, e richiede una discussione piu' approfondita: per lo scopo che vogliamo raggiungere, possiamo assumere che la condizione non si verifichi.

Le espressioni della probabilita' di transizione per unita' di tempo trovate prima, per quanto plausibili e ragionevoli, hanno il difetto di essere divergenti, a causa della presenza della funzione delta: in realta', il problema e' solo apparente, come risulta dalle seguenti considerazioni:

- la prob. di transizione per unita' di tempo scritta sopra e' fra lo stato i e lo stato f , che sono stati fin qui specificati solo dalle loro energie
- tuttavia, fissare E_f non fissa, in generale, in maniera univoca lo stato finale: esiste cioe' in generale una molteplicita' di stati finali (degeneri) corrispondenti a una data energia; questa molteplicita' e' una funzione dell'energia
- per una data energia dello stato finale, si puo' sempre determinare la densita' di configurazioni di stato finale/intervallo di energia (chiamata colloquialmente la densita' degli stati finali per intervallo di energia)

$$\rho(E_f) = \left. \frac{dn}{dE} \right|_{E=E_f}$$

che non e' altro che l'incremento del numero di stati accessibili alla energia finale per incremento dell'energia stessa, calcolato per $E=E_f$

- quindi, in ogni caso concreto siamo interessati piuttosto alla probabilita' di transizione per unita' di tempo verso un gruppo di stati finali, tutti con energia E_f
- la prob. di transizione verso un gruppo di stati finali si ottiene, evidentemente, sommando w_{fi} su tutti gli stati finali che si considerano
- in pratica, occorre eseguire la somma su TUTTI o PARTE degli stati che corrispondono ad ogni dato valore di energia; normalmente e' possibile approssimare la somma con un integrale

$$\sum_n \dots \rightarrow \int \dots dn$$

- o Allora, la somma delle w_{fi} sugli stati finali con energia E_f si scrive

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_n w_{fi} = \int_{\text{molteplicita'}} 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) dn \\
 &= \int_{\text{energia finale}} 2\pi |\langle f | V | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{dn}{dE_f} dE_f \\
 &\rightarrow W = 2\pi |\langle f | V | i \rangle|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_f=E_i}
 \end{aligned}$$

il che mostra che la divergenza dell'espressione e' solo apparente

Si possono fare un paio di esempi per chiarire il significato del fattore densita' degli stati.

A) Atomo di idrogeno in un "condensatore"

Si consideri un atomo di idrogeno nello stato fondamentale, posto all'interno di un grande condensatore piano, collegato ad un generatore di tensione alternata ad alta frequenza ω . Questo modo di descrivere la situazione e' in realta' una semplificazione dell'interazione dell'atomo con un'onda piana.

Se E_I e' l'energia di ionizzazione dell'atomo, possono presentarsi 2 situazioni:

- $\hbar\omega < E_I$ In questo caso l'atomo non puo' essere ionizzato, e quel che si puo' calcolare e' l'ampiezza di transizione fra lo stato fondamentale e uno degli stati eccitati, che appartengono ad un insieme discreto. L'espressione per l'elemento di matrice di transizione al I ordine in questo caso si scrive:

$$T_{fi} = \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle$$

Essendo l'ampiezza di transizione al I ordine data da

$$\begin{aligned}
 A_{fi}^{(1)}(t) &= (-i) \int_{-\infty}^t \langle \psi_f | H'(t') | \psi_i \rangle e^{i\omega_{if}t'} dt' \\
 \omega_{if} &= E_i - E_f
 \end{aligned}$$

specifichiamo l'hamiltoniano di interazione come

$$\langle \psi_f | H'(t) | \psi_i \rangle = 2 \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \sin \omega t$$

Risulta in questo caso, se il generatore e' acceso all'istante $t=0$ e spento all'istante $t=t_0$

$$\begin{aligned}
A_f^{(1)}(t > t_0) &= -i \int_0^{t_0} 2 \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \sin \omega t' e^{i\omega_f t'} dt' \\
&= -i \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \left[\frac{e^{i(\omega_f + \omega)t_0} - 1}{\omega_f + \omega} - \frac{e^{i(\omega_f - \omega)t_0} - 1}{\omega_f - \omega} \right]
\end{aligned}$$

