

Scattering eN: fattori di forma, funzioni di struttura, scaling, modello a partoni

1. Interazione elettromagnetica

Tramite la diffusione leptone carico-nucleo, governata dall'interazione elettromagnetica, e' possibile sondare molte delle proprieta' di nuclei e nucleoni. Si usano come proiettili elettroni o muoni di energia elevata, e come bersagli protoni, deutoni, nuclei.

I leptoni carichi sono l'elettrone (e), il mu (μ) e il tau (τ); l'elettrone e' stabile, al contrario di mu e tau che sono soggetti a decadimenti di tipo debole. Mentre la vita media del μ ($2 \mu\text{s}$ circa) e' tale da consentire esperimenti di scattering μN (v. dilatazione relativistica dei tempi), quella molto piu' breve del τ (10^{-13} s circa) non permette lo studio dei processi analoghi. Di conseguenza, sono stati e vengono effettuati esperimenti di scattering con fasci di elettroni e mu.

E' inoltre possibile studiare l'interazione elettromagnetica fra elettroni e positroni tramite macchine acceleratrici speciali, chiamate *colliders*: in esse fasci di elettroni e positroni circolano su un'orbita fissa in direzioni opposte, e si incrociano in uno o piu' punti, nei quali avvengono le collisioni. Per completezza, occorre aggiungere che da anni sono in fase di studio colliders con fasci di mu, che potrebbero risultare piu' interessanti di quelli con elettroni alle energie molto elevate (riduzione dei fenomeni radiativi a causa della massa piu' elevata del mu), cosi' come colliders lineari di elettroni e positroni (una strada obbligata, in considerazione delle enormi perdite radiative nelle macchine circolari con fasci di elettroni di altissima energia).

Le *correzioni radiative* agli elementi di matrice elettromagnetici sono dovute agli ordini perturbativi superiori (emissione e assorbimento di fotoni virtuali), e risultano sempre proporzionali all'inverso della massa al quadrato della particella carica coinvolta; quindi la descrizione dei processi elettromagnetici di particelle pesanti come il mu richiede correzioni radiative che sono alcuni ordini di grandezza piu' piccole di quelle richieste per processi che coinvolgono elettroni ($m_\mu \approx 200m_e$).

Le *perdite radiative* negli acceleratori circolari sono dovute alla *radiazione di sincrotrone* (emissione di fotoni reali, dovuta, al pari della *bremstrahlung*, all'interazione con un campo elettromagnetico esterno: elettrostatico per la *bremstrahlung*, magnetostatico (il

campo guida che mantiene le particelle sull'orbita circolare) per la radiazione di sincrotrone, chiamata anche appunto *bremstrahlung magnetica*).

In un quadro classico, questi fenomeni sono fra loro legati da un'origine comune, l'emissione di radiazione da parte di cariche accelerate in un campo esterno: come è noto (formula di Larmor) essa è proporzionale al quadrato dell'accelerazione, quindi, anche in questo caso, inversamente proporzionale al quadrato della massa. D'altra parte, l'accelerazione dipende dall'intensità del campo accelerante, sia esso elettrostatico o magnetostatico: nel caso della radiazione di sincrotrone, si noti che fasci di energia elevata richiedono campi guida intensi, quindi sono soggetti ad accelerazioni e perdite radiative molto importanti.

Poiché elettroni e mu sono - almeno alla scala di distanza finora sondata - privi di struttura, lo studio dell'interazione elettromagnetica con fasci leptonici risulta più semplice di ogni altro, sia perché la piccolezza della costante di accoppiamento elettromagnetico (costante di struttura fine: $\alpha = e^2/4\pi\hbar c \cong 1/137$) consente una descrizione piuttosto accurata dei processi d'urto tramite semplici diagrammi a un solo fotone, sia perché, anche per i processi elettromagnetici che coinvolgono adroni, uno dei vertici del diagramma risulta perfettamente descrivibile per mezzo della elettrodinamica quantistica (QED), teoria molto ben conosciuta e verificata con grande accuratezza. Non sorprende dunque che gli esperimenti con fasci di leptoni carichi (e, in realtà, anche con fasci di neutrini) abbiano avuto un ruolo chiave nella comprensione della struttura composita degli adroni e nell'evidenziare le proprietà dei loro costituenti. Allo scopo di chiarire il percorso che porta a mettere in luce le proprietà dei costituenti degli adroni, conviene partire dai processi più semplici, dai quali comprendere l'origine di alcune caratteristiche tipiche di tutti gli altri, per poi introdurre i vari livelli di complicazione che si rivelano via via necessari.

2. Scattering di una particella scalare in un campo elettrostatico esterno

Consideriamo inizialmente il caso di una particella scalare ipotetica (un "pione" puntiforme e privo di interazione forte) che interagisce con un campo elettrostatico esterno, considerato come una grandezza classica (ossia, non come un campo quantizzato). In questo caso, come è evidente, l'interazione non è covariante, e il problema ha quindi poco senso fisicamente: tuttavia è utile a impostare la discussione per quel che segue. Riprendendo l'espressione, vista a suo tempo, per l'elemento di matrice al I ordine della transizione, abbiamo:

$$T_{fi} = -i \langle f | \int d^4x H' | i \rangle$$

H' : densita' volumetrica di hamiltoniano di interazione

Per analogia con il caso classico, possiamo assumere per la densita' di hamiltoniano di interazione:

$$H' = j^\mu A_\mu$$

dove, per il caso piu' semplice di un potenziale coulombiano, possiamo scegliere:

$$A_\mu = \left(\frac{eZ}{4\pi r}, \mathbf{0} \right)$$

Dobbiamo ora definire la 4-densita' di corrente: per uno stato stazionario, descritto da una funzione d'onda $\phi(x)$, sappiamo che la 4-densita' di corrente elettromagnetica (= carica*4-densita' di corrente di probabilita') e' data dall'espressione (v. eq. di Klein-Gordon):

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = ie \left(\varphi^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) \varphi, ((\nabla \varphi^*) \varphi - \varphi^* (\nabla \varphi)) \right)$$

Stiamo ora considerando un processo di scattering, nel quale ci sono uno stato iniziale e uno finale, fra loro diversi: ϕ e ϕ' . Assumiamo allora, in analogia al caso stazionario, la seguente espressione per la (*densita' di corrente (di transizione)*) fra gli stati iniziale e finale:

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = ie \left(\left(\varphi'^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \varphi'^*}{\partial t} \right) \varphi \right), ((\nabla \varphi'^*) \varphi - \varphi'^* (\nabla \varphi)) \right)$$

dove le due funzioni d'onda si riferiscono allo stato iniziale e finale, rispettivamente, e possono essere prese come onde piane. Quindi:

$$j^\mu = e N N' e^{-i((E-E')t - (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r})} ((E + E'), (\mathbf{p}' + \mathbf{p}))$$

Questo modo di definire la 4-corrente di transizione e' abbastanza intuitivo, ma di sicuro men che rigoroso: occorre ricordare che, nel linguaggio della teoria dei campi, le funzioni d'onda divengano operatori, e di conseguenza anche la 4-corrente e', di fatto e di diritto, un operatore. L'espressione trovata prima deve quindi essere interpretata come l'elemento di matrice dell'operatore 4-

corrente fra gli stati di un "pione", iniziale e finale: in effetti, in teoria dei campi l'operatore 4-corrente e.m. di transizione e' dato da:

$$j_{em}^\mu = ie(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi)$$

dove ϕ e' l'operatore di campo della particella scalare. Prendendo il suo elemento di matrice fra stati a un "pione"

$$\begin{cases} |p\rangle = \sqrt{2E} a^\dagger(p) |0\rangle \\ |p'\rangle = \sqrt{2E'} a^\dagger(p') |0\rangle \end{cases}$$

si trova appunto:

$$\langle p' | j_{em}^\mu | p \rangle = e(p + p')^\mu e^{-i(p-p') \cdot x}$$

Allora:

$$j^\mu A_\mu = NN'(E + E') e^{-i((E-E')t - (\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{r})} \frac{e^2 Z}{4\pi r}$$

L'integrale sul tempo porta ad una funzione δ sull'energia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} NN' e^{i(E-E')t} dt = NN' 2\pi \delta(E - E')$$

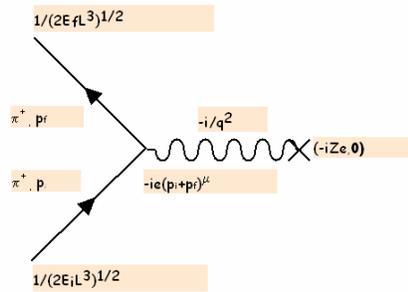
mentre l'integrale spaziale da':

$$\int e^{+i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}} \frac{e^2 Z}{4\pi r} d^3 \mathbf{r} = \frac{Ze^2}{|\mathbf{q}|^2}, \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

In conclusione, l'elemento di matrice invariante e' dato da:

$$T_{fi} = -i \langle f | \int d^4 x H' | i \rangle = -NN' 2\pi i \delta(E - E') \frac{Ze^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

da cui si vede come nel processo venga conservata l'energia, ma non l'impulso, come atteso per un potenziale statico. In termini di diagrammi di Feynman il processo viene rappresentato cosi':



La croce a 45° rappresenta il campo e.m. esterno; le due linee con la freccia rappresentano gli *stati iniziale e finale*, o meglio i loro fattori di normalizzazione; la linea ondulata rappresenta il *propagatore* del campo e.m., o se si preferisce un *fotone virtuale* di "massa²" uguale a q^2 (mod. quadro del 4-impulso trasferito) scambiato fra carica e campo. Questa rappresentazione rende in modo immediato il concetto di interazione come scambio di un fotone, e puo' essere estesa a elementi di matrice piu' complicati; occorre tuttavia ricordare che proprio la sua immediatezza puo' indurre a identificare la rappresentazione con un vero e proprio processo fisico ("la particella emette o assorbe un fotone, a sua volta assorbito o emesso dal campo esterno"), cosa che rigorosamente non e' vera: il grafico rappresenta un'ampiezza perturbativa, e ogni processo fisico risulta dal contributo di molte, di solito infinite ampiezze.

Puo' essere utile ricordare brevemente le proprieta' dei fotoni virtuali (particelle *interne* nei diagrammi). Nell'ampiezza invariante compare il fattore

$$\frac{1}{q^2}$$

comunemente noto come *propagatore* del fotone virtuale. Come si e' visto, $q^2 \neq 0$, il che significa che, per cio' che riguarda il trasferimento di 4-impulso nel processo, esso avviene con $E^2 \neq \mathbf{p}^2$: si dice che il fotone virtuale e' *off mass-shell*. Si puo' scrivere quindi:

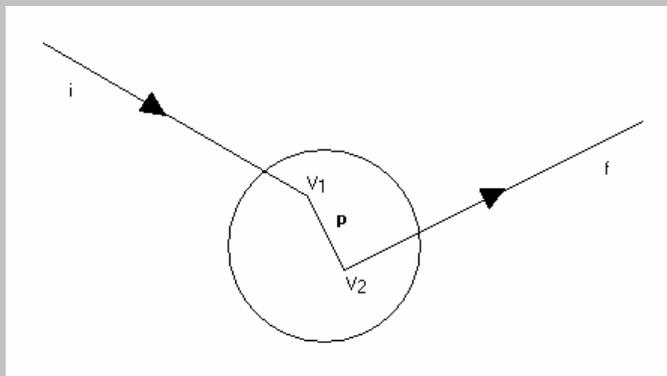
$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{E^2 - \mathbf{p}^2} = \frac{1}{2E} \left(\frac{1}{E - |\mathbf{p}|} + \frac{1}{E + |\mathbf{p}|} \right)$$

Quindi il propagatore e' fatto di due parti, in ciascuna delle quali il fattore esterno $1/2E$, che si puo' interpretare come la normalizzazione relativistica dello stato intermedio, non ci interessa molto per cio' che vogliamo sottolineare:

La prima si puo' interpretare immediatamente come estensione relativistica del termine usuale nello sviluppo perturbativo di un'interazione da potenziale

$$\frac{1}{E_i - E} \equiv \frac{1}{E_i - |\mathbf{p}|}$$

In questo senso, diciamo che l'interazione con il potenziale fa passare il sistema dallo stato iniziale, con energia E_i , in uno *stato intermedio* di energia $E = |\mathbf{p}|$; successivamente il sistema evolve nello stato finale con energia $E_f = E_i$. In concreto, il sistema interagisce due volte con il potenziale:

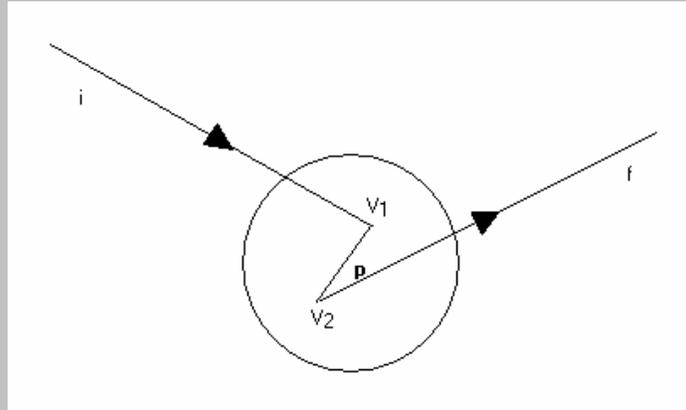


La seconda si puo' scrivere cosi':

$$\frac{1}{E_i + |\mathbf{p}|} = - \frac{1}{E_i - E_i - E_f - |\mathbf{p}|}$$

Qui il sistema passa dallo stesso stato iniziale a uno stato intermedio con energia $E_f + E_i + |\mathbf{p}|$, e poi evolve verso lo stesso stato finale: in questo caso, come si vede, risulta $E \neq |\mathbf{p}|$. Diciamo allora che anche in questo caso il sistema interagisce due volte con il potenziale, ma questa volta una delle due interazioni consiste nella generazione di una coppia di particelle dal vuoto prima dell'interazione fra potenziale e particella incidente. Una di esse viene annichilata dalla particella incidente, l'altra va a costituire lo stato finale: come e' facile capire, questo secondo contributo all'ampiezza di transizione e' di natura completamente relativistica, senza nessun analogo nella descrizione tramite potenziali statici, visto che emerge dalla possibilita' di trasformare la massa a riposo in energia e viceversa, presente nella dinamica relativistica. Questa possibilita', in cui una coppia virtuale viene generata dal vuoto, puo' venire descritta in vari modi equivalenti attribuendo al vuoto stesso una natura piu' complessa di quella che intuitivamente siamo portati a considerare.

Graficamente, la cosa si puo' rappresentare come nel diagramma seguente :



Quindi il propagatore del fotone virtuale, che compare nei diagrammi di Feynman considerati sopra, non e' altro che un modo unificato (e visibilmente covariante) di rappresentare l'interazione al second' ordine fra particelle cariche e campo elettromagnetico, tenuto conto delle relazioni relativistiche fra massa ed energia.

