

Per lo studente A. Gozzelino

Sui decadimenti non leptonici degli iperoni Sigma

Fra gli esercizi proposti nelle prime 2 o 3 edizioni del testo di Perkins ce ne e' uno che richiede qualche riflessione.

Si considerano i decadimenti non leptonici delle Sigma

$$\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+ \quad \text{Ampiezza: } a_+$$

$$\Sigma^- \rightarrow n\pi^- \quad \text{Ampiezza: } a_-$$

$$\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0 \quad \text{Ampiezza: } a_0$$

Si vuole trovare una relazione fra le ampiezze di decadimento, tenuta presente la regola di selezione approssimata, abbastanza ben verificata in questi casi:

$$\Delta I = 1/2$$

Il problema e' che, in questo caso, non si sa come trattare la violazione dell'isospin : anche nell'ipotesi in cui valga strettamente la regola di selezione citata prima, entrambi i valori di isospin possibili per lo stato finale la soddisfano.

Ci sono due modi, di fatto equivalenti, di risolvere il problema:

Teorema di Wigner-Eckart

Se un'osservabile appartiene alla categoria detta degli *Operatori Tensoriali Irriducibili*, il calcolo del suo elemento di matrice fra due stati a valore definito del momento angolare totale puo' essere semplificato, riducendo il numero di elementi di matrice indipendenti e facendo uso dei coefficienti di *C-G*. Un altro risultato utile di *W-E* e' la previsione di regole di selezione per le transizioni, essenzialmente legate alla conservazione del momento angolare totale.

Analogamente al caso del momento angolare nello spazio ordinario, esistono gli *OTI* nell'isospazio, per i quali, naturalmente, vale *W-E*.

un caso limite particolarmente semplice di applicazione di $W-E$ si ha quando applichiamo la conservazione dell'isospin a processi forti. Questo formalismo non verra' esposto qui (per una discussione piu' completa vedere p.es. Messiah - Quantum Mechanics - pagg. 570-577).

Metodo dello *spurione*

Consideriamo prima il caso piu' familiare delle transizioni elettromagnetiche

a) Violazione dell'isospin nelle transizioni elettromagnetiche

Si fissi l'attenzione per un attimo sulla relazione di Gell-Mann - Nishijima, che e' rispettata sempre; nel caso delle transizioni elettromagnetiche fra adroni abbiamo

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

Q, Y conservati $\rightarrow I_3$ conservato

I non necessariamente conservato:

$$\Delta I_3 = 0 \not\Leftarrow \Delta I = 0, \rightarrow \Delta I = 0, \pm 1, \dots$$

\rightarrow Transizioni elettromagnetiche violano l'isospin

[Questa conclusione e' di per se' evidente, se si considera che la simmetria di isospin e' equivalente a invarianza per scambio fra quark u e d , che hanno pero' carica elettrica diversa e quindi interazioni e.m. diverse]. Nella fattispecie, l' H efficace che descrive le transizioni e.m. fra adroni contiene una parte (legata a Y) che e' isoscalare, e che quindi conserva l'isospin, e una parte (legata a I_3) che e' la 3° componente di un isovettore, e che viola l'isospin. Si puo' far vedere che, nel limite di accoppiamento minimo, ci si puo' limitare a

$$\Delta I = 0, \pm 1$$

Se la cosa continua a sembrare poco chiara, si consideri la solita espressione per l' H di interazione e.m.:

$$H_{\text{int}} = j^\mu A_\mu$$

in cui la corrente elettromagnetica, limitata per semplicità ai soli nucleoni, e trascurando il momento magnetico anomalo del neutrone, si scrive:

$$j^\mu = e\bar{p}'\gamma^\mu p$$

Definendo:

$$\begin{cases} j_{I=1}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}'\gamma^\mu p + \bar{n}'\gamma^\mu n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}' \quad \bar{n}') \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{N}' 1 \gamma^\mu N \\ j_{I=0}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}'\gamma^\mu p - \bar{n}'\gamma^\mu n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}' \quad \bar{n}') \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{N}' \tau_3 \gamma^\mu N \end{cases}$$

$$\rightarrow j^\mu = e \frac{1}{\sqrt{2}} [(j_{I=1}^\mu + j_{I=0}^\mu)] = e \frac{1}{2\sqrt{2}} (\bar{N}' 1 \gamma^\mu N + \bar{N}' \tau_3 \gamma^\mu N)$$

$$\rightarrow j^\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} e (\bar{N}' \gamma^\mu (1 + \tau_3) N)$$

