

Invarianza, conservazione, simmetrie

1. Invarianza e conservazione in fisica classica

Come e' noto, l'uso del formalismo lagrangiano, eventualmente allargato alla descrizione di sistemi continui, come il campo elettromagnetico, permette di mettere in luce nella maniera piu' diretta il legame fra proprieta' di invarianza e leggi di conservazione. Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{equazioni di Lagrange}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \rightarrow p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{cost}$$

Il significato e' trasparente: se la lagrangiana non dipende da una delle coordinate, il corrispondente momento coniugato e' una costante del moto. L'indipendenza di L dalla coordinata e' equivalente all'invarianza di L per trasformazioni che cambiano quella coordinata: questo e' dunque il legame fra invarianza e conservazione. Si puo' quindi stabilire una corrispondenza diretta fra le simmetrie del sistema fisico considerato, descritte matematicamente da proprieta' di invarianza della lagrangiana, e leggi di conservazione:

Simmetria	Invarianza	Conservazione
Indipendenza da origine riferimento	Traslazione spaziale	Quantita' di moto totale
Indipendenza da origine dei tempi	Traslazione temporale	Energia totale
Indipendenza da orientazione riferimento	Rotazione spaziale	Momento angolare totale
Indipendenza da velocita' riferimento	Trasf. di Lorentz	Velocita' del CM

Va sottolineato che le quantita' conservate *non* sono invarianti di Lorentz: quindi il loro valore cambia nel passare da un riferimento inerziale a un altro. Tuttavia, in un dato riferimento, il loro valore e' costante per un sistema isolato.

Si noti che, mentre il significato delle leggi di conservazione e' immediato per un sistema di punti materiali che interagiscono tramite un potenziale conservativo, le cose sono piu' complicate

quando si considerano sistemi piu' generali, come p.es. un sistema di cariche che interagiscono attraverso il campo elettromagnetico: quest'ultimo e' un sistema fisico autonomo, che possiede energia, quantita' di moto, momento angolare, ed e' la somma totale di queste quantita' (per cariche e campo) che viene conservata.

Nell'ambito della teoria classica dei campi, il legame fra invarianza e conservazione e' stabilito, come e' noto, dal teorema di Noether (v. corsi di teoria dei campi).

NB Si puo' osservare come in meccanica quantistica si preferisca utilizzare il formalismo hamiltoniano (e questo e' il quadro generale nel quale si inseriscono le osservazioni che seguono), mentre in teoria dei campi si utilizzi di preferenza il formalismo lagrangiano: la ragione e' che la lagrangiana viene definita come un invariante di Lorentz, mentre l'hamiltoniano (che e' un'energia) e' la componente tempo di un 4-vettore, quindi non invariante.

2. Leggi di conservazione in meccanica quantistica e teoria dei campi

Consideriamo il valore di aspettazione di un operatore Q :

$$\langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle \rightarrow \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| Q | \psi \right\rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | Q \middle| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle$$

Usando l'eq. di Schrodinger:

$$i \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = H | \psi \rangle, \quad -i \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \langle \psi | H^\dagger$$

si ottiene

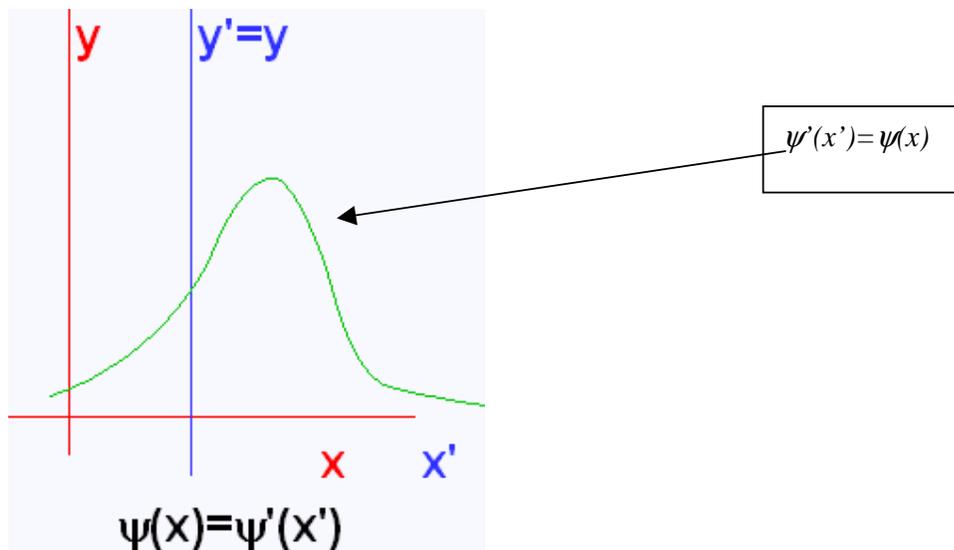
$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| Q | \psi \right\rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | Q \middle| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \\ &= i \langle \psi | H^\dagger Q | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle - i Q H | \psi \rangle \\ H^\dagger = H &\rightarrow \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = i \langle \psi | \left[[H, Q] + \frac{\partial Q}{\partial t} \right] | \psi \rangle \end{aligned}$$

Quindi, se $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$, allora $[H, Q] = 0 \rightarrow \langle Q \rangle = \text{costante}$. Questo significa che $\langle Q \rangle$ e' conservata se Q commuta con H : questa e' dunque l'origine delle leggi di conservazione in meccanica quantistica. L'idea si

estende anche al caso di un sistema di campi quantistici (v. corsi di teoria dei campi).