E' ora possibile calcolare la sezione d'urto differenziale; vista la non covarianza del problema, in questo caso conviene riprendere la definizione, senza usare le formule generali del formalismo covariante, nelle quali si troverebbero automaticamente conservati energia e impulso. Quindi scriviamo:

$$w = \frac{|T_{fi}|^2}{T} \text{ probabilita' di transizione/unita' di tempo}$$

Se si sostituisce l'espressione di T_{if} , ci si trova come al solito davanti al quadrato di una funzione δ . Questo si puo' valutare nel solito modo:

$$|\delta(E' - E)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i(E' - E)t} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin[(E' - E)T/2]}{\pi(E' - E)} \right|^2 = \frac{T}{2\pi} \delta(E' - E)$$

Quindi:

$$w = N^2 N'^2 \frac{4\pi^2}{T} |\delta(E - E')|^2 \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} = N^2 N'^2 2\pi \delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4}$$

La sezione d'urto differenziale e'

$$d\sigma = w \cdot \frac{\text{spazio delle fasi}}{\text{flusso incidente}} = w \frac{\frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3}}{\frac{p}{EV}} = w \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p} V^2$$

Quindi

$$d\sigma = N^2 N'^2 2\pi \delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p} V^2$$

Assumendo la normalizzazione in una scatola per le onde piane:

$$N = N' = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$\rightarrow d\sigma = \frac{1}{V} \frac{1}{V} 2\pi \delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p} V^2 = 2\pi \delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p}$$

Abbiamo mantenuto l'indicazione del volume della "scatola", V , invece di assumerlo unitario, per maggior chiarezza.

Si osservi che la sezione d'urto scritta e', in realta', una sezione d'urto differenziale *tripla* (differenziale nelle 3 componenti dell'impulso). Siccome ci interessa la sola sezione d'urto *doppiamente differenziale* nei 2 angoli, visto che sappiamo gia' che l'energia, e quindi il modulo dell'impulso, dell'elettrone non cambiano, conviene riesprimere l'elemento di volume nello spazio degli impulsi in termini di energia e angolo, in modo da poter integrare sull'energia dello stato finale. Otteniamo, tenuto conto di:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

$$\rightarrow 2EdE = 2|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}|$$

$$\rightarrow EdE = |\mathbf{p}|d|\mathbf{p}|$$

$$\int d\sigma = \int 2\pi\delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p}$$

$$d^3 p' = p'^2 dp' d\Omega$$

$$p' dp' = E' dE' \rightarrow d^3 p' = p' E' dE' d\Omega$$

$$\rightarrow \int 2\pi\delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p} = \int 2\pi\delta(E - E') \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{dE'}{(2\pi)^3} \frac{E}{p} p' E' d\Omega$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} \frac{E}{p} p' \int \delta(E - E') dE' E' d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{Z^2 e^4}{|\mathbf{q}|^4} E^2 d\Omega$$

$$q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \rightarrow q^4 = 16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{Z^2 e^4}{16p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} E^2 = \frac{Z^2 e^4}{16(2\pi)^2} \frac{E^2}{p^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Questa non e' altro che la versione relativistica della *formula di Rutherford*, per lo scattering da un centro di carica infinitamente pesante (potenziale statico).

3. Scattering di una particelle a spin $\frac{1}{2}$ in un campo esterno

Come cambiano le cose se, invece di una particella scalare, abbiamo una particella a spin $\frac{1}{2}$ (elettrone o muone)? La differenza sta nel fatto che ora gli stati iniziale e finale sono specificati, oltre che dal valore dell'impulso, anche dalla proiezione dello spin in una direzione determinata: ci aspettiamo quindi che l'interazione possa o no invertire la direzione dello spin dell'elettrone. Trattandosi di particelle a spin $\frac{1}{2}$, dovremo usare nell'espressione della 4-densita' di corrente le soluzioni a onda piana dell'equazione di Dirac: come e' noto, la corrente e.m. di transizione e', in questo caso

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Procedendo ora come nel caso precedente, troviamo:

$$\psi = \sqrt{\frac{m}{EV}} u(s, p) e^{ipx}, \bar{\psi} = \sqrt{\frac{m}{E'V}} \bar{u}(s', p') e^{-ip'x}$$

$$\rightarrow j^\mu = e \sqrt{\frac{m}{E'V}} \bar{u}(s', p') e^{-ip'x} \gamma^\mu \sqrt{\frac{m}{EV}} u(s, p) e^{ipx} = e \frac{m}{EV} e^{-i(p-p')x} \bar{u} \gamma^\mu u$$

Prendendo la stessa espressione di prima per il 4-potenziale abbiamo:

$$j^\mu A_\mu = e \frac{m}{EV} e^{-i((E-E')t - (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r})} \bar{u}(s', p') \gamma^\mu u(s, p) \left(\frac{eZ}{4\pi r}, \mathbf{0} \right) = e \frac{m}{EV} e^{-i((E-E')t - (\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r})} \bar{u} \gamma^0 u \frac{eZ}{4\pi r}$$

Ricordando le proprietà delle matrici di Dirac

$$\bar{u}(s', p') \gamma^0 u(s, p) = \bar{u}(s', p') \overset{=1}{\gamma^0 \gamma^0} u(s, p) = \bar{u}(s', p') u(s, p)$$

Come logico, ora ci aspettiamo quindi di avere 4 ampiezze distinte, ognuna corrispondente a una delle 4 possibili configurazioni dello spin (iniziale+finale). Troveremo perciò per la sezione d'urto differenziale l'espressione, analoga a quella per la particella scalare:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{E^2} \frac{Z^2 e^4}{16(2\pi)^2} \frac{E^2}{p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| u^\dagger(s', p') u(s, p) \right|^2 = \frac{Z^2 e^4}{16(2\pi)^2} \frac{m^2}{p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left| u^\dagger(s', p') u(s, p) \right|^2$$

Normalmente (ma non sempre!) non abbiamo a che fare con fasci polarizzati nello stato iniziale, né misuriamo la polarizzazione delle particelle diffuse nello stato finale: quindi dobbiamo *mediare* sulla polarizzazione iniziale e *sommare* sulla polarizzazione finale.

$$\frac{1}{2} \sum_{s=-1/2}^{+1/2} \sum_{s'=-1/2}^{+1/2} \left| u^\dagger(s', p') u(s, p) \right|^2$$

La somma può essere eseguita in vari modi, sia con la forza bruta, utilizzando le espressioni esplicite per gli spinori, sia con il cosiddetto "trucco di Casimir", che consente di abbreviare i calcoli sfruttando le proprietà delle somme di prodotti di spinori. Il risultato finale è:

$$\frac{1}{2} \sum_{s=-1/2}^{+1/2} \sum_{s'=-1/2}^{+1/2} \left| u^\dagger(s', p') u(s, p) \right|^2 = 4 \frac{E^2}{m^2} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$$

e di conseguenza:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{16(2\pi)^2} \frac{m^2}{p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{4E^2}{m^2} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) = \frac{Z^2 e^4}{(2\pi)^2} \frac{E^2}{4p^4} \frac{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

espressione nota come *sezione d'urto di Mott*.

La caratteristica saliente di questa espressione e' la comparsa del fattore $(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)$, assente nella formula di Rutherford.

Vale la pena di spendere qualche parola sul significato di questo fattore, visto che e' caratteristico di ogni possibile interazione mediata da particelle vettoriali (come il fotone). Si osservi innanzi tutto che il fattore tende a 1 per basse velocita': quindi, lo scattering di elettroni lenti e' ben descritto dalla formula di Rutherford (il fattore 4 in piu' tiene solo conto dei possibili stati di spin dell'elettrone). Ad alte velocita' il fattore tende a $\cos^2 \theta/2$, e quindi si annulla per angoli vicini a π . Questa e' dunque una grossa differenza rispetto alla formula di Rutherford, e indica la presenza di un fenomeno nuovo, legato alla struttura di spin dell'interazione. In effetti, si consideri la *rappresentazione chirale* delle matrici di Dirac: in essa, gli spinori vengono scritti, *nel limite di $E \gg m$* , come

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix}$$

nella quale espressione risultano separate le componenti a elicitita' definita. In effetti, utilizzando la rappresentazione chirale l'eq. di Dirac si scrive, nello spazio degli impulsi:

$$E\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \text{ spinore generico, } \phi \text{ e } \chi \text{ spinori a 2 componenti}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrici in rapp. chirale e formato "a blocchi } 2 \times 2 \text{"}$$

Sviluppando l'algebra:

$$E\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi + m\chi$$

$$E\chi = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi + m\phi$$

Se m e' trascurabile (particelle massless o alte energie), $E \approx |\mathbf{p}|$, e di conseguenza:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi \approx |\mathbf{p}|\phi$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi \approx -|\mathbf{p}|\chi$$

Quindi ϕ e χ sono autostati dell'elicitita' con autovalori $+1$ e -1 , rispettivamente; indicandoli con u_R e u_L abbiamo dunque:

$$\omega \approx \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix}$$

Conseguentemente il prodotto di spinori che compare nell'elemento di matrice si scrive, nello stesso limite:

$$u_R^\dagger u_R + u_L^\dagger u_L$$

senza termini che mescolino R e L: quindi *l'elicità viene conservata dallo scattering, nel limite di alta energia*. La regola vale tutte le volte che si considerino elementi di matrice di una corrente 4-vettoriale (che si deve accoppiare quindi con un altro 4-vettore, come il campo e.m, quello debole o quello gluonico), costruita con spinori di Dirac.

Questo spiega il fattore nella sezione d'urto di Mott: in effetti, se l'elicità viene conservata, un elettrone di alta energia non può essere diffuso di π , perché la conservazione dell'elicità sarebbe in conflitto con la conservazione del momento angolare.

4. Scattering da una distribuzione di carica

Invece di considerare il potenziale esterno di una carica puntiforme, si può prendere quello di una distribuzione finita di carica. Allora, in base al principio di sovrapposizione in elettrostatica, il potenziale sarà:

$$A_\omega = (\varphi, \mathbf{0})$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = Ze$$

Nel calcolo dell'elemento di matrice compariva prima l'integrale spaziale:

$$\int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \frac{e^2 Z}{4\pi r} d^3\mathbf{r} = \frac{Ze^2}{|\mathbf{q}|^2}, \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$$

che ora risulterà sostituito da

$$\int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \frac{e^2 Z}{4\pi r} d^3\mathbf{r} \rightarrow \int d^3\mathbf{r} \int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}'$$

$$= \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{Ze} e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}'} \int e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{Ze}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}$$

Il secondo integrale da' la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano, $1/|\mathbf{q}|^2$, mentre il primo integrale e' la trasformata di Fourier della distribuzione di carica:

$$F(\mathbf{q}) = \frac{\int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}}{Ze}$$

e viene chiamato *fattore di forma* della distribuzione stessa. In conclusione, i risultati precedenti sulla sezione d'urto differenziale possono essere estesi al caso di distribuzioni finite di carica elettrica (come quella di un nucleo) sostituendo

$$\frac{Z^2 e^2}{|\mathbf{q}|^4} \rightarrow \frac{Z^2 e^2}{|\mathbf{q}|^4} |F(\mathbf{q})|^2$$

Esempi di calcolo di fattori di forma statici

Distribuzione esponenziale di carica

Consideriamo la seguente distribuzione 3-dimensionale:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi a^3} e^{-ar}$$

Allora, calcolando la trasformata di Fourier in 3 dimensioni:

$$F(|\mathbf{q}|^2) = \left(\frac{1}{1 + |\mathbf{q}|^2/a^2} \right)^2$$

Distribuzione gaussiana

Procedendo come nel caso precedente, e ricordando che la trasformata di Fourier di una gaussiana e' ancora una gaussiana:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi a^2)^{3/2}} e^{-a^2 r^2/2} \rightarrow F(|\mathbf{q}|^2) = e^{-(|\mathbf{q}|^2/2a^2)}$$

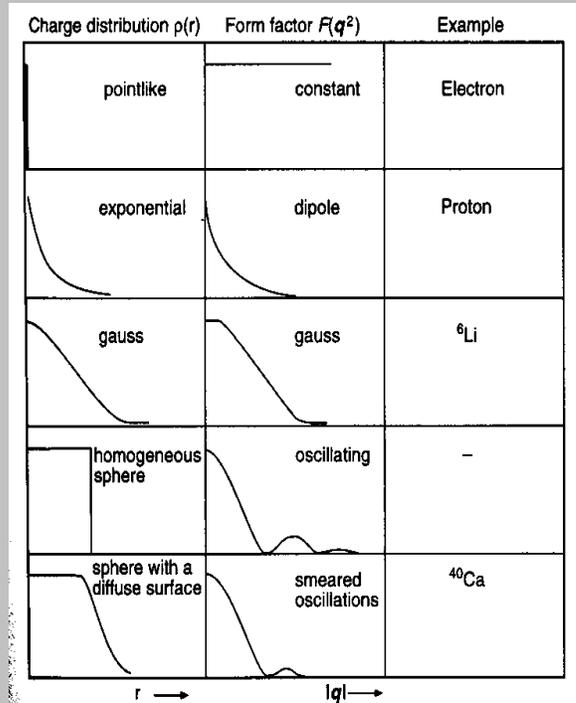
Dist. uniforme

$$\rho(r) = \begin{cases} \text{costante} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \rightarrow F(|\mathbf{q}|^2) = \frac{3}{R^3 |\mathbf{q}|^3} (\sin(R|\mathbf{q}|) - R|\mathbf{q}| \cos(R|\mathbf{q}|))$$

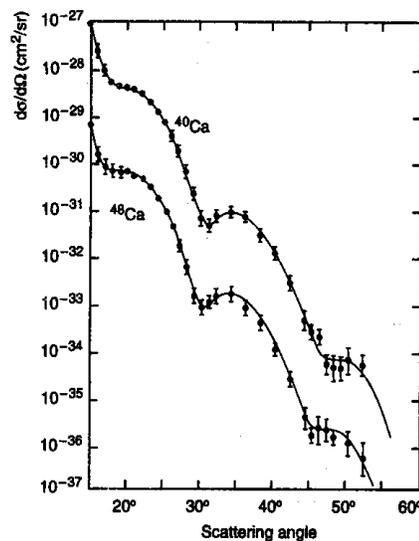
Carica puntiforme

In questo caso, senza bisogno di fare nessun calcolo, sappiamo già che il fattore di forma è 1

L'andamento di queste funzioni è riportato di seguito:



Per confronto, si riporta a titolo di esempio la sezione d'urto differenziale da nuclei di due isotopi del calcio, che mostrano come l'ipotesi di una distribuzione uniforme sia piuttosto ben verificata



5. Scattering particella-particella: schema generale

Cerchiamo ora di rendere piu' realistica la situazione vista sopra, e per prima cosa consideriamo a questo scopo la "reazione"

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$$

nella quale 1 e 2 sono ora due particelle cariche, senza interazioni diverse da quella elettromagnetica, le quali sono soggette a scattering. La differenza rispetto al caso visto prima, non e' difficile intuirlo, sta nel fatto cruciale che ora, non essendo presente un potenziale esterno capace di assorbire o generare 4-impulso senza variare il suo stato interno, il sistema fisico e' isolato, e quindi dovranno conservarsi tutte le componenti del 4-impulso totale.