Se $E_f - E_i > 0$, solo il II termine e' importante, e la probabilita' di transizione da $|\psi_i\rangle$ a $|\psi_f\rangle$ e':

$$\left| A_f^{(1)}(t > t_0) \right|^2 = 4 \left| \langle \psi_f | H' | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_f - \omega)t_0}{(\omega_f - \omega)^2}$$

In questo caso, in cui lo stato finale appartiene ad un insieme discreto, la probabilita' di transizione oscilla nel tempo, in funzione della durata della perturbazione, con la *frequenza di battimento* (differenza fra la frequenza della perturbazione e quella naturale della transizione).

b. $\hbar\omega > E_i$ In questo caso l'atomo puo' venire ionizzato, e lo stato finale appartiene ad un insieme continuo, a causa dei gradi di liberta' continui per l'elettrone staccato dal protone. Possiamo nondimeno ricondurci a un caso semi-discreto se immaginiamo di racchiudere il sistema in un grande volume cubico, di lato L . In esso gli stati di impulso (o numero d'onda) per l'elettrone libero dovranno soddisfare le condizioni

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y, k_z \text{ simili}$$

e saranno quindi discretizzati. Se L e' grande i valori possibili di k_x costituiscono una successione molto fitta, e si puo' trattare la quantita' discreta n_x come se fosse continua:

$$\begin{aligned}
dn_x &= \frac{L}{2\pi} dk_x \text{ e simili} \\
\rightarrow dn_x dn_y dn_z &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 dk_x dk_y dk_z
\end{aligned}$$

Quindi, nell'elemento di volume nello spazio degli impulsi sta il numero di stati (senza contare i gradi di liberta' di spin):

$$dn \equiv \frac{dn}{d^3\mathbf{k}} d^3\mathbf{k} = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3\mathbf{k}$$

D'altra parte, in questo esempio quel che si puo' calcolare e' la probabilita' di transizione verso un gruppo di stati, p.es. quelli nei quali l'elettrone esce dal processo con numero d'onda che sta nell'elemento di volume $d^3\mathbf{k}$ nello spazio degli impulsi: questo perche' lo stato finale appartiene effettivamente ad un continuo, e per un valore fissato di energia ci sono molti (in realta', infiniti!) stati possibili per l'elettrone. Quindi la probabilita' di transizione, che in questo caso e' verso un gruppo di stati, e non verso uno stato particolare, e' da intendersi come una quantita' differenziale nel numero di stati.

$$d|A_{if}^{(1)}|^2 = 4|\langle\psi_f|H'|\psi_i\rangle|^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{if} - \omega)t_0}{(\omega_{if} - \omega)^2} dn \text{ prob. di transizione}$$

$$\rightarrow dw \approx 4|\langle\psi_f|H'|\psi_i\rangle|^2 \delta(\omega_f - \omega_i - \omega) dn \text{ prob. di transizione per unita' di tempo}$$

dw si ottiene da $d|A_{if}|^2$ usando la δ come limite della funzione oscillante per grandi t_0 : la funzione δ descrive la conservazione dell'energia fra sistema e perturbazione (campo elettrico nel condensatore). Si osservi che vale la relazione

$$\omega_{if} = \omega_f - \omega_i = \frac{E_f - E_i}{\hbar} = E_f - E_i \text{ in unita' naturali}$$

Data l'espressione trovata prima per dn , questo si puo' riscrivere:

$$d|A_{if}|^2 = 4|\langle\psi_f|H'|\psi_i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \omega) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3\mathbf{k}$$

ed essendo energia e impulso dell'elettrone legati dalla relazione:

$$\frac{k^2}{2m} = E \rightarrow k = \sqrt{2mE} \rightarrow dk = \sqrt{\frac{m}{2E}} dE$$

si ha:

$$d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = 2mE dk d\Omega$$

$$\rightarrow d|A_{if}|^2 = 4|\langle\psi_f|H'|\psi_i\rangle|^2 \delta(E - E_i - \omega) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2mE \sqrt{\frac{m}{2E}} dE d\Omega$$

$$\rightarrow d|A_{if}|^2 = 4|\langle\psi_f|H'|\psi_i\rangle|^2 \delta(E - E_i - \omega) \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sqrt{2m^3 E} dE d\Omega$$