3. Legame fra leggi di conservazione e proprieta' di invarianza

Anche in meccanica quantistica e' possibile stabilire una connessione fondamentale fra relazioni di commutazione e proprieta' di invarianza dell'hamiltoniano (leggi: proprieta' di simmetria del sistema). Come e' noto, a ogni trasformazione del riferimento inerziale (traslazione, rotazione, trasformazione di Lorentz, inversione degli assi o del tempo) corrisponde una trasformazione del vettore di stato (leggi: funzione d'onda, nella rappresentazione posizione) del sistema. Questo si puo' vedere nel modo piu' semplice considerando p.es. una traslazione lungo l'asse x:



Come si vede, le due funzioni d'onda $\psi(x), \psi'(x')$ rappresentano lo stesso stato fisico:

$$\psi'(x') = \psi(x) \quad \text{1 stato, 2 funzioni d'onda (in 2 riferimenti diversi)}$$

E' bene aver chiaro il significato di questa equazione: le due diverse funzioni d'onda rappresentano due diversi insiemi di componenti del vettore di stato nello spazio di Hilbert, nel quale abbiamo definito due sistemi di "assi", quello delle coordinate con il primo e quello senza: questi "assi" definiscono direzioni nello spazio di Hilbert, e non devono

essere confusi con gli assi cartesiani che definiscono le direzioni nel normale spazio fisico a 3D!

Il senso matematico dell'eguaglianza è che *il valore* di ψ quando l'argomento (coordinata) ha il valore x' è lo stesso di quello di ψ quando l'argomento (coordinata) ha valore x , essendo x e x' le coordinate dello stesso punto fisico nei due riferimenti.

Si rifletta sul fatto che, contrariamente alla prima idea superficiale che spesso capita di considerare, le due funzioni d'onda hanno in generale una dipendenza funzionale diversa dalle due coordinate.

Esempio: consideriamo proprio il caso di prima, ossia la traslazione di a lungo l'asse x . Allora:

$$S : x \rightarrow x' = S(x) = x - a$$

$$S^{-1} : x' \rightarrow x = S^{-1}(x') = x' + a$$

Come cambiano le componenti dello stato? Usiamo la rappresentazione posizione, quindi il linguaggio delle funzioni d'onda; allora dovrà essere

$$\psi'(x') = \psi(x) \leftrightarrow \psi'[S(x)] = \psi(x)$$

$$\rightarrow \psi'[S^{-1}(S(x))] = \psi(S^{-1}(x))$$

$$\rightarrow \psi'(x) = \psi[S^{-1}(x)]$$

Supponiamo che nel I riferimento si abbia:

$$\psi(x) = Ne^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Allora nel II riferimento:

$$\psi'(x') = \psi[S^{-1}(x')] = Ne^{-\frac{(x'+a)^2}{2\sigma^2}} \left(= Ne^{-\frac{(x-a+a)^2}{2\sigma^2}} = Ne^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right)$$

Si noti che, come anticipato sopra, la forma funzionale cambia:

$$\psi'(x') = Ne^{-\frac{(x'+a)^2}{2\sigma^2}} \neq Ne^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} = \psi(x')$$

La situazione è a tutti gli effetti equivalente ad un cambiamento di base nello spazio degli stati, che deve conservare la norma degli stati e il valor medio delle osservabili: quindi la trasformazione degli stati e delle osservabili deve venire effettuata da un operatore

unitario. In realta', svolgendo rigorosamente l'analisi delle proprieta' dell'operatore citato, ci si accorge che la richiesta che sia unitario e' troppo restrittiva: esso puo' essere anche *antiunitario* (v. dopo a proposito del time reversal)

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \rightarrow U \text{ unitario: } U^\dagger = U^{-1}$$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle \text{ definizione del trasformato di } A$$

$$\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger A' U|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger A' U|\psi\rangle \rightarrow A = U^\dagger A' U \rightarrow A' = UAU^\dagger$$

Se A e' invariante rispetto alla trasformazione, allora A commuta con U :

$$A = A'$$

$$\rightarrow UAU^\dagger = A$$

$$\rightarrow [U, A] = 0$$

In particolare, si puo' scegliere $A=H$: se U commuta con l'hamiltoniano H , allora e' un *operatore di simmetria* ed e' una costante del moto:

$$[U, H] = 0 \rightarrow \langle U \rangle = \text{costante}$$

L'operatore U , che in generale non e' hermitiano, non e' normalmente una osservabile; tuttavia, quando U e' sia unitario sia hermitiano, e' effettivamente un' osservabile.

Puo' forse essere utile riassumere qui qualche aspetto un po' piu' formale delle considerazioni appena svolte sul modo di rappresentare, in meccanica quantistica, l'azione degli operatori di simmetria.