Modo semplificato e intuitivo di schematizzare la situazione

Per trattare in maniera semplice il problema, possiamo fare cosi': studiamo il moto di una delle due particelle, assunte scalari, (diciamo 1) nel potenziale e.m. generato dall'altra (la 2): abbiamo cioe' una *sorgente mobile* invece di una fissa. Cerchiamo quindi di calcolare il 4-potenziale generato dal 2 in movimento: trattando quest'ultimo per un momento come se fosse una corrente classica, esso soddisfera' la solita eq delle onde non omogenea

$$\square^2 A^\mu(x) = j^\mu(x)$$

Che cos'e' j^μ per questo caso? Assumiamo che essa sia data dall'elemento di matrice della corrente di transizione del 2 fra gli stati iniziale e finale; non e' in realta' possibile giustificare questa assunzione senza partire da un punto di vista molto piu' rigoroso, tuttavia essa e' certamente plausibile. Allora:

$$j_2^\mu(x) = \langle p_2' | j(x) | p_2 \rangle = ie \left(\psi_2^* \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\mu} - \psi_2 \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\mu} \right)$$

Prendendo onde piane, con la solita normalizzazione per gli stati iniziale e finale, si trova subito:

$$j_2^\mu(x) = \frac{e(p_2 + p_2')^\mu}{(V^2 2E_2 2E_2')^{1/2}} e^{i(p_2 - p_2')x}$$

A^μ e' quindi soluzione dell'eq. inomogenea con questo "termine noto". La soluzione si puo' trovare p.es. con il metodo delle *funzioni di Green*, ed e':

$$A^\mu(x) = -\frac{e(p_2 + p_2')^\mu}{(V^2 2E_2 2E_2')^{1/2}} \frac{e^{i(p_2' - p_2)x}}{(p_2' - p_2)^2} = -\frac{1}{(p_2' - p_2)^2} j_2^\mu(x)$$

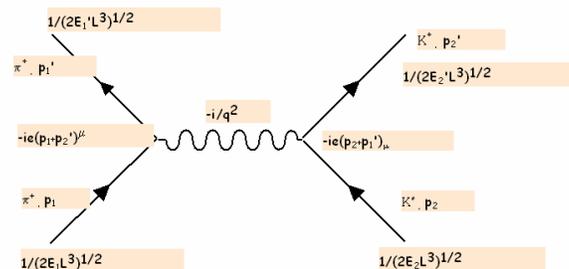
Questa espressione si puo' ora sostituire in quella di ϕ ; trascurando il termine in A^2 , che e' sempre piccolissimo tranne che nel caso limite di campi elettromagnetici molto intensi, rimane:

$$\phi = ie \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\mu + A^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)$$

Sostituito ϕ nell'elemento di matrice, ed effettuate le integrazioni, si ottiene

$$a_{12}^{(1)} = -i \frac{-1}{(p_2' - p_2)^2} \frac{1}{(16V^4 E_1 E_1' E_2 E_2')^{1/2}} e^2 (p_1' + p_1)_\mu (p_2' + p_2)^\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$$

Il diagramma di Feynman corrispondente all'ampiezza e' disegnato qui di sotto, con le stesse convenzioni di quello precedente:



Di fatto, possiamo assumere che, come nel caso precedente, l'interazione sia descritta dall'hamiltoniano di interazione

$$H' = j^\mu A_\mu$$

dove la corrente di transizione e' ora la somma della corrente di 1 e di quella di 2:

$$H' = (j_1^\mu + j_2^\mu) A_\mu$$

Si puo' mostrare, con le tecniche della teoria dei campi, che l'elemento di matrice si scrive in questo caso come

$$M_{fi} = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - (p_1' + p_2')) T_{fi} = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - (p_1' + p_2')) j_1^\mu \frac{ig^{\mu\nu}}{q^2} j_2^\nu$$

$q = p_1 - p_1' = p_2 - p_2'$ 4-impulso trasferito

risultato trovato prima in modo ancor piu' semplificato.

La forma di questo elemento di matrice e' abbastanza semplice: si tratta di due correnti, "agganciate" dal *propagatore* del fotone (virtuale) che trasporta energia e quantita' di moto da una corrente all'altra. La conservazione del 4-impulso totale deriva come al solito dall'integrale su tutto il 4-spazio della densita' volumetrica di hamiltoniano di interazione (v. casi precedenti): la parte dipendente da x delle correnti (fattori di fase esponenziali, quando prendiamo onde piane) risulta appunto, integrando, in una δ 4-dimensionale. Il fattore indipendente da x dipende dal tipo di corrente (scalare, fermionica, ...), e assume la forma:

$$j^\mu = e(p_1 + p_3)^\mu \quad \text{scalare}$$

$$j^\mu = e\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2 \quad \text{fermione}$$

.....

6. Scattering scalare-fermione (particelle senza struttura)

Consideriamo ora il caso piu' concreto in cui un elettrone (particella 1) viene diffuso da una ipotetica particella scalare carica, assunta puntiforme (particella 2). Avremo quindi l'ampiezza:

$$T_{fi} = e\bar{u}' \gamma^\mu u \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} e(p + p')^\nu$$

che porta alla sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = \frac{1}{4EE'v} |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_1'}{2E_1'} \frac{d^3\mathbf{p}_2'}{2E_2'}$$

Si osservi che questa sezione d'urto, completamente differenziale nei 6 gradi di liberta' dello stato finale a 2 corpi, e' definita per un processo fra stati a spin definito (o meglio, a 3a componente definita) per l'elettrone; v e' la velocita' relativa fra 1 e 2. Occorre calcolare la quantita', analoga a quella gia' vista in precedenza

$$\frac{1}{2} \sum_{s=-1/2}^{+1/2} \sum_{s'=-1/2}^{+1/2} |T_{fi}|^2 = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_{s,s'=-1/2}^{+1/2} \bar{u}(p_1',s')\gamma^\mu u(p_1,s)\bar{u}(p_1,s)\gamma^\nu u(p_1',s')(p_2+p_2')_\mu(p_2+p_2')_\nu$$

Questa espressione puo' essere messa in una forma piu' compatta introducendo due 4-tensori:

$$T_{\mu\nu} = (p_2 + p_2')_\mu (p_2 + p_2')_\nu$$

$$L^{\mu\nu} = 2 \left[p_1'^\mu p_1^\nu + p_1'^\nu p_1^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right]$$

La forma data a $L_{\mu\nu}$ deriva da una certa quantita' di algebra, per altro non difficile da eseguire. Con altrettanta pazienza si trova senza particolari difficolta':

$$L^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 8 \left[2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2') + \frac{q^2}{2} M^2 \right], M^2 = p_2^2$$

espressione che si puo' inserire in quella per la sez. d'urto differenziale nel CM, ottenendo:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{2\alpha^2}{(p_1 + p_2)^2 q^4} \left[2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2') + \frac{q^2}{2} M^2 \right]$$

Se definiamo il riferimento del LAB come quello in cui la particella 2 (lo scalare) e' in quiete, la sezione d'urto differenziale si riscrive, trascurando la massa dell'elettrone (quindi nel limite di energie $\gg m$)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|}$$

Questa e' un'altra estensione della formula di Rutherford, che tiene conto della massa finita (e quindi del rinculo) del bersaglio

7. Scattering elettrone-mu

Se ora consideriamo lo scattering elastico di 2 fermioni puntiformi (di Dirac), non identici - il che facilita le cose perche' si evitano le

complicazioni derivanti dalla presenza di particelle identiche, possiamo scrivere per l'elemento di matrice al I ordine:

$$T_{fi}(s, s', r, r') = e \bar{u}'(p_2', s') \gamma^\mu u(p_2, s) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}'(p_1', r') \gamma^\nu u(p_1, r)$$

visto che abbiamo ora a che fare con due correnti di transizione per particelle a spin $\frac{1}{2}$. Prendendo il caso in cui le particelle incidenti non sono polarizzate, e non misuriamo la polarizzazione dello stato finale, dovremo calcolare la quantità, estensione di quella analoga calcolata in precedenza:

$$\frac{1}{4} \sum_{s, s', r, r'} |T_{fi}(s, s', r, r')|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

dove come al solito si somma sugli indici ripetuti (in questo caso μ e ν). Questa forma è l'estensione dell'espressione trovata prima per lo scattering elettrone-"pione": tutti e 2 i 4-tensori che compaiono nell'espressione sono ora costruiti con le correnti per particelle a spin $\frac{1}{2}$, e hanno la forma:

$$L^{\mu\nu} = 2 \left[p_1'^\mu p_1^\nu + p_1'^\nu p_1^\mu + \frac{q^2}{2} g^{\mu\nu} \right]$$

$$M_{\mu\nu} = 2 \left[p_{2\mu}' p_{2\nu} + p_{2\nu}' p_{2\mu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right]$$

dove come al solito si è trascurata la massa dell'elettrone e del mu. I soliti calcoli, piuttosto laboriosi anche se non difficili, danno come risultato la sezione d'urto differenziale, nel sistema del LAB (quello in cui 2 è in quiete prima della collisione):

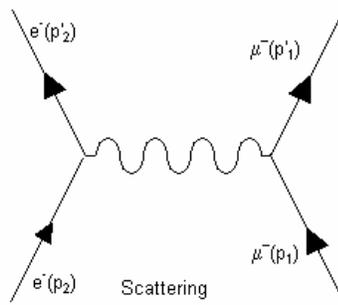
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4 |\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left(1 - \frac{q^2 \tan^2 \theta/2}{2m_2^2} \right)$$

Questa espressione per la sezione d'urto differenziale tiene conto della natura a spin 1/2 e della massa finita di proiettile e bersaglio; il termine aggiuntivo è dovuto allo scattering dell'elettrone da parte del momento magnetico del mu.

8. La reazione $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$: simmetria di crossing

Una delle reazioni piu' interessanti, da un punto di vista generale, e' l'annichilazione di una coppia fermione - antifermione, che puo' avvenire tramite meccanismi simili in processi elettromagnetici, deboli o forti. Vogliamo esaminare brevemente le caratteristiche della sezione d'urto per il processo puramente elettromagnetico $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, descritto (a energie non troppo elevate, diciamo sotto 10-20 GeV) con grande accuratezza dalla QED e pietra di paragone per molti altri processi meno accuratamente conosciuti.

Per calcolare la sezione d'urto, consideriamo il diagramma di Feynman per lo scattering $e-\mu$ nell' approssimazione a 1 fotone:

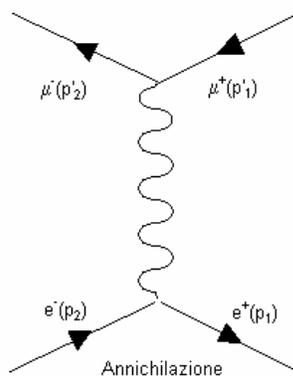


L'ampiezza corrispondente, come visto prima, si scrive:

$$T_{fi}(s, s', r, r') = (-e)\bar{u}_{(\mu)}(p_2', s')\gamma^\mu u_{(\mu)}(p_2, s) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} (-e)\bar{u}_{(e)}(p_1', r')\gamma^\nu u_{(e)}(p_1, r)$$

$$q = p_1 - p_1'$$

Per l'annichilazione che stiamo considerando il diagramma di Feynman allo stesso ordine perturbativo e':



Si dimostra che la seconda ampiezza si ottiene dalla prima mediante una semplice regola di sostituzione: se scriviamo la reazione originale come

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$$

la seconda si ottiene dalla prima spostando l'elettrone da destra a sinistra della freccia, e il mu da sinistra a destra. Nel farlo, dobbiamo sostituire a ogni particella spostata la corrispondente antiparticella, e per esse sostituire gli impulsi uscenti con altrettanti entranti, e viceversa.

L'ampiezza si scrive allora come:

$$T_{fi}(s, s', r, r') = (-e)\bar{u}_{(\mu)}(p_2', s')\gamma^\mu v_{(\mu)}(p_1, r') \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} (-e)\bar{v}_{(e)}(p_1, s)\gamma^\nu u_{(e)}(p_2, r)$$

$$q = p_1 + p_2$$

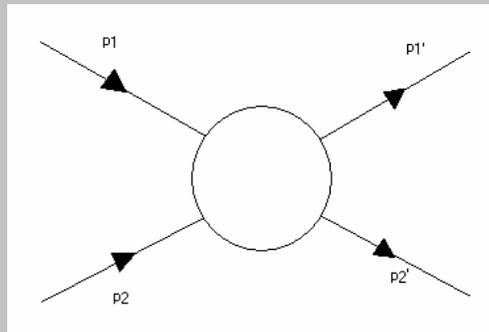
Questa proprietà della QED, che si estende a tutti i possibili ordini perturbativi, si chiama *simmetria di crossing*.

Crossing

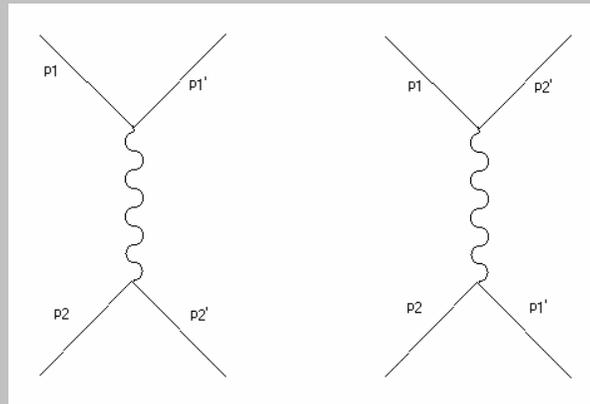
Il significato preciso e l'origine della simmetria di crossing si colgono appieno solo attraverso una trattazione adeguata del formalismo perturbativo applicato ai processi di scattering in teoria dei campi. Volendone dare un'idea approssimativa, ci si può rifare al caso più semplice, quello di una 'QED senza spin'. A titolo di esempio, consideriamo il processo di scattering puramente elettromagnetico fra due particelle fittizie, prive di interazione forte, identiche e a spin zero:

$$a^+ + a^+ \rightarrow a^+ + a^+$$

nell'approssimazione di ordine più basso. Definiamo le quantità cinematiche come segue:



Ci sono in gioco due diagrammi a un fotone:



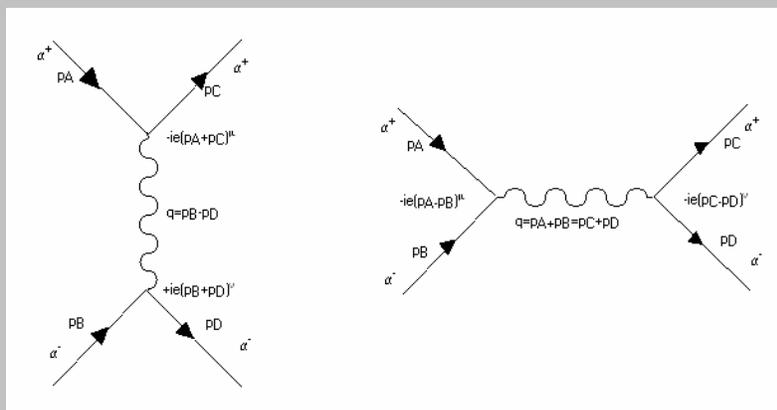
come conseguenza dell'identita' delle due particelle nello stato finale.
L'ampiezza per il processo citato si scrive allora, usando le regole elementari della QED:

$$A^{(1)}(a^+a^+) = K \left(-e^2 \frac{(p_1 + p_1')_\mu (p_2 + p_2')^\mu}{(p_2 - p_2')^2} - e^2 \frac{(p_1 + p_2)_\mu (p_2 + p_1')^\mu}{(p_2 - p_1')^2} \right)$$

Consideriamo ora il processo:

$$a^+ + a^- \rightarrow a^+ + a^-$$

L'ampiezza a un fotone per questo processo si rappresenta anch'essa tramite due diagrammi:



Avvalendosi delle regole canoniche della QED, si trova per questa ampiezza:

$$A^{(1)}(a^+a^-) = K \left(e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (p_D + p_B)^\mu}{(-p_B + p_D)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2} \right)$$

La simmetria di *crossing* (che si *dimostra* essere valida in QED, e si *assume* per altre interazioni sulla base del teorema CPT e di proprietà ragionevoli dell'interazione stessa) mette in relazione l'*ampiezza invariante* (ossia, la quantità in parentesi nell'espressione sopra) per il processo

$$a + b \rightarrow c + d$$

con quelle per i processi '*crossati*'

$$a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$$

$$a + \bar{d} \rightarrow c + \bar{b}$$

$$b + \bar{c} \rightarrow \bar{a} + d$$

etc

Secondo la simmetria di crossing, sono uguali le ampiezze per i processi che si ottengono scambiando ogni particella con la sua antiparticella, e cambiando il segno del corrispondente 4-impulso, nel passarla da una parte all'altra della freccia. Quindi p.es.:

$$A[a(p_A) + b(p_B) \rightarrow c(p_C) + d(p_D)] = A[a(p_A) + \bar{c}(-p_C) \rightarrow \bar{b}(-p_B) + d(p_D)]$$

etc (ci possono essere segni - extra se un numero dispari di fermioni viene spostato).

