

Misura di una sezione d'urto

Puo' forse essere interessante dare un'idea di come venga concretamente misurata una sezione d'urto in un esperimento.

Facciamo riferimento, inizialmente, alla definizione classica della sezione d'urto totale: essa si basa, come si e' visto, sull' attenuazione subita dall'intensita' del fascio incidente, dovuta alle interazioni con il bersaglio. Quel che troveremo si adattera' quindi al caso di un esperimento a bersaglio fisso. Come si era visto:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -\sigma n dx \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-\sigma n x}$$

in cui n e' la densita' volumetrica di centri diffusori (nuclei/cm³, p. esempio). Essa si esprime come:

$$n = \frac{\rho}{A} N_A$$

in cui ρ e' la densita' di massa, A e' la massa atomica e N_A il numero di Avogadro; nel caso di bersagli che non siano elementi puri (composti o miscele) occorre evidentemente prendere le opportune medie sui costituenti.

Un primo modo di misurare la sez. d'urto totale e' con il metodo assorbitivo: si misura cioe' la frazione di fascio che esce intatta dal bersaglio per diversi spessori:

$$\begin{aligned}\Phi(x_1) &= \Phi_0 e^{-\sigma n x_1} \\ \Phi(x_2) &= \Phi_0 e^{-\sigma n x_2} \\ \rightarrow \frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)} &= e^{-\sigma n (x_1 - x_2)} \\ \rightarrow -\ln \left(\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)} \right) &= \sigma n (x_1 - x_2) \rightarrow \sigma = -\ln \left(\frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)} \right) \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)}\end{aligned}$$

La misura dipende in modo cruciale dalla misura dei due flussi, che possiamo immaginare integrati su un dato periodo di tempo: in questo modo, siamo ricondotti al conteggio di 2 numeri di particelle di fascio:

$$\sigma = -\ln \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)}$$

La dipendenza dal logaritmo del rapporto indica che la misura non e' particolarmente sensibile. L'errore statistico su σ e' dato, nell'approssimazione in cui dominano gli errori di conteggio (Poissoniani), da:

$$\Delta\sigma = \frac{\rho N_A}{A(x_1 - x_2)} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \approx \frac{\rho N_A}{A|x_1 - x_2|} \frac{1}{\sqrt{N_2}} \quad \text{se } N_1 \gg N_2$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx \frac{1}{\sqrt{N_2} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

Dal punto di vista degli errori sistematici, a parte l'ovvia necessita' di conoscere accuratamente lo spessore efficace del bersaglio, oltre che la sua densita' e composizione chimica, si puo' osservare che occorre particolare cura nel determinare che i flussi misurati siano il piu' possibile liberi da contaminazioni di particelle spurie (fondi, prodotti da interazioni che vengono scambiati per particelle non interagenti) e che l'efficienza di conteggio sia identica per tutti gli spessori utilizzati. Inoltre, va sottolineato com e questo metodo si presti alla misura della sezione d'urto totale, ma non di quella differenziale.

Un secondo metodo fa uso dell'altra relazione

$$\frac{dn}{d\Omega} = \Phi \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

che definisce la sezione d'urto differenziale. Anche in questo caso si puo' fare riferimento alle quantita' integrate sul tempo di esposizione:

$$\frac{dn}{d\Omega} = \Delta\Phi \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dn}{d\Omega} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

Di fatto, anche la misura del rate differenziale viene fatta su angoli solidi finiti, quindi si ha piuttosto la relazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\delta n}{\delta\Omega} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

Anche in questo caso, come si vede, la misura e' ricondotta a quella del numero di eventi osservati entro ogni elemento di angolo solido, oltre che di quella del flusso integrato. In generale, non e' detto che quella che si vuole misurare sia proprio la sezione d'urto differenziale in angolo: capita che, caso per caso, sia conveniente considerare la sezione d'urto differenziale in altre quantita' (4-impulso trasferito, energia trasferita, o anche un insieme di diverse grandezze): in questo caso l'elemento di angolo solido $\delta\Omega$ deve pensarsi sostituito dall'elemento di spazio delle fasi per lo stato finale, ridotto alle quantita' di interesse, che possiamo indicare con il simbolo generico $\delta\tau$. Il conteggio del numero di eventi per ogni elemento $\delta\tau$ e'

l'operazione chiave di tutto l'esperimento: essa consiste nel collezionare dati sugli eventi prodotti, tali da consentire di *identificarli* (ossia accertarsi che si tratti proprio del tipo di evento che si vuole studiare, in mezzo alla moltitudine di eventi di tutti i tipi che vengono prodotti nell'esposizione, e *misurarli* (ossia, ricostruire impulsi e masse di tutte o parte delle particelle che sono prodotte nell'evento), a partire dai dati di trigger e misura forniti dal rivelatore). Nel compiere queste operazioni, occorre sempre tener dietro alla varie *inefficienze* presenti nei vari passi di analisi, così' come agli inevitabili *fondi* che finiranno per contaminare il campione selezionato. Vale la pena di riesprimere la sezione d'urto differenziale esplicitando il flusso integrato:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} \simeq \frac{\delta n}{\delta\tau} \frac{1}{\Delta\Phi}$$

$$\Delta\Phi = \mathcal{L} \text{ no. particelle incidenti/unita' di superficie}$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = Nnx = N \frac{\rho}{A} N_A x \quad N = \text{no. totale particelle inviate sul bersaglio}$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\tau} \simeq \frac{\delta n}{\delta\tau} \frac{A}{N\rho N_A x}$$