Consideriamo la trasformazione di simmetria come *una trasformazione del sistema di riferimento* usato per descrivere lo stato e l'evoluzione del sistema fisico: questo e' quello che viene chiamato il *punto di vista passivo* nella descrizione delle simmetrie. Lo stesso stato fisico viene quindi descritto in due riferimenti diversi per mezzo di due insiemi di coordinate diversi, collegati da una trasformazione di coordinate S (p.es. una traslazione lungo l'asse x , o altro); con trasformazione di coordinate intendiamo *qualsiasi tipo* di coordinata, incluse quelle che fissano la caratteristica di Lorentz del sistema fisico - come le componenti di un 4-vettore, di uno spinore, ... o quelle interne di flavor, colore, etc.

$$S : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = S(\mathbf{x})$$

Nello spazio degli stati, ad S corrisponde una trasformazione degli stati, inclusi gli stati base:

$$U_S : \begin{cases} |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U_S |\psi\rangle \\ |a\rangle \rightarrow |a'\rangle = U_S |a\rangle \end{cases}$$

Come risultato, uno stato generico potrà esprimersi come sovrapposizione degli stati base trasformati:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_a |a\rangle \langle a|\psi\rangle, |\psi'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\psi'\rangle \\ &\rightarrow \sum_a |a\rangle \langle a|\psi\rangle = \sum_a U_S |a\rangle \langle a| U_S^\dagger U_S \psi \\ &\rightarrow U_S U_S^\dagger = 1, \sum_a U_S |a\rangle \langle a| = 1 \rightarrow |U_S| = 1 \end{aligned}$$

La trasformazione deve essere *unitaria* o *antiunitaria* (v. dopo), perché siano preservati i moduli dei prodotti scalari fra stati.

Il modo di trattare gli operatori di simmetria in meccanica quantistica è diverso a seconda di come essi agiscono: occorre cioè fare distinzione fra le operazioni *continue* (del tutto analoghe a quelle classiche ricordate sopra: traslazioni, rotazioni, ...) e quelle *discrete* (inversione del verso positivo delle coordinate spaziali e di quella temporale, coniugazione di carica). Mentre le prime, che dipendono da un certo numero di parametri continui, hanno come limite la trasformazione identica, le seconde non dipendono da parametri e sono, evidentemente, intrinsecamente separate dalla trasformazione identica: questo rende i corrispondenti operatori hermitiani, oltre che unitari, e quindi identificabili come osservabili del sistema (v. dopo).

4. Richiami sulle simmetrie continue

Come richiamata sopra, in molti casi la trasformazione di simmetria è una trasformazione *continua* (es. traslazioni spazio-temporali, rotazioni, trasformazioni di Lorentz,...). In questi casi, l'operatore di simmetria U corrispondente dipende in modo continuo da uno o più parametri. Assumendo che, nel caso di un solo parametro α , il valore $\alpha = 0$ corrisponda all'operatore identica, possiamo scrivere una specie di sviluppo in serie di Taylor per l'operatore U :

$$U(\delta\alpha) \cong 1 + i\delta\alpha G$$

Questo e' un modo astratto di descrivere la situazione, che prescinde da come poi vogliamo rappresentare l'operatore U (p.es., per mezzo di una matrice). G e' il *generatore* della trasformazione descritta da U :

$$G = -i \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

L'inserimento di i nella definizione e' fatto per convenienza. L'operatore per una trasformazione finita si puo' trovare per iterazione. Infatti, in generale:

$$U(b) * U(a) = U(a+b)$$

Questa proprieta' non ovvia dell'operatore di simmetria, e' tuttavia piuttosto intuitiva. Ora, se $a=\alpha$, $b=d\alpha$:

$$\begin{aligned} U(\delta\alpha)U(\alpha) &= U(\alpha + \delta\alpha) \cong (1 + i\delta\alpha G)U(\alpha) \\ U(\alpha + \delta\alpha) - U(\alpha) &\cong i\delta\alpha G U(\alpha) \\ \rightarrow \frac{dU}{d\alpha} &= iG U(\alpha) \rightarrow U(\alpha) = e^{iG\alpha} \end{aligned}$$

In parole, il generatore dell'operazione infinitesima e' necessario e sufficiente a definire l'azione dell'operatore finito. Visto che l'operatore U , nei casi che ci interessano, esegue trasformazioni di simmetria, sappiamo che deve essere unitario, quindi:

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= 1 \\ \left. \begin{aligned} U &= 1 + i\delta\alpha G \\ U^\dagger &= 1 - i\delta\alpha G^\dagger \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 - i\delta\alpha (G^\dagger - G) = 1 \\ \rightarrow G &= G^\dagger \rightarrow G \text{ e' hermitiano} \end{aligned}$$

Se U commuta con H , anche G , che e' un'osservabile, commuta ed e' conservato. Questo risultato completa il quadro di riferimento dei rapporti fra simmetrie, invarianza e conservazione in meccanica quantistica:

le simmetrie del sistema fisico corrispondono ad altrettante proprietà di invarianza dell'hamiltoniano rispetto a trasformazioni unitarie; l'invarianza è equivalente alla commutatività di hamiltoniano ed operatore unitario; se l'operatore dipende in maniera continua da parametri, il generatore della trasformazione è hermitiano e, commutando con l'hamiltoniano, corrisponde ad un'osservabile conservata.