Quindi:

$$H = j^\mu A_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} e [\bar{N}' \gamma^\mu N + \bar{N}' \gamma^\mu \tau_3 N] A_\mu$$

che consiste di un termine isovettoriale (ovvero: che viene ruotato come la 3° componente di un isovettore) e di uno isoscalare (ovvero: invariante per rotazioni), come anticipato.

Le proprietà di simmetria di H sono quelle dei suoi elementi di matrice, quindi delle ampiezze di transizione: nelle transizioni e.m fra nucleoni, quindi, in generale non viene conservato l'isospin. Per confronto, si consideri un modello (non l'unico possibile!) di interazione forte fra il nucleone e il mesone ρ , costruita come quella elettromagnetica (corrente x potenziale vettore):

$$H = \mathbf{j}^\mu \cdot \mathbf{p}_\mu = g \underbrace{(\bar{N}' \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} N)}_{\text{corrente di I-spin}} \cdot \mathbf{p}_\mu \quad H \text{ isoscalare}$$

Questo H è invariante per isorotazioni, quindi conserva l'isospin.

Ispirati da questa osservazione, si può allora considerare il campo e.m. (4-potenziale A_μ) sia come un isoscalare, che compare a fattore della componente isoscalare della corrente:

$$H^{(0)} = j^\mu A_\mu = \frac{e}{4} \bar{N}' \gamma^\mu N A_\mu \quad H^{(0)} \text{ isoscalare}$$

sia come un "isovettore mutilato", o "spurione":

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mu = (0, 0, A_\mu)$$

che compare a fattore della componente isovettoriale della corrente

$$\rightarrow H^{(1)} = \frac{e}{4} (\bar{N}' \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} N) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_\mu = \mathbf{j}^\mu \cdot \tilde{\mathbf{A}}_\mu \quad H^{(1)} \text{ non isoscalare}$$

Ora, attribuendo allo spurione differenza $\hat{\mathbf{A}}$ il solo numero quantico di isospin (zero carica, zero 4-impulso, ..) si può formalmente sostituire allo spurione il vettore completo:

$$\mathbf{A}_\mu = \tilde{\mathbf{A}}_\mu + \hat{\mathbf{A}}_\mu \quad \mathbf{A} \text{ vettore, } \tilde{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}} \text{ spurioni}$$

$$\rightarrow H^{(1)} = \underbrace{\frac{e}{4} (\bar{N}' \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} N) \cdot \mathbf{A}_\mu}_{\bar{H}^{(1)}} - \cancel{\frac{e}{4} (\bar{N}' \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} N) \cdot \hat{\mathbf{A}}_\mu} \quad \bar{H}^{(1)} \text{ isoscalare}$$

\hat{H} : ignorato perché non ha effetti dinamici

Questo modo di descrivere i processi elettromagnetici fra adroni equivale a dire che, quando un processo viola l'isospin, per qualche scopo esso può essere pensato come equivalente a un processo in cui l'isospin viene conservato, tramite l'aggiunta al processo stesso di una particella fittizia, lo spurione appunto, che trasporta solo l'isospin mancante, nel processo reale, a conservare l'isospin totale iniziale. Lo spurione e.m. ha $I=1, I_3=0$. Occorre chiarire che l'equivalenza non è assolutamente totale: evidentemente, due processi, uno dei quali conserva l'isospin e l'altro no, non possono essere equivalenti! Tuttavia, se il nostro scopo è quello di confrontare processi simili che ubbidiscono alle stesse regole di selezione, il formalismo è di notevole aiuto.