Questo consente di ottenere immediatamente l'ampiezza per lo scattering $a^+ a^-$ da quella per lo scattering $a^+ a^+$:

$$\begin{aligned} & A^{(1)}[a^+(p_A) + a^-(p_B) \rightarrow a^+(p_C) + a^-(p_D)] \\ &= A^{(1)}[a^+(p_A) + a^+(-p_D) \rightarrow a^+(p_C) + a^+(-p_B)] \\ &\rightarrow A^{(1)}(a^+ a^-) = K \left[-e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (-p_D - p_B)^\mu}{(-p_B + p_D)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2} \right] \end{aligned}$$

Qual è il significato di ciascuno dei due? Il primo diagramma rappresenta un processo di *scattering*, in cui viene scambiato un fotone virtuale fra le due particelle cariche; il secondo diagramma rappresenta un processo di *annichilazione* in un fotone virtuale, seguito da uno di *materializzazione*. Nel primo caso, il 4-impulso del fotone virtuale è la *differenza* dei 4-impulsi della particella negativa, incidente e diffusa, e il suo "modulo quadro" è il quadrato del 4-impulso trasferito nel processo ($q^2 = t$); nel II caso, il 4-impulso del fotone virtuale è la *somma* dei 4-impulsi delle due particelle, positiva e negativa, e il suo "modulo quadro" è il quadrato dell'en. totale nel CM ($q^2 = E_{CM}^2 = s$). Si noti ancora una volta come la comparsa del II diagramma, con il significato indicato, sia caratteristica di una descrizione relativistica, con trasformazione di massa in energia e viceversa, senza analogie in una descrizione tramite potenziali.

Può valere la pena di spendere ancora qualche parola per chiarire il significato e i limiti dell'equivalenza degli effetti delle risonanze nei due

canali s e t ; per fare questo, limitiamoci per semplicità a considerare processi a due corpi. Sappiamo già che due qualsiasi delle variabili di Mandelstam s, t, u sono necessarie e sufficienti a descrivere la reazione $a + b \rightarrow c + d$; insieme a questa reazione, consideriamo le altre 2 che si ottengono per crossing:

$$I: \quad a + b \rightarrow c + d$$

$$II: \quad a + \bar{c} \rightarrow \bar{b} + d$$

$$III: \quad a + \bar{d} \rightarrow c + \bar{b}$$

(Altre combinazioni si possono ottenere per coniugazione di carica degli stati iniziale e finale). Il fatto di aver chiamato canale I la reazione corrispondente è del tutto arbitrario; per essa l'espressione delle variabili di Mandelstam è:

$$s \equiv s_I = (p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2 - (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2(E_a E_b - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_b| \cos \theta_{ab})$$

$$t \equiv t_I = (p_a - p_c)^2 = (E_a - E_c)^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_c)^2 = m_a^2 + m_c^2 - 2(E_a E_c - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_c| \cos \theta_{ac})$$

$$u \equiv u_I = (p_a - p_d)^2 = (E_a - E_d)^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_d)^2 = m_a^2 + m_d^2 - 2(E_a E_d - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_d| \cos \theta_{ad})$$

Se ora consideriamo la reazione chiamata canale II, per essa abbiamo:

$$s_{II} = (p_a + p_{\bar{c}})^2 = (E_a + E_{\bar{c}})^2 - (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_{\bar{c}})^2 = m_a^2 + m_{\bar{c}}^2 + 2(E_a E_{\bar{c}} - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_{\bar{c}}| \cos \theta_{a\bar{c}})$$

$$t_{II} = (p_a - p_{\bar{b}})^2 = (E_a - E_{\bar{b}})^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_{\bar{b}})^2 = m_a^2 + m_{\bar{b}}^2 - 2(E_a E_{\bar{b}} - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_{\bar{b}}| \cos \theta_{a\bar{b}})$$

$$u_{II} = (p_a - p_d)^2 = (E_a - E_d)^2 - (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_d)^2 = m_a^2 + m_d^2 - 2(E_a E_d - |\mathbf{p}_a| \cdot |\mathbf{p}_d| \cos \theta_{ad})$$

La simmetria di crossing prevede che, nelle reazioni II e III, i 4-impulsi delle particelle crossate cambino di segno, rispetto a quello nella reazione originale (I), il che si traduce nelle seguenti relazioni:

$$p_{\bar{c}} = -p_c$$

$$p_{\bar{b}} = -p_b$$

$$p_{\bar{d}} = -p_d$$

e quindi:

$$\begin{cases} s_{II} = (p_a + p_{\bar{c}})^2 = (p_a - p_c)^2 = t_I \\ t_{II} = (p_a - p_{\bar{b}})^2 = (p_a + p_b)^2 = s_I \\ u_{II} = (p_a - p_d)^2 = u_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{III} = (p_a + p_{\bar{d}})^2 = (p_a - p_d)^2 = u_I \\ t_{III} = (p_a - p_c)^2 = t_I \\ u_{III} = (p_a - p_{\bar{b}})^2 = (p_a + p_b)^2 = s_I \end{cases}$$

Quindi, nelle tre reazioni legate dalla simmetria di crossing, le variabili di Mandelstam giocano ruoli diversi: lo stesso invariante che ha il significato di (en. totale nel CM)² nella reazione I (canale s) assume quella di (4-impulso trasferito)², diretto o incrociato, nelle reazioni II e III (canali t e u), e viceversa.

Si faccia attenzione al fatto che lo stesso invariante assume però valori diversi nei diversi canali: p.es., se usiamo il riferimento del CM per il canale s troviamo:

$$\theta_{ab} = 0 \rightarrow \cos \theta_{ab} = 1 \rightarrow s_I = m_a^2 + m_b^2 + 2(E_a E_b - |\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_b|)$$

$$\rightarrow s_I \geq (m_a + m_b)^2$$

$$\theta_{ac} = \theta^* \rightarrow \cos \theta_{ac} = \cos \theta^* \rightarrow t_I = (m_a^2 + m_c^2) - 2(E_a E_c - |\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_c| \cos \theta^*)$$

$$\rightarrow \frac{(m_1^2 - m_3^2 - (m_2^2 - m_4^2))}{2\sqrt{s}} - (p_1^* + p_3^*) \leq t_I \leq \frac{(m_1^2 - m_3^2 - (m_2^2 - m_4^2))}{2\sqrt{s}} - (p_1^* - p_3^*)$$

$$\theta_{ad} = \pi - \theta^* \rightarrow \cos \theta_{ad} = -\cos \theta^* \rightarrow u_I = (m_a^2 + m_d^2) - 2(E_a E_d + |\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_d| \cos \theta^*)$$

$$\rightarrow \frac{(m_1^2 - m_4^2 - (m_2^2 - m_3^2))}{2\sqrt{s}} - (p_1^* + p_4^*) \leq u_I \leq \frac{(m_1^2 - m_4^2 - (m_2^2 - m_3^2))}{2\sqrt{s}} - (p_1^* - p_4^*)$$

Per il canale t :

Nel limite di energie elevate, in cui le masse a riposo siano trascurabili, l'ampiezza trovata porta alla sezione d'urto differenziale (nel CM):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta^*)$$

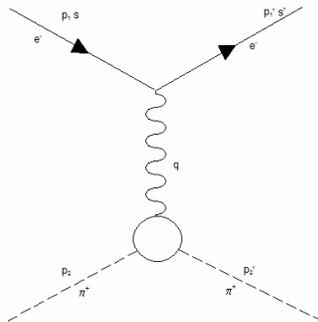
che, integrata sull'angolo solido, dà la sezione d'urto totale:

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}$$

Quindi, la pura QED prevede una sez. d'urto differenziale simmetrica avanti/indietro, e una dipendenza dall'energia 'liscia' come $1/E^2$: l'unificazione elettrodebole aggiunge, al I ordine, un altro diagramma di annichilazione (in un bosone Z^0), in conseguenza del quale entrambe le conclusioni sopra riportate devono essere corrette quando $E \sim M_Z$ (comparsa di asimmetrie angolari, andamento risonante della sez. d'urto totale).

9. Scattering da una particella non puntiforme; fattore di forma invariante per il "pione"

Vogliamo ora estendere i risultati trovati prima per la sezione d'urto elettrone-"pione" al caso in cui quest'ultimo sia dotato di struttura: in altre parole, vogliamo studiare gli effetti di una distribuzione di carica non puntiforme per una particella di massa finita. In generale, la caratteristica di non essere puntiforme deriva da effetti di altre interazioni (non elettromagnetiche: in particolare, le interazioni forti): poiche' queste non sono, a questo stadio, ben conosciute (e in realta' sono comunque difficili da maneggiare nel caso di stati legati, come un pione), dobbiamo basarci su proprieta' generali di invarianza per fissare la forma possibile della corrente elettromagnetica del "pione". Il diagramma di Feynman corrispondente, all'ordine piu' basso, al processo che stiamo considerando e':



dove il "blob" al vertice del "pione" indica che non si tratta di un puro vertice QED.

a. Invarianza di Lorentz dell'interazione

Il problema e' quello di trovare una combinazione 4-vettoriale dei 4-vettori disponibili al vertice: essi sono evidentemente p_2, p_2', q , con la condizione cinematica:

$$p_2' = p_2 + q$$

I 4-vettori indipendenti sono quindi 2, che possiamo scegliere come:

$$\begin{aligned} p_2' + p \\ p_2' - p = q \end{aligned}$$

Inoltre, essi possono essere in generale moltiplicati per un 4-scalare: ce ne e' uno solo indipendente, visto che p.es.

$$\begin{aligned} (p_2')^2 &= (p_2)^2 = m^2 \\ \rightarrow p_2 \cdot p_2' &\text{ unico 4-scalare indipendente} \end{aligned}$$

Si puo' scegliere piu' utilmente come il modulo quadro del 4-impulso trasferito, q . Allora, la forma piu' generale della corrente e':

$$j_\pi^\mu = e \left[F(q^2)(p' + p)^\mu + G(q^2)q^\mu \right] e^{-iq \cdot x}$$

b. Gauge invariance

Come e' noto, l'invarianza di gauge della QED porta alla conservazione della corrente:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \rightarrow \partial_\mu j_\pi^\mu &= e \partial_\mu \left[F(q^2)(p' + p)^\mu + G(q^2)q^\mu \right] e^{-iq \cdot x} \\ &= -iq_\mu e \left[F(q^2)(p' + p)^\mu + G(q^2)q^\mu \right] e^{-iq \cdot x} \\ \rightarrow \partial_\mu j^\mu &= 0 \Rightarrow q_\mu j^\mu = 0 \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$q_\mu \left[F(q^2)(p_2 + p_2')^\mu + G(q^2)q^\mu \right] = 0$$

Si ha:

$$\begin{cases} q_\mu (p_2 + p_2')^\mu = (p_2 - p_2')_\mu (p_2 + p_2')^\mu = 0 \\ q_\mu q^\mu \neq 0 \end{cases}$$

quindi $G(q^2)=0$. In conclusione, per un "pione" non puntiforme la corrente e.m. generalizzata si scrive:

$$j^\mu = e(p_2 + p_2')^\mu F(q^2)$$

F , che e' un invariante di Lorentz per costruzione, e' il *fattore di forma (e.m.) del "pione"*, ed e' quindi una generalizzazione della analoga quantita' statica (per altro non invariante) trovata prima. E' immediato verificare che l'effetto della presenza di $F(q^2)$ nell'ampiezza si traduce, per la sezione d'urto, nell'averne un fattore moltiplicativo uguale a $|F(q^2)|^2$

Interpretazione di $F(q^2)$

Mentre risulta chiara l'interpretazione del fattore di forma statico, in quanto trasformata di Fourier della distribuzione spaziale di carica, la situazione non e' altrettanto chiara per il fattore di forma invariante. Tuttavia, nel particolare sistema di riferimento del CM, si ha:

$$q^2 = (E' - E, \mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 = (E' - E)^2 - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 = 0 - \mathbf{q}^2 = -|\mathbf{q}|^2$$

visto che la collisione e' elastica. Quindi, in questo particolare riferimento il modulo² del 4-impulso trasferito e' una quantita' puramente 3-dimensionale, e il fattore di forma puo' essere interpretato come nel caso statico. Questo semplice significato fisico tuttavia non e' invariante....

10. Fattori di forma elettromagnetici del nucleone

L'ultimo passo che dobbiamo fare adesso e' considerare lo scattering fra due fermioni, come nel caso precedente, uno dei quali sia dotato di struttura: questo e' esattamente il caso dello scattering elettromagnetico fra un elettrone (o un mu) e un protone o neutrone. Si noti che l'interazione elettromagnetica del neutrone non e' nulla perche' esso, malgrado abbia carica totale nulla, e' dotato di momento di dipolo magnetico.

Analogamente al caso trattato sopra dello scattering da un pione carico, la prima e piu' importante domanda che dobbiamo porci e' quale sia la forma della 4-corrente legata al nucleone.

A questa domanda e' piu' facile rispondere se, per prima cosa, riscriviamo in forma alternativa la corrente di una particella di Dirac:

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

La riscrittura e' possibile grazie all' *identita' (o decomposizione) di Gordon*.

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}[(p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-p')_\nu]$$

Dimostrazione

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu + \gamma^\mu}{2}\right]u(p) = \frac{1}{2}\bar{u}(p')[\gamma^\mu + \gamma^\mu]u(p)$$

Poiche'

$$\begin{cases} \not{p}u = mu \\ \not{p}'\bar{u} = m\bar{u} \end{cases}$$

$$\rightarrow \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[\not{p}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}]u(p)$$

$$\not{p}'\gamma^\mu = p^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu$$

$$\gamma^\mu\not{p} = \gamma^\mu\gamma^\nu p^\nu$$

$$\rightarrow \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[p^\nu\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu p^\nu]u(p)$$

Ora, si puo' scrivere sempre:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$$

Quindi:

$$\rightarrow \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[p^\nu(g^{\nu\mu} - i\sigma^{\nu\mu}) + (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})p^\nu\right]u(p)$$

$$= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[p^\nu - ip^\nu\sigma^{\nu\mu} + p^\mu - i\sigma^{\mu\nu}p^\nu\right]u(p)$$

$$= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[(p^\nu + p^\mu) - ip^\nu\sigma^{\nu\mu} + i\sigma^{\mu\nu}p^\nu\right]u(p)$$

$$= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[(p^\nu + p^\mu) + i\sigma^{\mu\nu}(p^\nu - p^\nu)\right]u(p)$$

La scomposizione appena descritta e' interessante perche' mostra che, per una particella di Dirac, la corrente e.m. e' composta da due parti:

$$\frac{e}{2m}u(p')(p+p')^\mu u(p) \quad \text{legata alla carica, come quella di una particella scalare}$$

$$\frac{ie}{2m}\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p-p')_\nu u(p) \quad \text{termine aggiuntivo}$$

Per capire il significato del II termine, e' utile considerarne il limite per basse velocita'

Limite non relativistico del termine aggiuntivo

Consideriamo per questo scopo l'espressione degli spinori di Dirac nel limite di basse velocita':

$$u(p) = \left(\frac{E+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi_i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_i \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \phi_i \end{pmatrix}$$

$$u(p') = \left(\frac{E'+m}{2m} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi_i' \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{E'+m} \phi_i' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_i' \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \phi_i' \end{pmatrix}$$

Per interpretare il significato del termine occorre considerare l'interazione fra il termine stesso (in quanto parte della corrente e.m.) con un campo e.m. esterno A_μ . Dobbiamo cioe' valutare nel limite citato la quantita':

$$\frac{ie}{2m} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p) q_\nu A_\mu$$

dove A_μ e' un campo esterno, che possiamo per lo scopo presente considerare statico. Poiche' stiamo considerando lo scattering da un potenziale, l'energia non cambia (v. prima): allora la componente temporale del 4-impulso trasferito deve essere nulla, quindi:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} A_\mu q_\nu &= \sigma^{\mu k} A_\mu q_k = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^k - \gamma^k \gamma^\mu) q_k A_\mu = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^k q_k - \gamma^k \gamma^\mu q_k) A_\mu \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^k q_k - \gamma^k \gamma^\mu q_k) A_\mu = \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^k q_k - \gamma^k \gamma^0 q_k) A_0 + \frac{i}{2} (\gamma^j \gamma^k q_k - \gamma^k \gamma^j q_k) A_j \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^k q_k + \gamma^0 \gamma^k q_k) A_0 + \frac{i}{2} (\gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j) q_k A_j \\ &= \frac{i}{2} (2\gamma^0 \gamma^k q_k) A_0 + \frac{i}{2} (\gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j) q_k A_j \end{aligned}$$

Il primo termine da':

$$\frac{i}{2} (2\gamma^0 \gamma^k q_k) A_0 = \frac{i}{2} (2\beta \alpha^k q_k) A_0 = \frac{i}{2} (2\alpha^k q_k) A_0 = \frac{i}{2} (2\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q}) A_0$$

L'elemento di matrice di questo operatore fra gli stati definiti prima e'

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} \phi_i' & \phi_i' \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{q}) \begin{pmatrix} \phi_i \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \phi_i \end{pmatrix} \right] iA_0 = \left[\begin{pmatrix} \phi_i' & \phi_i' \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \phi_i \end{pmatrix} \right] iA_0 \\
& = \left[\begin{pmatrix} \phi_i' & \phi_i' \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{2m} \phi_i \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \phi_i \end{pmatrix} \right] iA_0 \\
& = \left[\phi_i' \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{2m} \phi_i + \phi_i' \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})}{2m} \phi_i \right] iA_0
\end{aligned}$$

Ora

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p})$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{q})$$

$$\rightarrow (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p}' \times \mathbf{q})]$$

$$= \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{q} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}')] = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{q} \times \mathbf{q}] = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{p}')$$

che e' trascurabile nel limite non relativistico perche' e' del II ordine negli impulsi.