Si consideri l'esempio delle traslazioni spaziali, p.es. lungo l'asse x , e si fissi l'attenzione sulla rappresentazione posizione. Allora, la funzione d'onda nel riferimento traslato sarà, per una traslazione infinitesima:

$$x' = x - \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\psi(x') = \psi(x - \varepsilon) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(-\varepsilon) + \dots$$

Poiché:

$$p_x = -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{op. impulso lungo } x \text{ in unita' naturali})$$

$$\rightarrow \psi(x') \simeq ip_x(-\varepsilon)\psi(x) + \psi(x) = [1 + ip_x(-\varepsilon)]\psi(x)$$

Per traslazioni finite, si può iterare la procedura, ottenendo:

$$\psi(x') = e^{i(-\varepsilon)p_x} [\psi(x)]$$

Quindi, in una direzione e e con una distanza qualsiasi:

$$\psi(\mathbf{r}') = e^{-ia \cdot \mathbf{p}} [\psi(\mathbf{r})]$$

Questo porta a concludere che l'operatore impulso è il *generatore delle traslazioni spaziali*; simili considerazioni si possono fare per le rotazioni (momento angolare totale come *generatore delle rotazioni*), le traslazioni temporali (hamiltoniano come generatore), le trasformazioni di Lorentz.

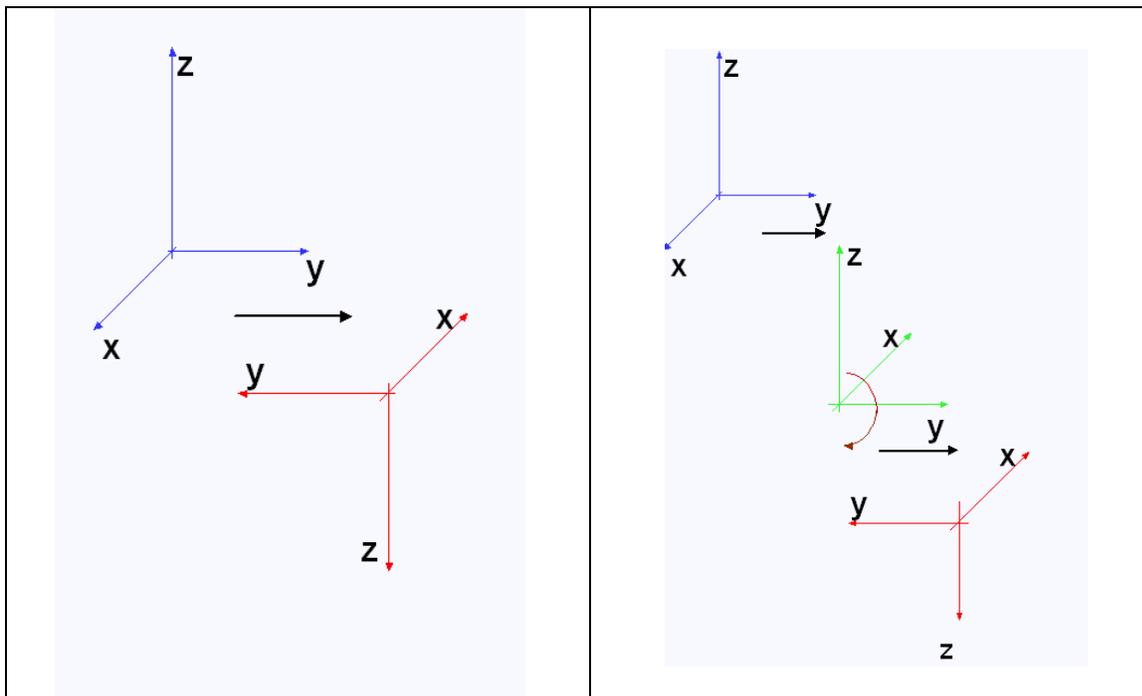
5. Simmetrie discrete: parità

Si è visto come, nel caso delle trasformazioni continue del sistema di riferimento, come traslazioni e rotazioni, le proprietà di invarianza dell'hamiltoniano siano in relazione alle proprietà di simmetria del sistema fisico: queste proprietà di simmetria sono

equivalenti ai corrispondenti "principi di relativita' ", come p.es. "non esiste una terna di assi con posizione assoluta", oppure "non esiste una terna di assi con orientazione assoluta", e cosi' via. Le trasformazioni continue non esauriscono tuttavia le simmetrie possibili.

a. Inversione degli assi in fisica classica

Nello spazio 3-dimensionale esistono, come e' noto, due possibilita' di scelta per definire una terna di assi cartesiani, potendosi scegliere una terna *destrorsa* o *sinistrorsa*. Una terna sinistrorsa si ottiene da una destrorsa (e viceversa) tramite l'inversione del verso positivo di tutti e 3 gli assi; equivalentemente, si puo' invertire il verso positivo di uno solo degli assi, ed eseguire una rotazione di π attorno all'asse scelto, come indicato nella figura.



I due tipi di terna *non* sono sovrapponibili mediante rotazioni, fatto che sta p.es. alla base dell'esistenza di due tipi di guanti o di scarpe, destro e sinistro.

E' interessante osservare che, invece, le coppie di assi nello spazio 2-dimensionale (o a dimensione *pari* in genere) lo sono; per altro, la possibilita' di ridurre la riflessione dei 3 assi a quella di 1 asse, unita ad una rotazione di π attorno all'asse stesso, non sussiste in spazi a dimensione pari: p.es., in 2D la riflessione

rispetto ai 2 assi e' equivalente ad una rotazione, mentre quelle rispetto ad un solo asse non lo sono.