Per avere una probabilita' di transizione finita dovremmo ora, ovviamente, integrare su un range finito di energia e di angolo solido dell'elettrone: questo mostra che la divergenza dell'espressione, dovuta alla presenza della δ , e' solo apparente, visto che le δ stessa e' "mangiata" dall'integrale sull'energia. L'altro dubbio che puo' rimanere, ossia la dipendenza apparente dal volume di quantizzazione L^3 , si risolve osservando che tale fattore si cancella con la normalizzazione delle funzioni d'onda che compaiono nell'elemento di matrice.

Se ci chiedessimo, alla fine di tutto questo, qual e' la distribuzione statistica dell'energia dell'elettrone, dovremmo osservare che, evidentemente, essa dipende dall'elemento di matrice, che qui non abbiamo esplorato. In assenza di ogni informazione sulla forma dell'elemento di matrice stesso, il che e' cio' che accade a volte nel trattare modellisticamente processi fondamentali, la cosa piu' semplice e' supporre che sia una costante, indipendente da E : in questo caso, *la distribuzione statistica sarebbe fissata dal solo fattore densita' degli stati, o spazio delle fasi*.

$$\begin{aligned} d^3|A_{if}|^2 &= K\delta(E - E_i - \omega)\sqrt{2m^3 E}dE d\Omega \\ \rightarrow \frac{d^2|A_{if}|^2}{d\Omega} &= \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} K\delta(E - E_i - \omega)\sqrt{2m^3 E}dE \\ \rightarrow |A_{if}|^2 &= 4\pi K\sqrt{2m^3(E_i + \omega)} \end{aligned}$$

B) Stato a finale a 2 corpi (non relativistico)

Consideriamo il caso in cui nello stato finale siano presenti due particelle libere, di impulsi \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 : allora avremo, se non ci sono vincoli fra gli impulsi:

$$\begin{aligned} d^6n &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \\ \rightarrow d^6n &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

Volendo dn/dE_f , osserviamo che:

$$E_f = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} \rightarrow \frac{k_1}{m_1} dk_1 = dE_f \rightarrow \frac{dk_1}{dE_f} = \frac{m_1}{k_1}$$

Quindi, procedendo come nel caso precedente:

$$\begin{aligned}
d^6 n &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 dk_1 d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 \\
\rightarrow d^6 n &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 \frac{dk_1}{dE_f} dE_f d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 \\
\rightarrow \frac{d^6 n}{dE_f} &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1^2 \frac{m_1}{k_1} dE_f d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 = \frac{V^2}{(2\pi)^6} k_1 m_1 dE_f d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 \\
\rightarrow \frac{d^6 n}{dE_f} &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \sqrt{2m_1 E_f - k_2^2} \frac{m_1}{m_2} m_1 d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2
\end{aligned}$$

Qui non ci siamo preoccupati dell'elemento di matrice, ma solo dal fattore densita' degli stati: questo dovrebbe aiutare a capire il significato del fattore stesso, che come al solito serve anche in questo caso a misurare di quanto cresce il numero di stati che ha a disposizione il sistema all'aumentare dell'energia totale. Sempre come al solito, l'integrazione su E_f , nel calcolo della probabilita' di transizione, fissa il suo valore a quello presente nella funzione δ : se consideriamo costante l'elemento di matrice, possiamo avere:

$$\begin{aligned}
d^6 w_{fi} &= K \delta(E_i - E_f) d^6 n \\
&= K \delta(E_i - E_f) \frac{V^2}{(2\pi)^6} \sqrt{2m_1 E_f - k_2^2} \frac{m_1}{m_2} m_1 d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 dE_f \\
d^5 w_{fi} &= K \int \delta(E_i - E_f) \frac{V^2}{(2\pi)^6} \sqrt{2m_1 E_f - k_2^2} \frac{m_1}{m_2} m_1 d\Omega_1 k_2^2 dk_2 d\Omega_2 dE_f \\
\rightarrow \frac{d^5 w_{fi}}{d\Omega_1 dk_2 d\Omega_2} &= K \frac{V^2}{(2\pi)^6} \sqrt{2m_1 E_i - k_2^2} \frac{m_1}{m_2} m_1 k_2^2
\end{aligned}$$