Il secondo termine da':

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \sum_{j,k} (\gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j) q_k A_j = \frac{i}{2} \sum_{l,j,k} [(-\sigma_l) q_k A_j + \sigma_l q_j A_k] \\
& = \frac{i}{2} \sum_l \sigma_l (\mathbf{q} \times \mathbf{A})_l = \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{A})
\end{aligned}$$

Si trova quindi

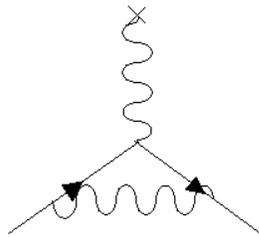
$$\frac{ie}{2m} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p) q_\nu A_\mu \rightarrow -\frac{e}{2m} \phi^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{A}) \phi$$

Ora, questa e' la densita' di energia di interazione: quando si esegue l'integrale su tutto il volume, includendo il fattore $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$, derivante dai fattori esponenziali nelle onde piane, si trova che l'integrando puo' essere riscritto, tramite un'integrazione per parti, come:

$$-\frac{e}{2m} \phi^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \phi \equiv \frac{e}{2m} \phi^{\dagger} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) \phi$$

Morale: nel limite non relativistico, il termine aggiuntivo ha il significato di *densità di energia magnetica* del momento di dipolo magnetico (di Dirac) nel campo magnetico esterno.

Il momento magnetico di Dirac, che compare nell'espressione, è quello "regolare", in cui il fattore giromagnetico g è uguale a 2. A ordini perturbativi superiori l'espressione data sopra della corrente e.m. dell'elettrone non è esatta: la presenza di correzioni radiative, del tipo di quella (all'ordine α^3) mostrata in figura (*correzione di vertice*):



modifica (leggermente, in questo caso, data la piccolezza di α) l'espressione della corrente. L'insieme delle correzioni radiative alla corrente e.m. di Dirac è notevolmente complicato: la correzione più importante è quella al momento magnetico, che viene corretto del fattore $1+\kappa_e$, che, all'ordine α^3 , vale $\approx (1 + \alpha/2\pi)$ (risultato ottenuto per la prima volta da Schwinger nel 1949).

Il fattore giromagnetico, per una particella, è il rapporto fra momento magnetico e momento angolare: per un leptone carico

$$\gamma = \frac{\mu}{j}$$

$$\mu \approx \frac{e\hbar}{2mc}, j = \frac{1}{2}\hbar$$

$$\rightarrow \gamma \approx \frac{e\hbar}{2mc} \frac{2}{\hbar}$$

che in unità naturali è

$$\gamma \equiv g \frac{e}{2m} \approx 2 \frac{e}{2m}$$

Come è noto, il fattore $g \approx 2$, non spiegabile con un modello classico dell'elettrone, è stato uno dei grandi successi dell'equazione di Dirac. La piccola differenza fra g e 2, che è appunto il valore predetto dall'equazione di Dirac (il famoso $g-2$ dei leptoni carichi, diverso da zero a causa appunto delle correzioni radiative, e forse anche per

nuovi effetti fisici fuori dal Modello Standard), e' una delle quantita' meglio misurate in fisica, e, in particolare per il mu, e' tuttora oggetto di sofisticate indagini teoriche e sperimentali. Si usa scrivere:

$$\mu = \frac{e}{2m}(1 + \kappa_e)$$

dove $e\kappa_e/2m$ e' il *momento magnetico anomalo* dell'elettrone.

Per introdurre questa prima correzione, conviene riesprimere la corrente introducendo il mom. magnetico anomalo:

$$j^\mu = \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[(p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (1 + \kappa_e) q_\nu \right] u(p)$$

Usando la identita' di Gordon al contrario, si trova:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) &= \frac{1}{2m} \bar{u}(p') \left[(p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \\ \rightarrow \bar{u}(p') (p + p')^\mu u(p) &= \bar{u}(p') (\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu) u(p) \\ \rightarrow j^\mu &= \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + i\sigma^{\mu\nu} (1 + \kappa_e) q_\nu \right] u(p) \\ \rightarrow j^\mu &= \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu + i\kappa_e \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p) \end{aligned}$$

che rappresenta la prima correzione alla corrente di Dirac: come si vede facilmente avendola scritta in questa forma, essa consiste nell'aggiunta di un termine, dovuto alla *corrente di momento magnetico anomalo*. Questa non e' tuttavia la fine della storia: l'insieme delle correzioni radiative dei vari tipi, e ai vari ordini perturbativi, introduce una dipendenza da q^2 di tutte e due le componenti della corrente. I calcoli di queste correzioni alla corrente sono notevolmente complicati, pur essendo in linea di principio fattibili a qualsiasi ordine; si usa tenere conto delle correzioni moltiplicando ciascun termine per una funzione (invariante) di q^2 , chiamata *fattore di forma* dell'elettrone:

$$j^\mu = \frac{e}{2m} \bar{u}(p') \left[f(q^2) \gamma^\mu + g(q^2) i\kappa_e \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p)$$

Ci si puo' chiedere se sia ovvio che l'espressione generale della corrente e.m. di un fermione si possa sempre scrivere in questo modo. Mentre una risposta dettagliata a questa domanda puo' solo venire dai corsi e dai testi di teoria dei campi, si accenna qui a come argomenti

generali di simmetria portino a questa conclusione. La corrente e' un'espressione bilineare nel campo di Dirac, con la caratteristica di Lorentz di essere un 4-vettore. Ricordando che le espressioni bilineari covarianti di ordine piu' basso sono della forma

$$\bar{u}' O_i u, \quad O_i = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5$$

osserviamo prima di tutto che le ultime due possono essere escluse perche' porterebbero a violazione della parita'. Con le prime tre dobbiamo costruire un 4-vettore, usando i 4-vettori e 4-scalari disponibili. Essi possono essere scelti come

$$\begin{cases} q = p' - p \\ P = p' + p \end{cases} \text{ 4-vettori} \\ \gamma \\ q^2 \text{ 4-scalare}$$

Allora l'espressione piu' generale sara':

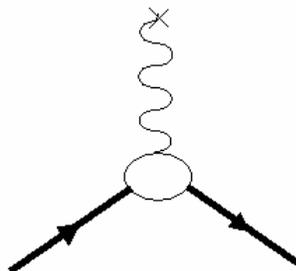
$$J_\mu = a(q^2)q_\mu + b(q^2)P_\mu + c(q^2)\gamma_\mu + d(q^2)\sigma_{\mu\nu}q_\nu + e(q^2)\sigma_{\mu\nu}P_\nu$$

Si puo' dimostrare, usando :

*l'eq. di Dirac, cui soddisfano gli spinori iniziale e finale
la conservazione della corrente elettromagnetica*

che solo 2 risultano indipendenti e non nulli

Risulta ora abbastanza ovvio come si possa affrontare il problema della corrente e.m. dei nucleoni: possiamo, in analogia al caso dei leptoni, condensare la nostra ignoranza delle correzioni di vertice alla corrente (che in questo caso non saranno piccole, a causa delle interazioni forti: usando un linguaggio un po' antiquato ma chiaro, il diagramma di Feynman a un fotone per il nucleone



contiene già delle "correzioni radiative" dovute alle interazioni forti - p.es. emissione e riassorbimento di *pioni virtuali* da parte del nucleone, che devono comparire in qualche modo nella corrente: siamo quindi condotti a scriverla in analogia a quella per l'elettrone come

$$j_p^\mu = e\bar{u}(p') \left(F(q^2) \gamma^\mu + G(q^2) i\kappa_p \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu \right) u(p)$$

$$\kappa_p = ?$$

Per ragioni di comodità di calcolo si preferisce ridefinire i fattori di forma come segue:

$$F_1(q^2) = F(q^2)$$

$$F_2(q^2) = 2MG(q^2)$$

$$\rightarrow j_p^\mu = e\bar{u}(p') \left(F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i\kappa_p F_2(q^2)}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right) u(p)$$

In questo caso, il momento magnetico anomalo del nucleone, molto ben conosciuto sperimentalmente, è invece difficile da calcolare teoricamente; altrettanto difficili da calcolare sono i fattori di forma. Dimenticando per ora il problema di calcolarli, e supponendo di conoscerli sperimentalmente, possiamo sostituire l'espressione della corrente nell'elemento di matrice, e ricalcolare la sezione d'urto differenziale. Ovviamente, il sostituto del 4-tensore $M^{\mu\nu}$, che possiamo chiamare $B^{\mu\nu}$, dovrà mantenere le stesse caratteristiche di Lorentz: la sua definizione è, in analogia a quella di $M^{\mu\nu}$

$$B^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \langle p', s' | j_p^\mu | p, s \rangle \langle p', s' | j_p^\nu | p, s \rangle^*$$

La presenza dei fattori di forma, assenti nel processo $e+\mu \rightarrow e'+\mu'$ nell'approssimazione a un fotone, cambia l'espressione della sezione d'urto differenziale, che diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} (A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \theta/2)$$

$$\begin{cases} A(q^2) = F_1^2(q^2) - \kappa_p^2 \frac{q^2}{4M^2} F_2^2(q^2) \\ B(q^2) = -\frac{q^2}{2M^2} (F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2))^2 \end{cases}$$

Questa e' la *formula di Rosenbluth* per lo scattering elastico $e,\mu+N$. Per evitare il termine di interferenza fra F_1 e F_2 , che compare nella formula, si definiscono i fattori di forma *elettrico e magnetico*

$$G_E(q^2) = F_1 + \frac{\kappa_p q^2}{4M^2} F_2$$

$$G_M(q^2) = F_1 + \kappa_p F_2$$

Con essi la formula di Rosenbluth diventa:

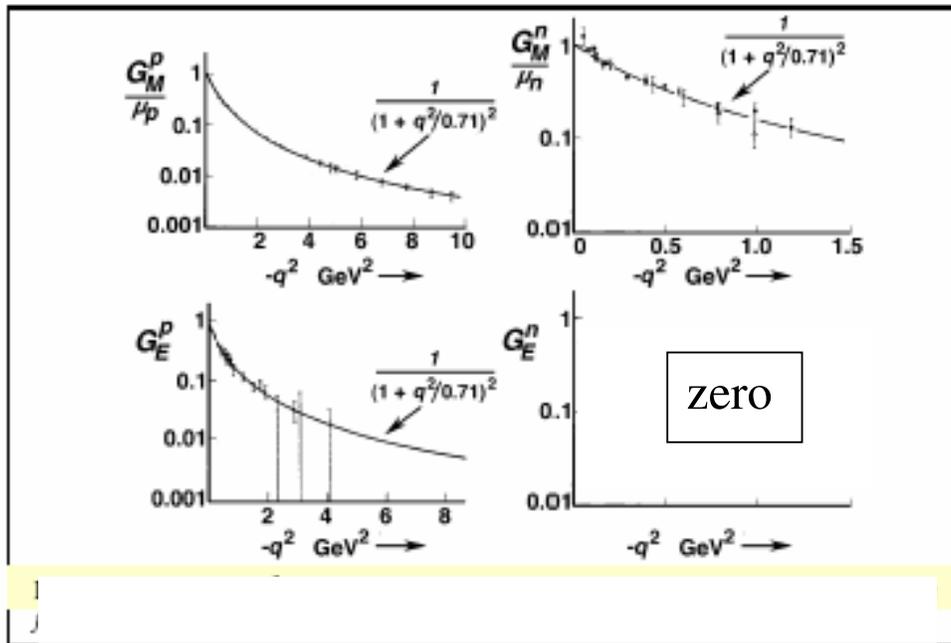
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left[\frac{G_E^2 - (q^2/4M^2) G_M^2}{1 - q^2/4m^2} - \frac{q^2}{m^2} G_M^2 \tan^2(\theta/2) \right]$$

Storicamente, l'importanza di questa sezione d'urto e' molto grande, perche' e' proprio attraverso esperimenti di scattering elastico di elettroni da nuclei e nucleoni che si sono misurati i raggi e le distribuzioni di carica e momento magnetico di questi ultimi (soprattutto a SLAC negli anni '50-'60, da parte di Hofstadter et al).

Anche per il neutrone si definiscono due fattori di forma, elettrico e magnetico; e' inoltre uso comune definire anche opportune combinazioni lineari di essi, i cosiddetti fattori di forma *isoscalare e isovettoriale*:

$$G^s = \frac{G_p + G_n}{2}, \quad G^v = \frac{G_p - G_n}{2}$$

L'andamento dei fattori di forma invarianti per il nucleone e' mostrato nelle seguenti figure:



L'indicazione "zero" per il fattore di forma elettrico del neutrone e' solo approssimata: in realtà piccoli contributi sono osservati (v. sotto).

Si osservi come il fit dipolare ai fattori di forma preveda un andamento $\propto 1/q^4$ per grandi momenti trasferiti, che nella sezione d'urto risulta in un fattore $1/q^8$, e in un andamento globale $1/q^{12}$!

Se questo a prima vista può stupire, si rifletta sul significato di questa sezione d'urto: il processo considerato è quello *elastico*, che al crescere del momento trasferito diventa trascurabile nei confronti di tutti i canali anelastici che si aprono. Se si vuole, questo fatto da solo mostra che il nucleone è un sistema composto, dotato di una struttura.

Il fattore di forma elettrico del neutrone non può ricevere contributi dipolari statici (a $q^2=0$), se non da termini della corrente che violino sia P , sia CP e che sarebbero quindi molto piccoli; di fatto, diversi esperimenti stanno cercando, con tecniche assai particolari, di metterli in evidenza. Termini a carattere quadripolare, effettivamente osservati, danno contributi piccoli.