Questa doppia possibilita' di scelta porta a ritenere che debba valere un "principio di relativita'" anche per la scelta della chiralita' della terna cartesiana: *non esiste una terna di assi con chiralita' assoluta*. Se questo principio valesse in ogni caso, dovrebbe essere indifferente, per descrivere il moto di un qualsiasi sistema, scegliere una terna destrorsa o una sinistrorsa. Di conseguenza, le equazioni del moto dovrebbero essere invarianti rispetto a riflessione degli assi.

Formalmente, possiamo ricondurre l'invarianza del moto di un sistema fisico rispetto a inversione degli assi all'analogia proprieta' della lagrangiana o dell'hamiltoniana: se L o H sono invarianti per parita', cosi' e' anche il moto del sistema. Infatti, limitandosi a considerare il caso del formalismo hamiltoniano, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

Per semplicita', consideriamo solo il caso in cui q e p sono le componenti cartesiane dei vettori posizione e impulso (ma il risultato vale in generale). Le equazioni sono invarianti in forma se le quantita' trasformate soddisfano equazioni identiche:

$$\begin{cases} \dot{q}'_i = \frac{\partial H(q', p')}{\partial p'_i} \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial q'_i} \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{cases} q'_i = -q_i \\ p'_i = -p_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}'_i = \frac{\partial H(q', p')}{\partial p'_i} = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial p_i} = -\dot{q}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial q'_i} = \frac{\partial H(q', p')}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

e quindi:

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(q, p) = H(q, p) \rightarrow H(-q, -p) = H(q, p)$$

Un risultato analogo si troverebbe con il formalismo lagrangiano

Possiamo allora definire in astratto, come nuova operazione di simmetria, l'operazione di inversione degli assi:

$$P: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

dalla quale possiamo dedurre immediatamente le proprietà di trasformazione di diverse grandezze fisiche classiche rispetto all'inversione degli assi:

$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$	posizione
$t \rightarrow t$	tempo
$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$	3-impulso
$E \rightarrow E$	energia
$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$	mom.angolare

E' notevole in particolare l'*invarianza* del momento angolare, che discende dalla definizione $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Le equazioni della meccanica e dell'elettrodinamica classica sono invarianti per parità, tuttavia a questa invarianza non corrisponde una legge di conservazione (v.sotto).

b. Parità in meccanica quantistica

Come nel caso delle trasformazioni continue, possiamo associare a P un operatore unitario U_P , che agisce nello spazio degli stati. Tuttavia, in questo caso, la simmetria di cui U_P e' una rappresentazione non e' una simmetria continuo, e non possiede generatori; l'insieme delle operazioni di simmetria e' formato da due soli elementi, P e E (operatore identità), con la tabella di moltiplicazione

	<i>E</i>	<i>P</i>
<i>E</i>	<i>E</i>	<i>P</i>
<i>P</i>	<i>P</i>	<i>E</i>

In fisica classica, il fatto che l'operazione riflessione spaziale sia *intrinsecamente separata* dall'operazione identita' (a differenza di quel che avviene per traslazioni e rotazioni, operazioni che possono essere fatte evolvere in modo continuo dall'operazione identita') esclude la possibilita' di associare leggi di conservazione alla simmetria. In meccanica quantistica le cose vanno diversamente, come si vede subito.

a) Relazioni di commutazione di U_p e alcuni operatori fondamentali:

1. Operatore posizione

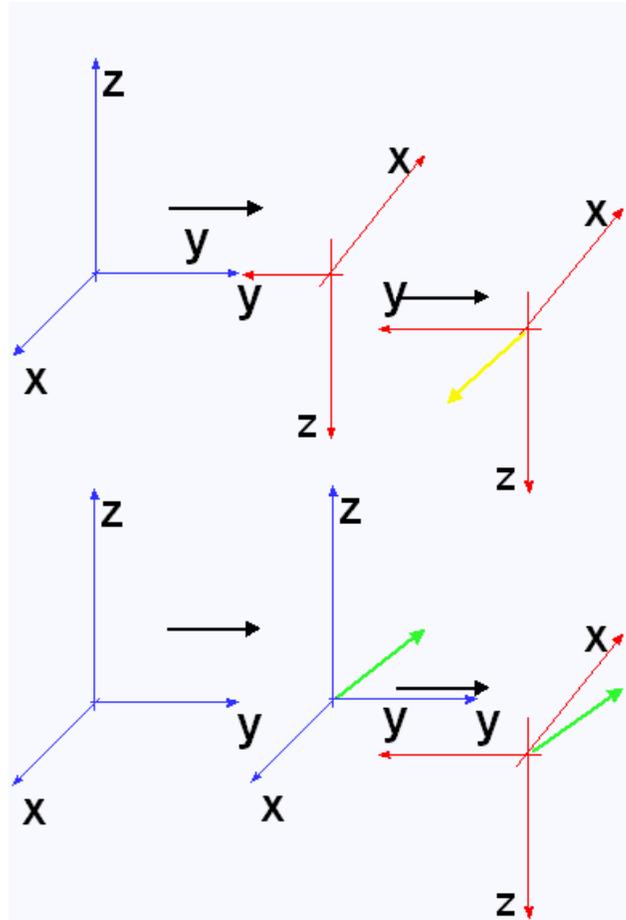
$$U_p \mathbf{r} U_p^{-1} = -\mathbf{r} \rightarrow U_p \mathbf{r} = -\mathbf{r} U_p$$