5. Approssimazione di Born

L'app. di Born, applicabile in senso stretto al caso di scattering da potenziale, consiste nell'arrestare lo sviluppo perturbativo all'ordine piu' basso, il che e' lecito, naturalmente, purché la perturbazione sia "piccola" (in qualche senso) rispetto all'hamiltoniano imperturbato: l'app. di Born e' quindi una approssimazione di *alta energia*. In questo senso, e' possibile anche dimostrare che l'approssimazione di Born e' equivalente allo sviluppo in onde parziali quando tutti gli sfasamenti sono piccoli. Riprendendo, a titolo di esempio, il caso dello scattering (elastico) da un potenziale, si puo' assumere che lo stato iniziale contenga una particella libera di impulso \mathbf{p} e quello finale un'altra particella libera di impulso \mathbf{p}' , orientato nell'angolo solido $d\Omega$. Le funzioni d'onda iniziale e finale si scriveranno allora

$$\psi_p = Ne^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \psi_{p'} = Ne^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}$$

dove N, N' sono costanti di normalizzazione, la cui determinazione e' collegata alla determinazione del fattore densita' degli stati: in altre parole, ogni diversa scelta delle costanti di normalizzazione implica un diverso fattore di densita' degli stati.

Normalizzazioni

Gli stati di particella libera a impulso definito non sono, come e' noto, normalizzabili in senso stretto. Per essi e' tuttavia possibile stabilire diverse normalizzazioni "convenzionali":

Normalizzazione in una scatola

In questo caso si assume che le particelle siano vincolate entro una grande scatola cubica di lato L ; allora le funzioni d'onda sono scritte come

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Normalizzazione nello spazio degli impulsi

In questo caso si parte dall'ortogonalita' delle autofunzioni dell'impulso per ottenere

$$\psi_p = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Occorre poi trovare la densita' degli stati; assumendo la normalizzazione in una scatola, essa puo' essere trovata nel seguente modo: l'elemento di volume nello spazio delle fasi e' $d\tau = d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = dVp^2 dp d\Omega$. Ogni stato occupa il volume h^3 , quindi nell'elemento $d\tau$ abbiamo $dn = d\tau/h^3$, ossia $d\tau/(2\pi)^3$ in unita' naturali stati. Poiche' siamo interessati alla densita' di stati nello spazio degli impulsi, possiamo integrare sul volume spaziale, ottenendo la densita' ridotta:

$$dN = \int_V dn = V p^2 dp d\Omega$$

Poiche'

$$p^2 = 2mE \rightarrow p^2 dp = 2mEm \frac{dE}{p} = m\sqrt{2mE} dE,$$

e quindi

$$dN = Vm\sqrt{2mE} dE d\Omega$$

che e' la densita' degli stati cercata.

Scriveremo allora per la probabilita' di transizione per unita' di tempo:

$$d^3 w_{pp'} = 2\pi \left| \int \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ip'r} U(r) e^{ip'r} \frac{1}{\sqrt{V}} d\mathbf{r} \right|^2 V m \sqrt{2mE} \delta(E - E') dE' d\Omega$$

Integrando sull'energia della particella finale, si elimina la funzione δ , e rimane

$$d^2 w_{pp'} = 2\pi \left| \int U(r) e^{i(p-p')r} d\mathbf{r} \right|^2 m \sqrt{2mE} d\Omega$$

Si osservi come la quantita' $\frac{d^2 w_{pp'}}{d\Omega}$ teste' calcolata abbia le dimensioni $[T^{-1}] [sr^{-1}]$; questo suggerisce di dividerla per il flusso incidente, che ha dimensioni $[T^{-1}] [L^{-2}]$ per ottenere la sezione d'urto differenziale, come da definizione.