La quantita' $\mathcal{L}$ e' nota come *luminosita' integrata*, o *esposizione*, dell'esperimento, con dimensione $[\text{area}^{-2}]$ e dipende come si vede sia dal numero totale di proiettili inviati, sia dalle caratteristiche geometriche e chimiche del bersaglio. Essa e' una caratteristica dell'esposizione, e non dipende ne' dal rivelatore ne' dall'interazione che determina la sezione d'urto; essa puo' essere scritta come:

$$\mathcal{L} = Nnx = N \frac{\rho}{A} N_A x = \int_0^{T_{\text{esposizione}}} \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt$$

dove $d\mathcal{L}/dt$ si chiama *luminosita' istantanea*, e ha dimensione $[\text{area}^{-2}][\text{tempo}^{-1}]$.

Per quanto sia definita in modo quanto mai semplice e intuitivo, la luminosita' di un esperimento non e' mai molto facile da determinare: le difficolta' hanno a che fare con la determinazione del *flusso integrato* effettivo sul bersaglio, e con quella del *volume fiduciale* nella targhetta. A titolo di esempio, si possono considerare gli errori, statistici e sistematici, sul numero totale di particelle effettivamente inviate sul bersaglio, e gli effetti di accettazione ed efficienza sugli eventi prodotti (se l'esperimento non puo' vedere tutti gli eventi prodotti nell'elemento di spazio delle fasi $\delta\tau$, ma solo una frazione, il numero di eventi osservati deve essere corretto per questa inefficienza). Mentre queste si devono considerare come caratteristiche dell'esperimento, e non dell'esposizione in se e per se', considerazioni di varia natura portano di solito ad eliminare dal conteggio famiglie di eventi provenienti da zone del bersaglio o periodi particolari di raccolta dati che risultano in una bassa efficienza di rivelazione, il che riduce il flusso incidente e il volume di targhetta effettivamente

utilizzati. Il volume che rimane dopo queste selezioni e' piu' piccolo di quello geometrico, e si chiama appunto volume fiduciale: e' su di esso che dobbiamo basare il computo della luminosita' dell'esperimento.

Il concetto di luminosita', istantanea ed integrata, si estende al caso di esperimenti a macchine in collisione, anche se in questo caso non e' possibile esprimerla come fatto sopra per esperimenti a bersaglio fisso. Piuttosto, la luminosita' potra' esprimersi in funzione delle correnti di fascio nella macchina, e delle dimensioni geometriche dei fasci: in questo modo, essa puo' spesso essere ottenuta indirettamente da misure sulla geometria dei fasci; venendo da sistemi di misura propri dell'acceleratore, che non sono sotto il diretto controllo dell'esperimento, esse sono tuttavia talvolta soggette a notevoli incertezze sistematiche. E' quindi prassi abbastanza comune quella di utilizzare una o piu' *reazioni campione*, di sezione d'urto ben nota, come misura della luminosita'. In parole povere, si opera secondo il seguente schema, avendo per semplicita' omesso i fattori che correggono per accettazione ed efficienza:

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\text{reazione campione}} &= \sigma_{\text{reazione campione}} \frac{d\mathcal{L}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\dot{n}_{\text{reazione campione}}}{\sigma_{\text{reazione campione}}} \\ \rightarrow \sigma_{\text{reazione studiata}} &= \dot{n}_{\text{reazione studiata}} \frac{1}{\frac{d\mathcal{L}}{dt}} = \frac{\sigma_{\text{reazione campione}}}{\dot{n}_{\text{reazione campione}}} \dot{n}_{\text{reazione studiata}} \end{aligned}$$

Condizione necessaria all'utilizzo di questa tecnica e', oltre alla conoscenza dettagliata della sezione d'urto del processo campione, quella della conoscenza accurata dell'accettazione ed efficienza per la reazione campione (per la riduzione delle sistematiche), e quella di avere un rate decente di eventi campione (per la riduzione degli errori statistici). Come reazione campione si usa di spesso lo scattering elastico, la cui sezione d'urto differenziale a piccoli angoli e' di solito abbastanza ben nota: ma anche su questo punto la realta' sperimentale si rivela in pratica piu' complicata di quel che puo' sembrare. Si puo' notare come anche in questo caso si finisca per essere condotti a una misura consistente nel conteggio di eventi....