Infatti:

$$\begin{aligned} U_p \mathbf{r} |\psi\rangle &= U_p \mathbf{r} \sum |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle = U_p \sum \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle = \sum U_p \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle \\ &= \sum (-\mathbf{r}) |-\mathbf{r}\rangle \langle -\mathbf{r} | \psi\rangle = (-\mathbf{r}) U_p |\psi\rangle = -\mathbf{r} U_p |\psi\rangle \end{aligned}$$

2. Operatore impulso

Per cio' che riguarda l'operatore impulso, si osservi che le operazioni traslazione e inversione degli assi sono anticommutative:



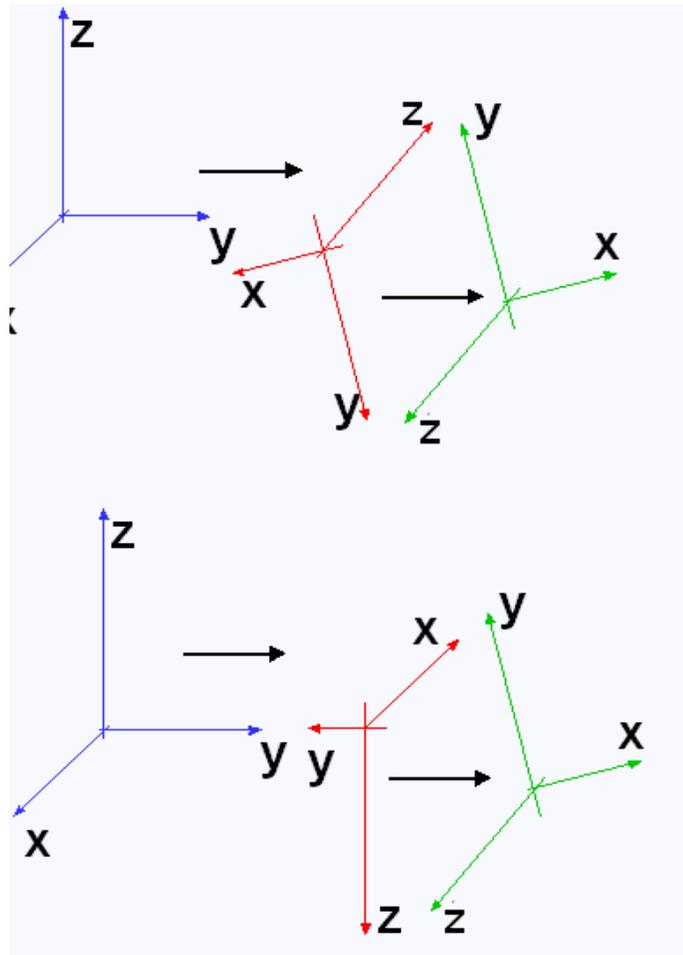
La cosa si esprime nello spazio degli stati con l'uso dell'operatore di traslazione (infinitesima, e sufficiente per ogni altro caso):

$$\begin{aligned}
 U_p U_T(\delta \mathbf{r}) &= U_p (1 - \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}) \\
 U_p (1 - \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}) &= (1 + \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r}) U_p \\
 \rightarrow -U_p \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} &= \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} U_p \rightarrow -U_p \mathbf{p} = \mathbf{p} U_p
 \end{aligned}$$

Quindi \mathbf{p} va in $-\mathbf{p}$ per parità, in linea con le attese dalla analogia situazione classica.

3. Operatore momento angolare

Le operazioni rotazione e inversione degli assi commutano



Si trova, per gli operatori nello spazio degli stati:

$$U_p \hat{L} = \hat{L} U_p$$

Questo e' consistente con la definizione classica $L = r \times p$. Sempre in concordanza con l'analogia situazione classica, L va in L per parita'; questo risultato si estende al caso dello spin, e quindi del momento angolare totale $J = L + S$

4. Energia etc

Per tutte le altre quantita' valgono relazioni di commutazione che si derivano da quelle trovate sopra.

In breve, ogni grandezza fisica (scalare, vettore, tensore) acquista, oltre alla sua caratteristica *tensoriale* - che la definisce rispetto al gruppo delle rotazioni, anche una caratteristica di *parita'*, che la

definisce rispetto alle riflessioni spaziali: si parla quindi di *scalari/pseudoscalari, vettori/pseudovettori, etc..* Si noti che

	Vero	Pseudo
Scalare	+1	-1
Vettore	-1	+1
Tensore di rango N	$(-1)^N$	$(-1)^{N+1}$

La seguente tabella mostra le proprietà di trasformazione di diversi operatori elettromagnetici rispetto all'inversione degli assi; esse sono basate sull'attribuzione alla carica elettrica della proprietà di essere uno *scalare* rispetto a riflessioni

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{j}(-\mathbf{r}, t) \text{ dens. di corrente}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow \rho(-\mathbf{r}, t) \text{ dens. di carica}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}(-\mathbf{r}, t) \text{ campo elettrico}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{B}(-\mathbf{r}, t) \text{ campo magnetico}$$