Riguardo i fattori di forma invarianti, come accennato sopra a proposito di quello del pione, rimane il problema di una loro convincente interpretazione fisica, che non è ovvia a priori. Un aiuto in questa interpretazione viene dall'uso di un particolare sistema di riferimento, il *riferimento di Breit*: in esso, i fattori di forma possono essere effettivamente interpretati come trasformate di Fourier delle densità di carica e di momento magnetico del nucleone.

Il riferimento di Breit e' quello in cui l'energia del nucleone non varia, quindi il nucleone rimbalza elasticamente, come contro un muro infinitamente rigido, conservando la sua energia. Consideriamo le componenti del 4-impulso trasferito nel sistema di Breit:

$$q = (E_p, \mathbf{p}) - (E_{p'}, \mathbf{p}') = (E - E', \mathbf{p} - \mathbf{p}') \equiv (0, \mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

Vediamo allora che il sistema di Breit gioca lo stesso ruolo, per la componente *differenza di energia*, del sistema del CM per la componente *somma degli impulsi*: le due quantita' sono rispettivamente nulle nei due sistemi. Quindi nel sistema di Breit:

$$q^2 = -|\mathbf{q}|^2$$

Ora, se in questo riferimento il nucleone non cambia la sua energia nella collisione, non cambia nemmeno il modulo del suo impulso; altrettanto dicasi per l'elettrone. La corrente del nucleone si puo' scrivere in generale, in base alla decomposizione di Gordon:

$$\begin{aligned} j_p^\mu &= e\bar{u}(p') \left(F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) i\kappa_p \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2M} q_\nu \right) u(p) \\ &= e\bar{u}(p') \left(\gamma^\mu (F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2)) - \frac{(p^\mu + p'^\mu)}{2M} \kappa_p F_2(q^2) \right) u(p) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} j_p^0 = e\bar{u} \left(+\frac{|\mathbf{q}|}{2} \right) \left(\gamma^0 [F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2)] - \frac{\kappa_p F_2(q^2)}{2M} \left(\frac{E + E'}{-2E} \right) \right) u \left(-\frac{|\mathbf{q}|}{2} \right) \\ j_p^i = e\bar{u} \left(+\frac{|\mathbf{q}|}{2} \right) \left(\gamma^i [F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2)] + \frac{\kappa_p F_2(q^2)}{2M} \left(\frac{p^i - p'^i}{=0} \right) \right) u \left(-\frac{|\mathbf{q}|}{2} \right) \end{cases}$$

Svolgendo l'algebra:

$$\bar{u}\gamma^0 u = 2M, \bar{u}u = 2E$$

$$\begin{aligned} j_p^0 &= e\bar{u}\left(1 + \frac{|\mathbf{q}|}{2}\right)\left[\gamma^0 F_1(q^2) + \gamma^0 \kappa_p F_2(q^2) - \frac{\kappa_p F_2(q^2) E}{M}\right] u\left(-\frac{|\mathbf{q}|}{2}\right) \\ &= eF_1(q^2)2M + e\kappa_p F_2(q^2)2M - e\frac{\kappa_p F_2(q^2)2E^2}{M} \\ \rightarrow &= 2Me\left[F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2)\left(1 - \frac{E^2}{M^2}\right)\right] \\ j_p^i &= e\bar{u}\left(1 + \frac{|\mathbf{q}|}{2}\right)\left[\gamma^i \underbrace{\left[F_1(q^2) + \kappa_p F_2(q^2)\right]}_{=G_M}\right] u\left(-\frac{|\mathbf{q}|}{2}\right) \end{aligned}$$

Quindi, nel sistema di Breit:

$$\begin{aligned} q^2 &= (E - E', \mathbf{p} - (-\mathbf{p}))^2 = 0 - (2|\mathbf{p}|)^2 = -4|\mathbf{p}|^2 \\ \rightarrow 1 - \frac{E^2}{M^2} &= -\frac{E^2 - M^2}{M^2} = -\frac{|\mathbf{p}|^2}{M^2} = \frac{q^2}{4M^2} \\ \rightarrow \begin{cases} j_p^0(q^2) = 2MeG_E(q^2) \\ \mathbf{j}_p(q^2) = e\bar{u}\boldsymbol{\gamma}uG_M(q^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Le componenti della 4-corrente sono quindi, nel sistema di Breit, proporzionali ai fattori di forma, potendo essere interpretate perciò come le trasformate di Fourier delle densità di carica elettrica e di momento magnetico.

11. Scattering anelastico

Caso elastico

E' utile dare un'occhiata alla cinematica della reazione elastica, se non altro per introdurre un po' di vocabolario e notazione, che risulterà poi utile per il caso dello scattering anelastico. Nel vertice del nucleone abbiamo, in conseguenza alla conservazione del 4-impulso

$$\begin{aligned} p + q &= p' \\ \rightarrow (p + q)^2 &= p'^2 \rightarrow p^2 + q^2 + 2p \cdot q = p'^2 \\ p^2 &= p'^2 = M^2 \\ \rightarrow 2p \cdot q &= -q^2 \end{aligned}$$

Se usiamo il riferimento del LAB, trascurando la massa dell'elettrone (o del mu):

$$P^\mu = (M, \mathbf{0})$$

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) \approx (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$$

$$p'^\mu \approx (|\mathbf{p}'|, \mathbf{p}')$$

$$\rightarrow q^2 \approx (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}'|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| - (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}'|^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')$$

$$\rightarrow q^2 \approx (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = -2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = -2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|(1 - \cos\theta) = -4|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|\sin^2 \theta/2$$

$$Q^2 \equiv -q^2$$

$$p \cdot q \approx (M, \mathbf{0}) \cdot (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|, \mathbf{p} - \mathbf{p}') = M(|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|)$$

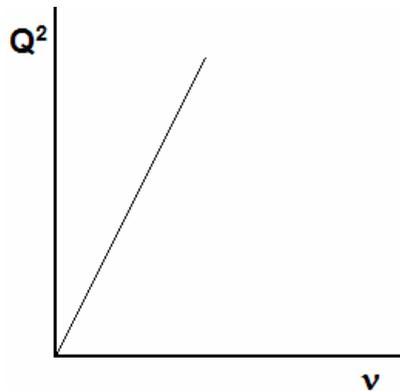
$$\nu \equiv |\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'| \rightarrow p \cdot q \approx M\nu$$

Si trova cosi' la relazione

$$\nu = \frac{Q^2}{2M}$$

$$\rightarrow \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \approx \frac{1}{1 + (2p/M)\sin^2 \theta/2}$$

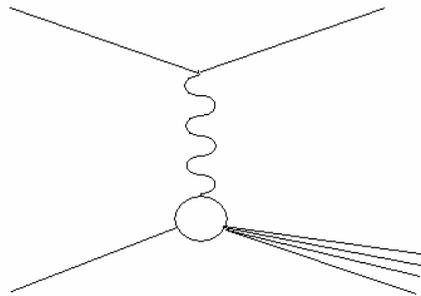
Nel piano delle variabili Q^2, ν la I relazione e' rappresentata da una retta.



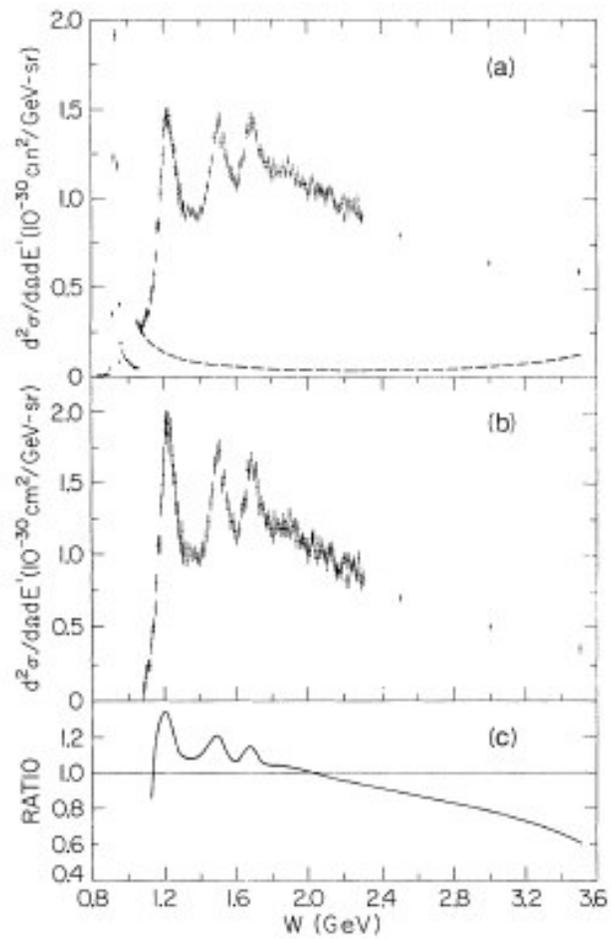
Tenuto conto che Q^2 e' la 'massa al quadrato' del fotone virtuale scambiato nel processo, possiamo vedere inoltre che l'asse etichettato ν ($Q^2=0$) corrisponde a processi che coinvolgono fotoni reali.

Caso anelastico

Il processo di scattering elastico non è l'unico possibile: oltre alle numerose varianti in cui vengono emessi, dalla particella entrante e/o uscente, uno o più fotoni, al crescere dell'energia e del 4-impulso trasferito diventano via via più probabili, e addirittura dominanti, processi nei quali il nucleone urtato subisce una trasformazione di qualche tipo. Il diagramma di Feynman generico per un processo anelastico è:

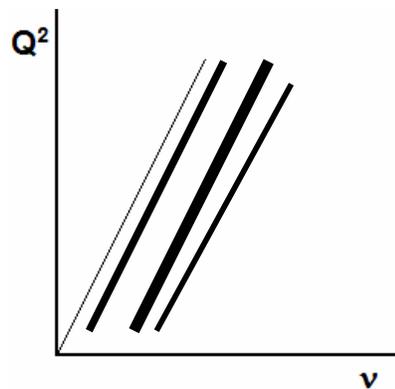


Fino a che le energie in gioco non sono troppo elevate, il fenomeno tipico è la produzione di stati risonanti (v.dopo), che sono di fatto stati eccitati del nucleone: fra le varie proprietà che li caratterizzano, qui ci interessa in particolare la massa, che è superiore ma non molto più grande di quella del nucleone. La figura mostra la sezione d'urto differenziale per lo scattering anelastico di elettroni da protoni nella regione delle risonanze barioniche; la sezione d'urto è rappresentata in funzione della quantità W , la massa invariante uscente dal vertice del protone. Nel caso anelastico, essa non ha più il valore fisso $W=M$, ma ovviamente varia. Le distribuzioni mostrate nella figura (dall'esperimento storico di Bloom et al, SLAC 1969) si riferiscono a angoli (fissi) di scattering nel LAB di 6° e 10° , e mostrano molto chiaramente, oltre al "picco elastico" in corrispondenza di $W=M$, anche la struttura a livelli degli stati eccitati del protone. In senso lato, e con le opportune modifiche, questo esperimento è il fratello maggiore di quello di Franck e Hertz, che mostrò per la prima volta la struttura dei livelli atomici!



Se consideriamo un caso in cui, invece del nucleone, lo stato finale contiene un suo stato eccitato (risonanza di massa M), la relazione cinematica trovata prima si scriverà

$$2M\nu = Q^2 + M'^2 - M^2$$



Essa e' rappresentata da una retta parallela alla precedente, e spostata di una quantita' legata alle masse M, M' .

Senza ripetere tutta la discussione sulla sezione d'urto fatta per il caso elastico, e' abbastanza intuitivo come questa volta la sezione d'urto differenziale *inclusiva* (ossia, integrata sui gradi di liberta' derivanti della frammentazione del nucleone) sia una funzione non del solo Q^2 , ma anche della massa invariante W . Quindi, possiamo accettare una generalizzazione della formula di Rosenbluth in questa forma:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 (W_2(\nu, q^2) + W_1(\nu, q^2) \tan^2 \theta/2)$$

Ci sono un paio di osservazioni da fare:

- a. La sezione d'urto differenziale dipende ora sia da E' , sia dall'angolo: questo avviene perche', nel caso anelastico, E' e θ sono gradi di liberta' indipendenti
- b. I "fattori di forma" dipendono ora sia da Q^2 , sia da W , perche' la massa dei prodotti di frammentazione del nucleone non e' fissa. Essi vengono in questo caso chiamati *funzioni di struttura*

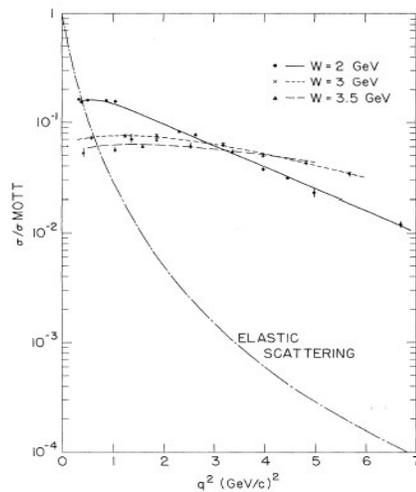
L'andamento delle funzioni di struttura con Q^2 , W e', a priori, ancor meno calcolabile di quello dei fattori di forma. Tuttavia, in una regione cinematica estrema, i dati sperimentali diventano inaspettatamente semplici. La regione piu' interessante e' quella con Q^2, ν entrambi molto grandi (scattering profondamente in elastico, o *Deep Inelastic Scattering - DIS*)

12. Deep inelastic scattering: lo *scaling*

La caratteristica piu' importante dei processi di *DIS* e' lo *scaling* (approssimato) delle funzioni di struttura. Il fenomeno dello *scaling* fu predetto prima del 1969 da Bjorken, sulla base di un'estensione audace e penetrante dei cosiddetti *modelli ad algebra delle correnti* (il lavoro di Bjorken fu pubblicato solo nel 1969, ma l'idea originale era di un paio di anni prima); esso fu osservato sperimentalmente per la prima volta a SLAC nel 1968-69, e immediatamente interpretato da Feynman in termini del cosiddetto *modello a partoni*, che reintroduceva per una via completamente nuova l'idea di costituenti elementari degli adroni, gia' proposta alcuni anni prima, per spiegare la complessa zoologia delle particelle a interazione forte, nella forma del *modello a quark*. In un breve volgere di tempo (pochi anni) l'identificazione fra il modello a partoni e quello a quark fu compiuta

grazie a una nuova teoria di campo dell'interazione forte, la *cromodinamica quantistica*. Nei trent'anni che sono seguiti, e fino ad oggi, lo studio dello scaling nel *DIS*, e delle sue violazioni, non ha mai smesso di restare al centro dell'attività di ricerca in fisica delle particelle.