Circa il flusso incidente: la densita' di corrente di probabilita' e' definita da

$$j = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Il calcolo e' allora estremamente diretto, e si ottiene:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ipx}, \psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ipx} \\ \rightarrow j &= -\frac{i}{2m} \left(\frac{ip}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V}} - \frac{-ip}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V}} \right) = -\frac{i}{2m} \frac{2ip}{V} = \frac{1}{m} \frac{p}{V} = \frac{\sqrt{2mE}}{mV} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned}$$

Il flusso incidente, con la normalizzazione scelta, e' dunque $\frac{1}{V} \sqrt{\frac{2E}{m}}$; si ha infine:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left| \int U(r) e^{i(p-p')r} d\mathbf{r} \right|^2$$

La derivazione mostrata non da' la fase dell'ampiezza di scattering. Si osservi anche come la sezione d'urto calcolata in meccanica quantistica sia costituita essenzialmente da tre fattori, come conseguenza di quanto visto per la probabilita' di transizione per unita' di tempo:

- b) elemento di matrice (nell'app. di Born e' la trasformata di Fourier del potenziale): esso contiene la dinamica dell'interazione
- c) flusso incidente: esso e' un semplice fattore cinematico

d) spazio delle fasi: esso e' un altro fattore cinematico, semplice nel caso considerato fin qui dello scattering da potenziale, ma piu' complicato nel caso di reazioni fra particelle elementari

Questi punti saranno discussi piu' approfonditamente nelle prossime sezioni.

6. Estensione al caso relativistico

Senza voler entrare nella formulazione covariante della teoria perturbativa, che e' uno dei soggetti centrali della teoria quantistica dei campi, si intende solo citare quale sia l'estensione della regola d'oro al caso di una interazione qualsiasi (non limitata a scambi di energia con un potenziale), ossia della prob. di transizione per unita' di tempo per un processo generico (reazione, decadimento) nel quale ci sia come risultato uno stato finale formato da n particelle

Si osservi come il quadro concettuale debba essere profondamente modificato in una teoria che sia relativistica: come conseguenza della equivalenza fra massa ed energia, e quindi della possibilita' di distruggere e creare particelle, i fenomeni di collisione devono essere considerati da un punto di vista piu' generale di quello visto prima a proposito dello scattering non relativistico. In sostanza, in ogni caso si parla di processi, scattering compreso, nei quali, tramite l'interazione, viene *distrutto* lo stato iniziale e *creato* quello finale. Conservare l'idea che ci sia una qualche continuita' fra particelle dello stato iniziale e dello stato finale e' in realta' errato, anche se a volte comodo, e puo' portare a equivoci e apparenti paradossi (molti dei quali hanno a che fare con l'uso improprio e "troppo classico" del concetto di velocita').

L'espressione per la matrice S e' analoga a quella trovata prima, con la sola variante dell'introduzione di quantita' 4-dimensionali

$$S_{fi} = \delta_{fi} - T_{fi}$$

in cui T e' l'elemento di matrice di transizione

$$T_{fi} = -i \langle f | \int d^4x H' | i \rangle$$

H' : densita' volumetrica di hamiltoniano di interazione

Le proprieta' di invarianza di T_{fi} dipendono dalla normalizzazione degli stati iniziale e finale (v. dopo per maggiori dettagli).

In tutti i casi di interesse, nell'espressione esplicita di T_{fi} compare una funzione δ 4-dimensionale, che garantisce la conservazione del 4-impulso totale:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 M_{fi} \delta^{(4)}(p_i - p_f)$$

Nei processi relativistici si presenta una situazione parzialmente diversa da quella, considerata prima, di interazione con un potenziale, sotto l'aspetto dell'ordine perturbativo: di fatto, tutti i processi di scattering fra particelle sono descritti da elementi di matrice *al minimo del second'ordine*. Questo in realta' e' ragionevole, se si pensa, a titolo di esempio, che lo scattering di due particelle richiede che ciascuna delle due interagisca con il campo mediatore. In altre parole, il processo di scattering consiste al minimo in un sottoprocesso di emissione e uno di assorbimento (p.es. di un fotone virtuale), quindi l'ordine perturbativo minimo e' il secondo.