A titolo di esempio, si consideri il decadimento (raro!)

$$\Delta^+ \rightarrow p + \gamma$$

Con il formalismo dello spurione, ad esso associamo la reazione

$$s + \Delta^+ \rightarrow p + \gamma$$

nella quale possiamo bilanciare l'isospin:

$$\begin{aligned} |1,0\rangle|3/2,+1/2\rangle &\rightarrow |1/2,+1/2\rangle \\ a|1/2,+1/2\rangle + b|3/2,+1/2\rangle + c|5/2,+1/2\rangle &\rightarrow |1/2,+1/2\rangle \end{aligned}$$

a e' il coefficiente di C-G appropriato. Pur continuando a non sapere nulla del meccanismo dinamico del processo, possiamo pero' confrontarlo con processi simili, come :

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

$$\begin{aligned} s + \Sigma^0 &\rightarrow \Lambda^0 + \gamma \\ |1,0\rangle|1,0\rangle &\rightarrow |0,0\rangle \\ a'|0,0\rangle + b'|1,0\rangle + c'|2,0\rangle &\rightarrow |0,0\rangle \end{aligned}$$

Se la dinamica fosse la stessa nei 2 casi, il rapporto dei rate parziali si prevederebbe

$$\frac{R_\Delta}{R_\Sigma} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \frac{ph.space}{ph.space'}$$

Risultato:

Previsione:

$$\frac{R_\Delta}{R_\Sigma} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \frac{ph.space}{ph.space'} = \left(\frac{-1/\sqrt{3}}{-1/\sqrt{3}}\right)^2 \frac{259 MeV}{74 MeV} \sim 4$$

Valore sperimentale:

$$\frac{R_\Delta}{R_\Sigma} = \frac{\Gamma_\Delta \cdot BR}{1/\tau_\Sigma} = \frac{100 MeV \cdot 0.005}{\hbar c / c\tau_\Sigma} = \frac{0.5 MeV}{197 MeV \cdot fm / 2.2 \cdot 10^{-11} m} \sim \frac{0.5}{100} 10^4 \sim 50$$

Il rapporto osservato e' diverso dalla previsione, quindi il meccanismo dinamico non e' lo stesso (si osservi: la Δ e' un barione a spin $3/2$, Σ, Λ e p hanno spin $1/2$: quindi nella prima transizione cambia lo spin del barione, nella seconda no...)

b) Violazione dell'isospin nelle transizioni deboli in corrente carica

Ricordiamo ancora una volta, per i processi con $\Delta S = \pm 1$:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad Y = B + S$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta Q = 0 \\ \Delta B = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \Delta I_3 = -\frac{\Delta S}{2}$$

$$\Delta S = \pm 1 \rightarrow \Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}$$

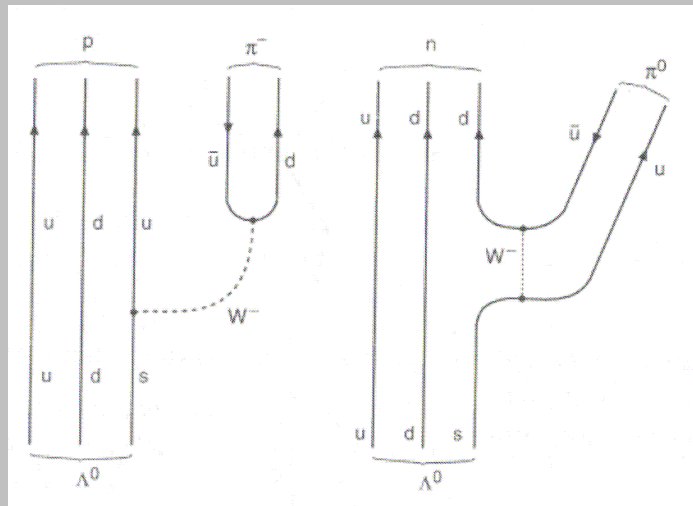
$$\rightarrow \Delta I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

Il meccanismo e' del tutto simile a quello visto prima, ma questa volta (se si assume la regola di selezione $\Delta I = 1/2$) lo spurione ha $I = 1/2$, $I_3 = \pm 1/2$.