Abbiamo detto prima che le funzioni di struttura per lo scattering anelastico sono funzioni sia di Q^2 , sia di ν : la predizione di Bjorken è che, nel limite di $Q^2, \nu \rightarrow \infty$, ma con Q^2/ν finito, le funzioni di struttura diventino funzioni appunto del solo rapporto $x = Q^2/2M\nu$. Non è molto utile oggi ripercorrere la strada seguita da Bjorken per arrivare a questa predizione, che, a posteriori, ha quasi della chiarezza, mentre è estremamente istruttivo osservare i primi risultati di SLAC, riportati nel seguente grafico "parlante":



Si osservi che, a piccoli angoli, la sezione d'urto differenziale dipende principalmente da W_2 : quindi $\sigma/\sigma_{Mott} \approx W_2$. È immediato osservare come, al variare del valore di q^2 , la funzione W_2 resti circa costante, tanto più quanto più grande è W : è illuminante il confronto con lo stesso rapporto per il processo elastico (una combinazione dei fattori di forma), che sullo stesso intervallo di q^2 scende di 3 o 4 ordini di grandezza! Il messaggio che si ricava da questa osservazione è che i processi anelastici, quando sono *profondamente anelastici*, sono sostanzialmente insensibili al "grado di penetrazione" della sonda elettromagnetica nella struttura del nucleone: poiché il q^2 dell'evento, inversamente proporzionale al quadrato della "lunghezza d'onda" del fotone virtuale scambiato, è una misura diretta della scala di distanze sondata, concludiamo provvisoriamente che, *per questa classe di processi, non troviamo una scala di distanze caratteristica*: fatto in marcato contrasto con il caso elastico, in cui si osserva viceversa una chiara indicazione dell'esistenza di una scala di

distanze dell'ordine di 1 fm. Per approfondire l'interpretazione di questo risultato, conviene per prima cosa riscrivere la sezione d'urto inclusiva per il DIS in termini delle variabili di Bjorken, per introdurre la terminologia correntemente adottata nella letteratura: partendo dall'espressione trovata prima

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 (W_2(\nu, q^2) + W_1(\nu, q^2) \tan^2 \theta/2)$$

introduciamo le *variabili di Bjorken* x e y così definite:

$$\begin{cases} x = \frac{-q^2}{2M\nu} \\ y = \frac{\nu}{E_1} \end{cases}$$

Allora la sezione d'urto si può scrivere

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dx dy} \right|_{LAB} = \frac{\pi\alpha^2 M y}{2E_1 E_3 \sin^4 \theta/2} (W_2 \cos^2 \theta/2 + 2W_1 \sin^2 \theta/2)$$

in cui le funzioni di struttura dipendono da 2 variabili cinematiche indipendenti (es. Q^2, ν , oppure Q^2, x , ...). Conviene anche introdurre due nuove espressioni per le funzioni di struttura, che sfortunatamente sono indicate dagli stessi simboli usati per i fattori di forma (l'uso è purtroppo consolidato):

$$\begin{cases} F_1(x, Q^2) = MW_1(Q^2, \nu) \\ F_2(x, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu) \end{cases}$$

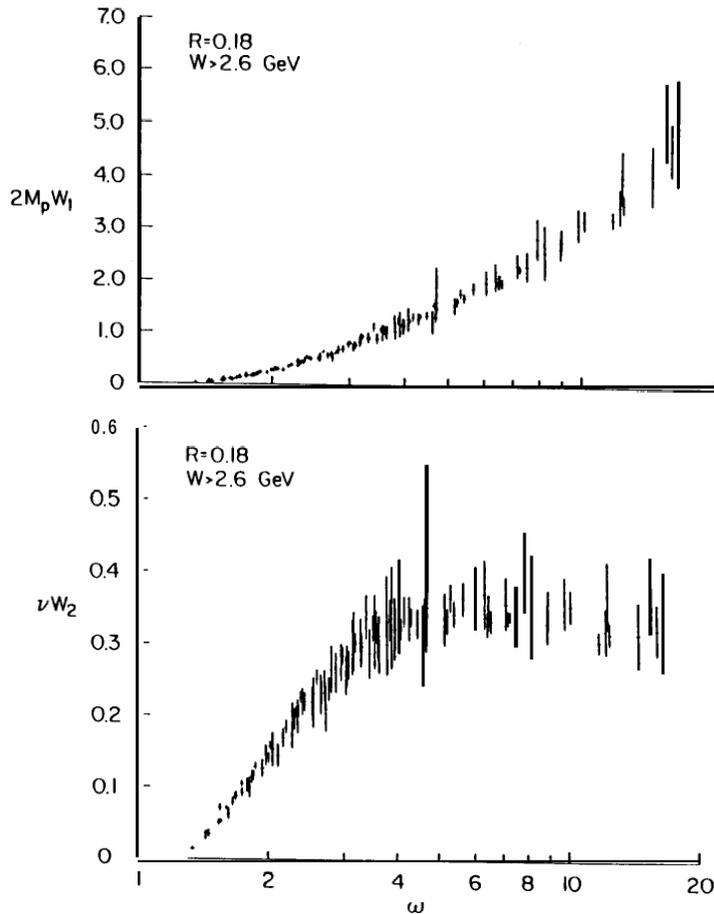
In questo modo la sezione d'urto differenziale si scrive:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2 M E_1}{Q^4} \left[2xF_1 \left(\frac{1+(1-y)^2}{2} \right) + (1-y)(F_2 - 2xF_1) - \frac{M^2 xy F_2}{s - M^2} \right]$$

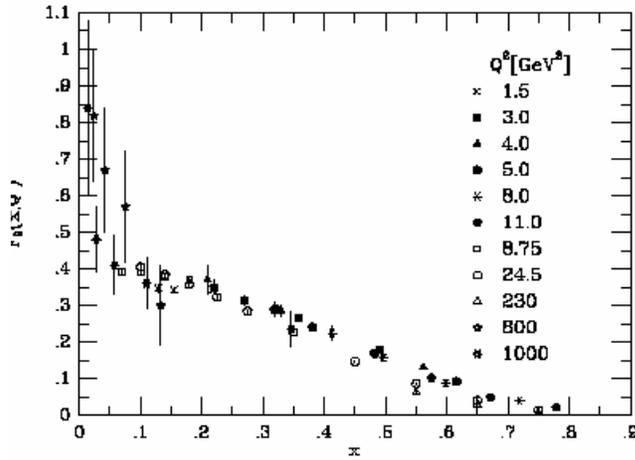
Nel limite di DIS (Q^2, ν grandi, x finito) la predizione di scaling è allora che

$$\begin{cases} F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x) \\ F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x) \end{cases}$$

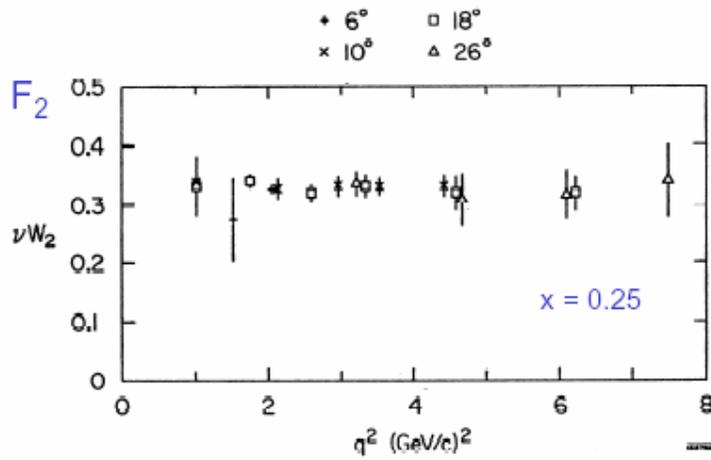
Nella figura che segue, $2F_1$ e F_2 misurate nei primi esperimenti a SLAC sono graficate in funzione di $\omega=1/x$:



I dati si riferiscono ad eventi DIS, con $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ e $W > 2.6 \text{ GeV}$: i grafici non lasciano dubbi sulla dipendenza delle due funzioni di struttura dalla sola variabile x ! Altri modi di vedere la cosa:



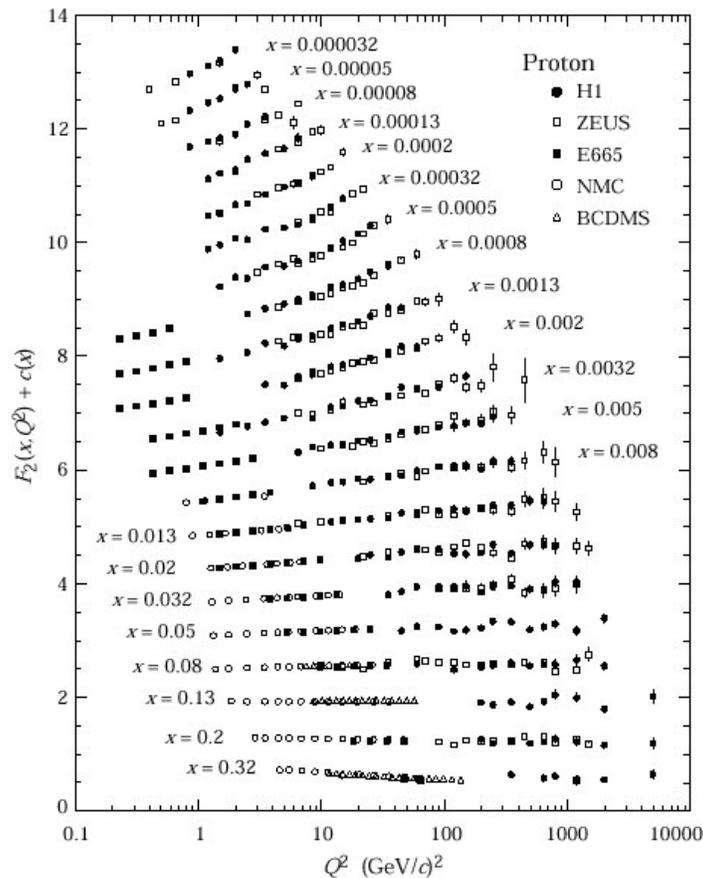
Un'unica funzione della sola x
 Notare il range di Q^2 !



L'indipendenza dal Q^2

Una compilazione di dati abbastanza recenti mostra la stessa cosa, in maggior dettaglio, per F_2 vs q^2 :

Structure Functions



Si vede qui ancor piu' chiaramente che, fissato x sufficientemente grande (>0.02 , approssimativamente) tutti gli esperimenti vedono lo stesso valore di F_2 , indipendentemente dal particolare valore di q^2 e ν a cui misurano la sezione d'urto. Si noti che la scala delle ascisse e' logaritmica, mentre quella delle ordinate e' lineare! Come gia' visto nei grafici precedenti (F_2 in funzione di x), al variare di x la funzione cambia, crescendo notevolmente per $x \rightarrow 0$: questo limite corrisponde alla massima anelasticita' (momento trasferito piccolo e/o massa invariante uscente dal vertice del protone grande), mentre il limite opposto $x \rightarrow 1$ corrisponde al caso elastico.

Lo scaling non e' una proprieta' assoluta delle funzioni di struttura: dai grafici e' gia' abbastanza evidente che la indipendenza da q^2 e' parzialmente rimossa in alcune regioni cinematiche. Di fatto, sulla base delle proprieta' dell'interazione di colore, che determina le proprieta' degli adroni, un certo livello di violazione dello scaling e' da attendersi; queste violazioni vengono sistematicamente osservate, e forniscono informazioni importanti sulle caratteristiche delle interazioni forti in regime perturbativo.

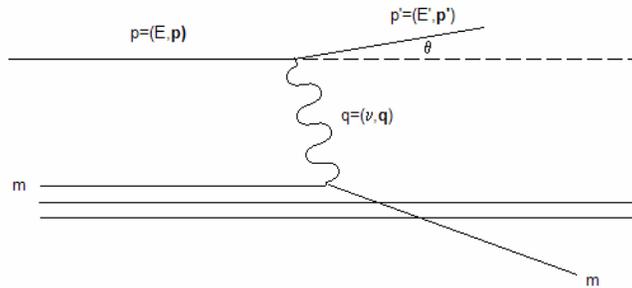
13. Il modello a partoni

L'interpretazione di Feynman del fenomeno dello scaling, proposta immediatamente dopo la divulgazione dei primi dati sperimentali, e' basata su un modello estremamente semplice della struttura del nucleone.

Mentre non ci sono discussioni sull'attribuzione a Bjorken della pre/postdizione del fenomeno dello scaling, ne' sulla attribuzione a Feynman del modello a partoni, la cronologia esatta e l'interscambio fra teoria ed esperimento per l'evoluzione della fisica del DIS non sono privi di controversie. Una ricostruzione superficiale, certamente lacunosa ma non troppo manchevole, porta a ritenere che molti degli elementi chiave, teorici e sperimentali, per la scoperta dei costituenti del nucleone fossero 'nell'aria', nei centri di ricerca della West Coast, almeno dal 1967, e che lo scaling, ufficialmente scoperto sperimentalmente prima di essere predetto teoricamente, fosse un'idea che circolava in qualche forma a SLAC gia' prima del 1968, particolarmente nel gruppo dei teorici. D'altra parte, la possibile esistenza di costituenti puntiformi del protone fu menzionata da Panofsky, direttore di SLAC, a una conferenza nel 1968. Il Comitato dei premi Nobel ha, per conto suo, risolto la questione attribuendo il premio agli sperimentali (Friedman, Kendall e Taylor, 1990), e non ai teorici.

Come si ricordera', le funzioni di struttura sono l'estensione al caso anelastico dei fattori di forma: ora, il fattore di forma di una carica puntiforme e' evidentemente una costante, indipendente da q^2 , nella misura in cui si trascurano correzioni radiative. Allora, se assimiliamo le funzioni di struttura, nella regione profondamente anelastica, a dei fattori di forma basicamente equivalenti a quelli elastici, la loro sostanziale indipendenza da q^2 indica che, per quel tipo di processi, le cose vanno come se l'elettrone venisse diffuso "elasticamente" da costituenti puntiformi, contenuti nel protone; elasticamente, perche' su una particella puntiforme lo scattering elastico e' l'unico processo elettromagnetico possibile all'ordine piu' basso. Ovviamente, noi sappiamo che nel suo insieme il processo e' tutt'altro che elastico, visto che c'e' un getto di adroni che esce dal vertice in cui entra il protone: tuttavia, dal punto di vista della reazione inclusiva $e+p \rightarrow e'+X$, questo fatto non e' molto rilevante, visto che la sezione d'urto differenziale dipende solo da x . In altre parole, stiamo separando il problema dell'urto elettrone-costituente da quello di come poi il costituente urtato, eventualmente insieme agli altri non urtati, si trasformi nel getto di adroni che osserviamo. Si tratta ora di rendere quantitativa l'idea, per vedere se si adatta ai dati sperimentali.