Si puo' osservare che in questa forma covariante viene garantita globalmente la conservazione di energia e impulso, mentre nella versione non relativistica di interazione tramite un potenziale statico, vista prima, l'impulso non viene conservato (in effetti, un potenziale V statico dipende da r ma non da t : quindi non ha componenti di Fourier che trasferiscono energia, mentre ne ha che trasferiscono impulso): la conservazione rigorosa del 4-impulso totale e' una conseguenza dell'invarianza per traslazioni spazio-temporali della lagrangiana, o dell'hamiltoniano, di un sistema isolato.

A questo proposito, vale probabilmente la pena di ricordare che lo sviluppo perturbativo viene anche in questo caso, di solito - anche se non sempre, rappresentato pittorescamente tramite diagrammi di Feynman, nella loro versione covariante. Anche in questo caso si rappresentano i contributi all'ampiezza come evoluzione libera delle particelle coinvolte fra vertici, nei quali pero' viene conservato ogni volta il 4-impulso. Il posto degli *stati virtuali* viene quindi preso, per le linee interne dei diagrammi, da *particelle virtuali*, chiamate anche *off-mass shell* perche' per esse non viene rispettata la relazione relativistica $E^2 = p^2 + m^2$. Ci sono numerosi vantaggi nell'adottare questo cambiamento di descrizione, fra i quali il piu' importante e' che un singolo diagramma di Feynman descrive diversi processi fra gli stessi stati iniziale e finale, con vari ordinamenti temporali. L'idea generale dello scambio di particelle virtuali come meccanismo di interazione fra particelle altrimenti libere, originariamente sviluppata nell'ambito della QED (fotoni e coppie virtuali), e' stata in seguito estesa a tutte le altre interazioni, e di esse costituisce di fatto una descrizione piuttosto 'visiva', e quindi relativamente intuitiva: si ricordi pero' che i singoli processi descritti da ogni diagramma di Feynman non sono processi fisici, ma solo rappresentazioni approssimate degli stessi. Una discussione piu' estesa verra' fatta nelle parti riguardanti lo scattering nelle interazioni forti ed elettromagnetiche.

Spazio delle fasi

Il processo produce uno stato finale generico, che contiene n particelle ognuna nello stesso volume V e nell'elemento di volume individuale d^3p_i nello spazio degli impulsi; quindi la probabilita' di transizione verso un gruppo di stati finali del continuo si scrivera':

$$d\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) dn$$

dove dn e', come prima, l'incremento nel numero di stati accessibili al processo (per l'intera configurazione dello stato finale del processo) per incremento di energia totale. Si tratta quindi di esprimere dn in termini delle variabili cinematiche dello stato finale. Consideriamo la normalizzazione dello stato con 1 particella in un volume V : avremo allora

$$\int |\psi|^2 dV = 1 \rightarrow [\psi] = \left[\frac{1}{V^{1/2}} \right]$$

Imponendo condizioni al contorno periodiche su ciascuno dei 3 lati di lunghezza $L=V^{1/3}$ otteniamo p.es. per i possibili valori della componente x dell'impulso

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, n_x = 0, \pm 1, \dots$$

da cui il numero di stati per intervallo di p_x :

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \dots \rightarrow \begin{array}{c} dn_x \\ \text{incremento no. stati / incremento } dp_x \end{array} = \frac{L}{2\pi} dp_x \rightarrow dn = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 dp_x dp_y dp_z$$

$$\rightarrow dn = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \mathbf{p}$$

Conviene assumere il volume V unitario, per semplificare le espressioni. Per uno stato finale con N particelle potremo allora scrivere, essendo il numero di stati una variabile moltiplicativa (v. meccanica statistica):

$$dn = \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 \mathbf{p}_N}{(2\pi)^3}$$

Il guaio di questa espressione, che si deve poi usare nel calcolo della probabilita' di transizione (regola d'oro), e' che non e' un invariante di Lorentz. Infatti, l'elemento di volume nello spazio degli impulsi si trasforma come:

$$d^3 p = d^2 p_{\perp} dp_{\parallel} \rightarrow d^3 p' = d^2 p'_{\perp} dp'_{\parallel} = d^2 p_{\perp} \gamma (dp_{\parallel} + \beta dE)$$

$$= d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_{\parallel}} \right) = d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(1 + \beta \frac{p_{\parallel}}{E} \right) = d^2 p_{\perp} \gamma dp_{\parallel} \left(\frac{E + \beta p_{\parallel}}{E} \right)$$

$$\rightarrow d^3 p' = d^3 p \frac{E'}{E} \rightarrow \frac{d^3 p'}{E'} = \frac{d^3 p}{E}$$