L'interpretazione della regola di selezione (approssimata, e non assoluta) $\Delta I = 1/2$ nelle transizioni deboli con $\Delta S = 1$ non e' chiara all'interno del modello standard: si tratta basicamente di processi di emissione/assorbimento di un W fra stati di quark u e s oppure d e s (o dei corrispondenti antiquark), quindi fra un doppietto e un singoletto di isospin. Questo porta di per se' a concludere che, a livello dei quark attivi nella transizione, ci si deve aspettare appunto $\Delta I = 1/2$. Tuttavia, questa ovviamente non e' tutta la storia: di fatto, il W emesso/assorbito e' agganciato ad un'altra coppia $q\bar{q}$ (visto che stiamo considerando i decadimenti non-leptonici delle particelle strane), la quale si materializza tipicamente in un π , particella a isospin 1. Non e' quindi chiaro perche' la variazione totale di isospin sia generalmente

$$\Delta I = 1/2 \oplus 1 = 1/2, \quad \cancel{\Delta I = 3/2}$$

Il diagramma che segue illustra la situazione nel caso $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$



Rispetto al caso delle transizioni elettromagnetiche, l'hamiltoniano di interazione debole non leptonica (poco conosciuto a priori) deve avere anch'esso la proprieta' di non essere invariante per isorotazioni, e di trasformarsi come la componente di un isospinore (per dare origine a processi con $\Delta I=1/2, \Delta I_3=\pm 1/2$); si noti che in questo caso la regola di selezione esclude anche la conservazione della 3° componente dell'isospin. Anche in questo caso, dunque, si puo' ripetere il ragionamento fatto prima, e rendere H formalmente invariante per isorotazioni con l'aggiunta del contributo di uno spurione. Come al solito, l'aggiunta dello spurione consente di scrivere il processo come se l'isospin venisse conservato; possiamo richiedere che anche la stranezza venga conservata, e in questo modo lo spurione ha i numeri quantici $I=1/2, I_3=1/2, S=\pm 1$: dovendo trasportare carica nulla, si comporta quindi come un K^0 .

Applichiamo il metodo ai decadimenti indicati all'inizio

$$\begin{aligned}
s + \Sigma^+ &\rightarrow n\pi^+ & \text{Ampiezza: } a_+ \\
|1/2, -1/2\rangle|1, +1\rangle &\rightarrow |1/2, -1/2\rangle|1, +1\rangle \\
a'|\underline{1/2, +1/2}\rangle + b'|\underline{3/2, +1/2}\rangle &\rightarrow a'|\underline{1/2, +1/2}\rangle + b'|\underline{3/2, +1/2}\rangle \\
\rightarrow a_+ &= a'^2 A_{1/2} + b'^2 A_{3/2} \\
s + \Sigma^- &\rightarrow n\pi^- & \text{Ampiezza: } a_- \\
|1/2, -1/2\rangle|1, -1\rangle &\rightarrow |1/2, -1/2\rangle|1, -1\rangle \\
|\underline{3/2, -3/2}\rangle &\rightarrow |\underline{3/2, -3/2}\rangle \\
\rightarrow a_- &= A_{3/2} \\
s + \Sigma^+ &\rightarrow p\pi^0 & \text{Ampiezza: } a_0 \\
|1/2, -1/2\rangle|1, +1\rangle &\rightarrow |1/2, +1/2\rangle|1, 0\rangle \\
a''|\underline{1/2, +1/2}\rangle + b''|\underline{3/2, +1/2}\rangle &\rightarrow \alpha''|\underline{1/2, +1/2}\rangle + \beta''|\underline{3/2, +1/2}\rangle \\
\rightarrow a_0 &= a''\alpha'' A_{1/2} + b''\beta'' A_{3/2}
\end{aligned}$$

Usando i coefficienti di C-G opportuni

$$\begin{aligned}
a' &= \sqrt{\frac{2}{3}}, b' = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
a'' &= \sqrt{\frac{2}{3}}, b'' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha'' = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \beta'' = \sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
a_+ &= a'^2 A_{1/2} + b'^2 A_{3/2} = \frac{2}{3} A_{1/2} + \frac{1}{3} A_{3/2} \\
a_- &= A_{3/2} = \\
a_0 &= a''\alpha'' A_{1/2} + b''\beta'' A_{3/2} = -\frac{\sqrt{2}}{3} A_{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} \\
\rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a_0 = -\frac{2}{3} A_{1/2} + \frac{2}{3} A_{3/2} \\ a_- - a_+ = A_{3/2} - \frac{2}{3} A_{1/2} - \frac{1}{3} A_{3/2} \end{cases} &\rightarrow \sqrt{2}a_0 = a_- - a_+
\end{aligned}$$