Il protone si immagina dunque costituito da *partoni*, costituenti puntiformi legati fra loro ma nondimeno capaci di comportarsi come particelle libere quando urtati: la possibilita' di far coesistere pacificamente queste due proprieta', apparentemente antitetiche e per un certo tempo assai problematiche, e' stata in seguito trovata nella teoria di campo dell'interazione di colore (QCD). Una volta stabilito questo punto, e' relativamente facile spiegare lo scaling. Si consideri il "diagramma di Feynman" corrispondente a questo modello:



Vale la relazione cinematica:

$$m^2 = (m + \nu, \mathbf{q})^2 = m^2 + 2m\nu + \underbrace{\nu^2 - |\mathbf{q}|^2}_{=-q^2}$$

$$\rightarrow \nu + \frac{q^2}{2m} = 0$$

I partoni disegnati sono 3, ma questo non deve far pensare che siano in tutto e per tutto da identificare con i quark: il senso dell'identificazione con i quark, come si vedra', e' complesso e non sempre del tutto intuitivo. Se pensiamo ai partoni come particelle libere, possiamo scrivere, per lo scattering elastico dell'elettrone su un partone di massa m , l'espressione:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 \sin^4 \theta/2} \cos^2 \theta/2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \left(1 - \frac{q^2 \tan^2 \theta/2}{2m^2} \right)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4|\mathbf{p}|^2 \sin^4 \theta/2} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \left(\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \theta/2 \right)$$

L'espressione si puo' considerare come l'integrale sull'energia dell'elettrone diffuso della sezione d'urto *doppiamente differenziale*, scritta nel modo seguente:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2 \theta/2} \left(\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \theta/2 \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2m} \right)$$

La δ di Dirac fissa il vincolo cinematico fra E' e θ , caratteristico dello scattering elastico:

$$\begin{cases} \nu = E - E' \\ q^2 = -4EE' \sin^2 \theta/2 \end{cases} \rightarrow E - E' = \frac{4EE' \sin^2 \theta/2}{2m}$$

$$\rightarrow E' \left(1 + \frac{4E}{2m} \sin^2 \theta/2 \right) = E$$

$$\rightarrow E' = \frac{E}{1 + \frac{4E}{2m} \sin^2 \theta/2}$$

Introducendo la variabile di Bjorken x :

$$\nu + \frac{q^2}{2m} = 0, x = -\frac{q^2}{2m\nu} \rightarrow x = \frac{m}{M}$$

quindi x rappresenta, nel LAB, la frazione di massa del protone concentrata nel partone. Se esso ha carica ze , e se supponiamo che si tratti di una particella a spin $\frac{1}{2}$, scriviamo la sezione d'urto doppiamente differenziale come:

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2 z^2}{4E^2 \sin^2 \theta/2} \left(\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2 x^2} \sin^2 \theta/2 \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right)$$

Si puo' notare che le cose cambierebbero non poco, se si trattasse di una particella a spin nullo

Se abbiamo n_i partoni con carica $z_i e$, possiamo assumere che la sezione d'urto sia la somma delle sezioni d'urto individuali su ogni partone (questo, come e' evidente, trascura possibili effetti di coerenza fra partoni: se ci fossero, si dovrebbero sommare le ampiezze, e non le sezioni d'urto, individuali). Quindi

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2 \theta/2} \left(\cos^2 \theta/2 - \frac{q^2}{2M^2 x^2} \sin^2 \theta/2 \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right) \left(\sum_i z_i^2 n_i \right)$$

Confrontando questa sezione d'urto con quella originale dello scattering anelastico:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \theta/2} \left(W_2(\nu, q^2) \cos^2 \theta/2 + W_1(\nu, q^2) \sin^2 \theta/2 \right)$$

deduciamo:

$$W_2 = \frac{F_2}{\nu} = \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right)$$

$$W_1 = \frac{2F_1}{M} = \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \left(\frac{-q^2}{2M^2 x^2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right)$$

Il modello a partoni, nella sua versione piu' semplice, prevede dunque le seguenti proprieta' per le funzioni di struttura:

1. Relazione fra F_1 e F_2 :

$$\begin{cases} \frac{F_2}{\nu} = \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right) \\ \frac{2F_1}{M} = \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \left(\frac{-q^2}{2M^2 x^2} \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{F_2}{\nu} = \frac{2F_1}{M} \frac{2M^2 x^2}{-q^2} = \frac{2F_1}{M} \frac{2M^2 x^2}{2M\nu x} = \frac{2F_1 x}{\nu}$$

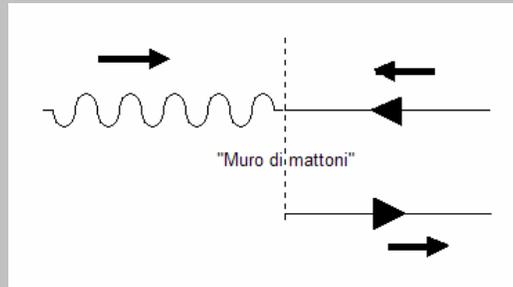
$$\rightarrow F_2 = 2F_1 x$$

Questa e' la *relazione di Callan-Gross*, che stabilisce un legame fra le due funzioni di struttura per partoni a spin $\frac{1}{2}$. Esso e' conseguenza della relazione fissa fra carica e momento magnetico per un partone che sia una particella di Dirac; tuttavia, e' interessante vedere la cosa anche da un'altra angolazione, considerando cioe' il vertice partone-fotone virtuale scambiato.

La relazione di Callan-Gross e il fotone virtuale

E' illuminante considerare la relazione fra le due funzioni di struttura dal punto di vista dell'interazione fra i partoni e il fotone virtuale scambiato nel processo. L'idea di base e' che la quantita' importante in gioco, dal punto di vista della struttura del protone, e' la sezione d'urto per la reazione 'fotonucleare' $\gamma^* + p \rightarrow X$, in cui γ^* e' il fotone virtuale scambiato. In generale ci aspettiamo, per un fotone virtuale (off mass shell, ossia con $q^2 \neq 0$), contributi sia dagli stati a polarizzazione trasversa, come per un fotone reale ($\lambda = \pm 1$), sia da quelli a polarizzazione longitudinale e "scalari" ($\lambda = 0$), presenti solo per un fotone off mass shell. Senza entrare nei dettagli del calcolo di questa sezione d'urto, si puo' afferrare il meccanismo che e' alla base della relazione di Callan-Gross se si usa un particolare riferimento, il sistema di Breit: esso e' definito come quello in cui l'impulso del partone e

quello del fotone virtuale sono collineari, e nell'urto il partone inverte la sua direzione conservando il modulo: quindi il fotone trasferisce impulso, ma non energia, appunto come un "muro di mattoni".



Sappiamo che in tutte le interazioni fra correnti di Dirac e campi vettoriali, come quello del fotone, ad alta energia vale la conservazione dell'elicità per la corrente. Essendo gli impulsi collineari, non ci sono contributi orbitali al momento angolare totale: questo vuol dire che lo spin del fotone deve trasferire una unità di momento angolare. Quindi, solo gli stati a polarizzazione trasversale possono contribuire al processo; gli stati "scalari" o a polarizzazione longitudinale non contribuiscono alla sezione d'urto se il partone ha spin $1/2$. Se il partone avesse spin 0, viceversa, sarebbero gli stati a polarizzazione trasversale a non contribuire allo scattering. Questo risultato è ottenuto in un particolare sistema di riferimento, ma si può far vedere che non cambia nell'eseguire la trasformazione di Lorentz fra il sistema di Breit e il LAB, nella misura in cui si possano trascurare componenti trasversali nell'impulso dei partoni. Se chiamiamo σ_L, σ_T le sezioni d'urto per stati di polarizzazione scalare/longitudinale e trasversale, rispettivamente, ci aspettiamo perciò di osservare il seguente comportamento:

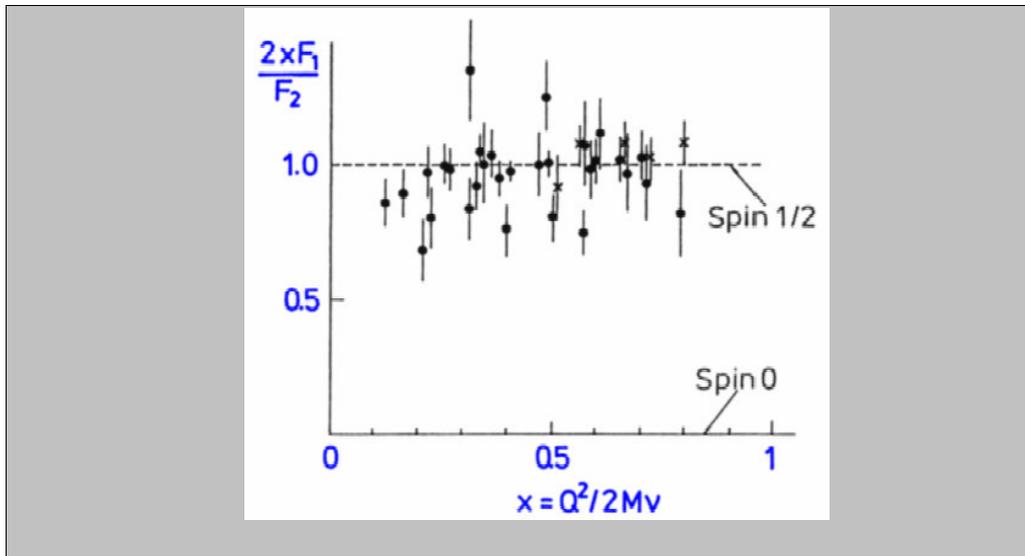
$$\frac{\sigma_T}{\sigma_L} = 0 \quad \text{partoni a spin 0}$$

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_T} = 0 \quad \text{partoni a spin } 1/2$$

Qual è la relazione fra σ_L, σ_T e le funzioni di struttura? Si può mostrare che nel limite di DIS valgono le relazioni

$$\begin{cases} \sigma_L = A \frac{1}{2x} (F_2 - 2xF_1) \\ \sigma_T = AF_1 \end{cases}$$

in cui si ritrova la relazione di Callan-Gross. Come mostra il grafico, essa è assai ben verificata



2. Scaling

Le funzioni di struttura sono effettivamente funzioni della sola x . La quantità adimensionale x è stata definita come:

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu}$$

Il suo valore max. è 1, e corrisponde al caso elastico; il valore minimo è 0, che corrisponde al caso di massima anelasticità (ν , energia persa dall'elettrone, grande).

3. Forma delle funzioni di struttura

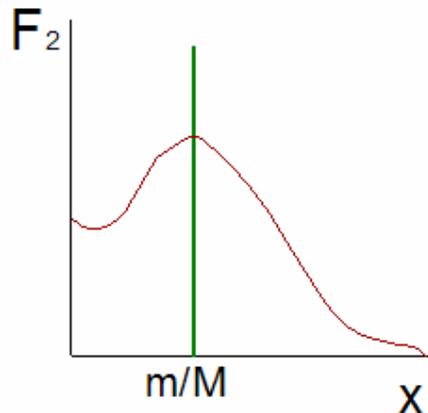
$$\begin{aligned} F_2 &= \nu \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \delta \left(\nu + \frac{q^2}{2Mx} \right) \\ &= \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) \delta \left(1 + \frac{q^2}{2Mx\nu} \right) \\ &= \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) x \delta \left(x + \frac{q^2}{2M\nu} \right) \\ &= \left(\sum_i z_i^2 n_i \right) x \delta \left(x - \frac{m}{M} \right) \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della relazione cinematica trovata prima e della proprietà della δ

$$\nu + \frac{q^2}{2m} = 0, x = -\frac{q^2}{2m\nu} \rightarrow x = \frac{m}{M}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$$

Si prevede dunque per le funzioni di struttura l'andamento semplicissimo mostrato in verde nella figura seguente (funzione δ):



L'andamento osservato sperimentalmente e' pero' quello mostrato in rosso (linea continua), e possiamo gia' indovinare che il problema principale sta nell'aver trattato i partoni come particelle libere.

Il modello a partoni fornisce dunque un'interpretazione suggestiva della fenomenologia dello scaling. Poiche' siamo portati a interpretare il caso DIS come uno scattering elastico dell'elettrone su un costituente, la cui sezione d'urto dipende ovviamente dall'impulso delle particelle incidenti, e poiche' la sezione d'urto misurata, attraverso le funzioni di struttura, dipende essenzialmente solo da x , un valore generico di x dovra' corrispondere a un particolare valore di impulso del costituente stesso, per ora abbiamo considerato solo nel riferimento del LAB.

Qual e' il significato di x in un altro riferimento? Il problema e' semplificato dal fatto che x e' un invariante:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$$

P, q : 4-impulsi di protone e fotone virtuale

Se consideriamo ora il caso di energie molto grandi, possiamo trascurare le masse in gioco (riferimento in cui il protone ha *impulso*

infinito). Allora x puo' essere interpretato come frazione di impulso del protone trasportata dal partone, infatti:

$$x = \frac{m}{M}$$

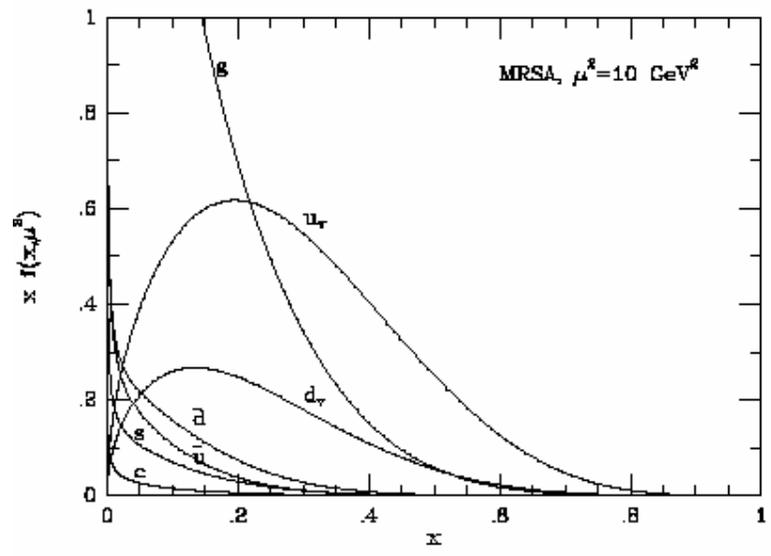
$$m^2 = x^2 M^2 = x^2 (E^2 - \mathbf{p}^2)$$

$$m^2 = (E_{partone}, \mathbf{p}_{partone})^2 = E_{partone}^2 - \mathbf{p}_{partone}^2$$

$$(E_{partone}, \mathbf{p}_{partone}) = x \cdot (E, \mathbf{P})$$

$$\rightarrow \mathbf{p}_{partone} \approx x \cdot \mathbf{P} \text{ se } m \ll |\mathbf{p}|$$

E' notevole il fatto che, misurando x , che si puo' ottenere da misure inclusive sulla cinematica dell'elettrone diffuso - Q^2 e ν , si misura in sostanza il momento del partone (ossia del quark) urtato! Quindi le distribuzioni in x raffigurano, in questa approssimazione, le distribuzioni in impulso dei partoni. Esempio: distribuzioni calcolate per i singoli flavor di quark nel protone



(calcolo da Ellis, Stirling e Webber)

Rimane da spiegare il comportamento curioso dei partoni, che risultano permanentemente confinati dentro il protone ma nondimeno sembrano comportarsi come particelle libere negli urti "duri". Mentre una spiegazione soddisfacente si deve ricercare nell'ambito della QCD, la teoria di gauge non abeliana dell'interazione di colore, puo' essere utile accennare ad alcune caratteristiche cinematiche del processo, nel riferimento in cui il protone ha impulso molto grande: il protone ha solo impulso longitudinale, e il fotone virtuale essenzialmente solo trasverso

(altrimenti non potrebbe trasferire Q^2 e ν entrambi grandi)

$$P = \left(E_p, \underset{\text{comp. trasversa}}{\mathbf{0}}, |\mathbf{P}| \right), \quad E_p = \sqrt{M^2 + |\mathbf{P}|^2} \approx |\mathbf{P}|$$

$$q = (E_\gamma, \mathbf{q}_T, 0)$$

$$\rightarrow P \cdot q \approx |\mathbf{P}| E_\gamma$$

$$\rightarrow E_\gamma \approx \frac{P \cdot q}{|\mathbf{P}|} = \frac{Q^2}{2x|\mathbf{P}|}$$

Questa e' l'energia del fotone virtuale scambiato; usando (certo in modo vago, ma abbastanza plausibile) la relazione di indeterminazione tempo-energia, possiamo dire che l'ordine di grandezza per la durata dell'interazione sara'

$$\tau_0 \sim \frac{1}{E_\gamma} \approx \frac{2x|\mathbf{P}|}{Q^2}$$

D'altra parte, l'ordine di grandezza per la "vita media" del partone urtato (ossia, per la durata della sua interazione con gli altri partoni): esso puo' essere valutato con un ragionamento simile, considerando per esempio lo scambio di energia in una "collisione soffice" fra due partoni. Si troverebbe in questo caso

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta E} \approx \frac{2x|\mathbf{P}|}{p_T^2}$$

in cui p_T e' la componente trasversa dell'impulso dei due partoni. Nella misura in cui essa e' molto minore di Q^2 , si ha:

$$\frac{\tau_0}{\tau} \approx \frac{p_T^2}{Q^2} \sim 0$$

il che mostra che durante la collisione "dura" (DIS) i partoni possono essere considerati "fermi", quindi "liberi".