Si noti come la proprietà della carica elettrica di essere uno scalare rispetto a riflessioni derivi dall'aver assunto che \mathbf{E} sia un vettore:

F è un vero vettore

$$F = qE$$

Campo coulombiano: $E \propto q\hat{r}$

Si potrebbero ridefinire sia \mathbf{E} , sia q assumendo che q sia uno pseudoscalare ed \mathbf{E} uno pseudovettore, senza introdurre così contraddizioni con l'esperienza. In questo caso, \mathbf{B} e \mathbf{j} risulterebbero, rispettivamente, un vero vettore e uno pseudovettore. Le proprietà di trasformazione delle grandezze elettromagnetiche rispetto a riflessioni sono quindi interamente convenzionali.

b) Proprietà dell'operatore parità: azione sugli stati

Ci chiediamo innanzi tutto qual è l'effetto dell'operatore parità sugli autostati dell'operatore posizione: poiché l'operazione di inversione spaziale esegue la trasformazione del sistema di coordinate (leggi: posizione di un punto fisso espressa nei due riferimenti):

$$P : \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

nello spazio degli stati le due diverse rappresentazioni dello stesso stato fisico dovranno soddisfare la relazione:

$$\langle \mathbf{r}' | \psi' \rangle = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \langle -\mathbf{r}' | \psi \rangle$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi' \rangle &= \langle -\mathbf{r} | \psi \rangle \\ \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) &= \psi(-\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Siccome l'operatore unitario che trasforma gli stati, U_p , deve eseguire l'operazione

$$U_p : |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv U_p |\psi\rangle$$

dovrà essere:

$$U_p : |\mathbf{r}\rangle \rightarrow |\mathbf{r}'\rangle \equiv U_p |\mathbf{r}\rangle = \eta |-\mathbf{r}\rangle$$

dove η è una pura fase, presente perché gli stati sono appunto definiti a meno di una fase arbitraria.

La proprietà fondamentale dell'operatore parità è che, applicato a uno stato due volte in successione, riconduce allo stato iniziale:

$$U_p |\psi\rangle = |\psi'\rangle \rightarrow U_p |\psi'\rangle = U_p (U_p |\psi\rangle) = \eta^2 |\psi\rangle$$

Quindi, genericamente:

$$\eta^2 = e^{i\alpha}$$

Poiché la fase assoluta (comune) degli stati è arbitraria, posso scegliere, senza introdurre restrizioni:

$$\eta^2 = 1 \rightarrow \eta = \pm 1$$

e quindi:

$$U_p : |\mathbf{r}\rangle \rightarrow |\mathbf{r}'\rangle \equiv U_p |\mathbf{r}\rangle = \pm |-\mathbf{r}\rangle$$

Per gli autostati dell'impulso troveremmo un risultato del tutto analogo.

Vale forse la pena di sottolineare che gli stati indicati sopra non sono in generale autostati dell'operatore parità. Di fatto, non tutti gli stati possibili hanno parità definita! P.es. un autostato dell'impulso non ha parità definita (a meno che appartenga all'autovalore $\mathbf{p}=0$). Neanche tutti gli stati stazionari (autostati di H) sono a priori a parità definita, anche se $[H, U_p]=0$: questo avviene perché, quando l'hamiltoniano commuta separatamente con due operatori che fra loro non commutano, gli stati stazionari sono degeneri, con molteplicità data da quella degli autostati di uno dei due. Questo è una situazione che si presenta spesso, e si può visualizzare p.es. così:

a) Consideriamo una particella libera; allora $H = p^2/2m$, e H commuta con \mathbf{p} (impulso) e con U_p (parità), che fra loro come sappiamo non commutano; allora gli stati stazionari sono degeneri, con degenerazione 2 perché U_p ha due autovalori. Infatti, per ogni autovalore di H , ci sono due autostati di H e \mathbf{p} , $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$, che non hanno parità definita; si passa dall'uno all'altro attraverso l'operatore U_p . Alternativamente, ci sono due autostati di H e U_p , $\sin \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}, \cos \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$, che non hanno \mathbf{p} definito; si passa dall'uno all'altro attraverso l'operatore \mathbf{p} .

b) Consideriamo un sistema a simmetria sferica; allora H commuta con L^2 , che è quindi una costante del moto. Ora, L^2 commuta anche separatamente con L_x, L_y, L_z che fra loro non commutano. Allora gli autostati di L^2 (e H) sono degeneri, in questo caso con degenerazione $2l+1$ (perché p.es. L_z ha $2l+1$ autovalori); si passa dall'uno all'altro tramite gli operatori a ladder L_+, L_- , che sono combinazioni lineari di L_x, L_y . Il discorso può essere ripetuto in maniera analoga se si sceglie L_x o L_y , vista la totale simmetria fra le tre componenti di \mathbf{L} , il che mostra che anche qui vale la regola citata sopra.