La quantità d^3p/E è quindi, invece, un invariante; i processi che normalmente si considerano sono decadimenti o reazioni, come indicato di sotto:

$$a \rightarrow "1" + "2" + \dots + "N"$$

$$a + b \rightarrow "1" + "2" + \dots + "N"$$

se ora ridefiniamo l'elemento di matrice invariante, rispettivamente come

$$M_{fi} \rightarrow (2E_a)^{1/2} (2E_1)^{1/2} \dots (2E_N)^{1/2} M_{fi} \quad \text{decadimento}$$

$$M_{fi} \rightarrow (2E_a)^{1/2} (2E_b)^{1/2} (2E_1)^{1/2} \dots (2E_N)^{1/2} M_{fi} \quad \text{reazione}$$

(il fattore 2 a denominatore è convenzionale), possiamo riscrivere la regola d'oro, nei due casi, rispettivamente come:

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{2E_a} \int |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{2E_a 2E_b} \int |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

Tutto questo è equivalente a normalizzare gli stati di particella libera, iniziali e finali, a $2E$ invece che a 1 (normalizzazione convenzionale degli stati relativistici). Si noti che possiamo assumere che l'elemento di matrice, dopo le ridefinizione, sia una quantità invariante.

Va sottolineato che i gradi di libertà qui presi in considerazione sono solo quelli orbitali; nel caso in cui si considerino particelle con spin, le espressioni trovate vengono modificate tramite appropriati fattori numerici

Si osservi che il rate di transizione (= prob. di transizione per unità di tempo), come dato dalla regola d'oro, *non* è un invariante di Lorentz; infatti, mentre l'integrale è una somma di quantità invarianti, la divisione per E_a o $E_a E_b$ rende il prodotto non invariante.

questo fatto, apparentemente sorprendente, è in realtà corretto, alla luce delle seguenti considerazioni:

a. Decadimenti

L'inverso del rate è la *vita media* dello stato (instabile); essa è una quantità non invariante, come ovvio (v. dilatazione dei tempi, quindi anche della vita media in un sistema di riferimento in moto rispetto a quello proprio – di quiete – dello stato)

b. Reazioni

Anche in questo caso il rate non e' una quantita' invariante: anche questo e' ovvio, se si pensa che il rate stesso e' misurato in interazioni/unita' di tempo, e l'unita' di tempo dipende dal riferimento scelto.

E' tuttavia possibile definire una quantita' invariante, che e' la *sezione d'urto totale*, nel seguente modo: si divide il rate per il flusso incidente (no. particelle/unita' di area*unita' di tempo). Considerando la normalizzazione a 1 particella/volume unitario che abbiamo usato fin qui, tale flusso e' dato dalla velocita' relativa (in modulo) fra le particelle dello stato iniziale (perche' con 1 particella/volume unitario, sia per *a* che per *b*, c'e' un flusso di 1 particella/area unitaria*tempo necessario a percorrere la distanza unitaria - tempo che e' $1/v_{rel}$). Quindi:

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|} = \frac{(2\pi)^{4-3N}}{|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b} \int |M_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2} \dots \frac{d^3\mathbf{p}_N}{2E_N}$$

La quantita'

$$|\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| 2E_a 2E_b = \left| \frac{\mathbf{p}_a}{E_a} - \frac{\mathbf{p}_b}{E_b} \right| 2E_a 2E_b \equiv 4 \left[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 \right]^{1/2}$$

e' il *flusso invariante*. In questo modo viene dunque definita la sezione d'urto totale per interazioni fra particelle elementari; le sezioni d'urto variamente "differenziali", ossia quelle in cui l'integrazione sullo spazio delle fasi non e' completa, sono definite in modo analogo: la mancanza di completezza nell'integrazione solo parziale sulle variabili cinematiche rende queste quantita' non necessariamente invarianti.