Se lo stato $|\psi\rangle$ è un autostato dell'operatore parità sarà:

$$U_p |\psi\rangle = \eta_p |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle$$

Questo è il caso degli autostati del momento angolare, che commuta con l'operatore parità.

c) Proprieta' dell'operatore parita': azione sulle osservabili

L'operatore U_p , che e' unitario per definizione, e' d'altra parte anche hermitiano, visto che

$$U_p^2 = 1, \quad U_p U_p^\dagger = 1 \rightarrow U^\dagger = U_p \rightarrow U_p \text{ hermitiano}$$

Quindi e' un'osservabile, ed ha autovalori reali: $\eta_p = \pm 1$. Questo autovalore, per un autostato della parita', costituisce un numero quantico, la parita' spaziale appunto (senza analogo classico!), che si aggiunge agli altri che caratterizzano lo stato in questione. Quindi, se $[H, P] = 0$, η_p e' una costante del moto; se inoltre uno stato stazionario e' non degenero, ha parita' definita (anche un livello degenero puo' avere parita' definita, nel caso ovvio in cui tutti gli stati corrispondenti al livello abbiano la stessa parita'). La parita' di uno stato composto e' il *prodotto* delle parita' dei componenti: ossia, la parita' spaziale e' un numero quantico *moltiplicativo*.

Numeri quantici additivi e moltiplicativi

Perche' alcuni numeri quantici, per un sistema composto, risultano essere quantita' moltiplicative, mentre altri sono additivi? La ragione sta nel tipo di simmetria da cui i numeri quantici derivano, tramite gli autovalori dell'operatore unitario corrispondente

Se si tratta di una simmetria *discreta* (come p.es. inversione spaziale, coniugazione di carica, etc), la quantita' conservata (quindi anche il numero quantico) e' moltiplicativa. In effetti, se consideriamo p.es. la parita' di un sistema composto da due sottosistemi:

$$U_p^{(1)} \left(U_p^{(2)} |\psi\rangle \right) = U_p^{(1)} \left(\eta_p^{(2)} |\psi\rangle \right) = \eta_p^{(1)} \eta_p^{(2)} |\psi\rangle$$

Se si tratta di una simmetria *continua*, l'operatore unitario non e' hermitiano, quindi non ha autovalori reali; per altro, essendo la simmetria continuo e' possibile, come visto prima, limitarsi a considerare gli operatori infinitesimi: p.es., per le traslazioni:

$$U_T^{(1)} \simeq 1 + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(1)}, U_T^{(2)} \simeq 1 + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(2)}$$

$$U_T^{(1)} \left(U_T^{(2)} |\psi\rangle \right) \simeq \left(1 + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(1)} \right) \left[\left(1 + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(2)} \right) |\psi\rangle \right]$$

Al I ordine

$$U_T^{(1)} \left(U_T^{(2)} |\psi\rangle \right) \simeq \left(1 + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(1)} + i\mathbf{a}\mathbf{p}^{(2)} \right) |\psi\rangle = \left[1 + i\mathbf{a} \left(\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} \right) \right] |\psi\rangle$$

E' evidente che questa volta la quantita' conservata e' la somma delle quantita' relative ai due sottosistemi.

Parlando in modo pochissimo rigoroso, la quantita' conservata e' sempre in relazione ad un operatore hermitiano: se l'operatore (unitario) di simmetria non lo e', quel che si conserva non e' l'operatore, ma il suo *logaritmo* (qualunque cosa questo voglia dire), visto che

$$U \text{ unitario} \rightarrow U = e^{iH}, H \text{ hermitiano};$$

da cui la legge di composizione additiva:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Possiamo ora chiederci in quali condizioni l'hamiltoniano commuti con l'operatore parita'. La risposta e' analoga a quella del caso classico:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(-\mathbf{r}, -\mathbf{p})$$

dove \mathbf{r} e \mathbf{p} indicano l'insieme di *tutti* i gradi di liberta' spaziali e di *tutti* gli impulsi generalizzati del sistema. Si noti che in ogni caso l'hamiltoniano puo' sempre essere scritto come somma di una parte *pari* e una *dispari* rispetto a trasformazioni di parita':

$$H = \frac{1}{2} \underbrace{[H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + H(-\mathbf{r}, -\mathbf{p})]}_{=H_{\text{pari}}} + \frac{1}{2} \underbrace{[H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - H(-\mathbf{r}, -\mathbf{p})]}_{=H_{\text{dispari}}}$$

$$U_p^\dagger H_{\text{pari}} U_p = H_{\text{pari}}$$

$$U_p^\dagger H_{\text{dispari}} U_p = -H_{\text{dispari}}$$

c. Parita' in fisica delle particelle

Ammesso che la parita' sia conservata, si pone ovviamente il problema teorico/sperimentale di determinare la parita' di ogni dato stato stazionario, come gli stati fondamentali delle particelle elementari

Parita' orbitale

Come detto sopra, l'operatore parita' commuta con l'operatore momento angolare totale di un sistema: ci aspettiamo quindi che un

sistema preparato in un autostato di \mathcal{J} abbia parita' definita. Possiamo studiare inizialmente, per semplicita', il caso del solo momento angolare orbitale: quindi, consideriamo un sistema preparato in un autostato del momento angolare orbitale e della sua componente z . Nella rappresentazione posizione, la parte angolare della sua funzione d'onda sara' allora un'armonica sferica:

$$\psi(\mathbf{r}) = Nf(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Dalle proprieta' delle armoniche sferiche:

$$P: \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \Rightarrow Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow Y_l^m(\theta - \pi, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Quindi lo stato e' autostato della parita' con autovalore $(-1)^l$, che si chiama *parita' orbitale* dello stato.

Parita' intrinseca

C'e' un'importante differenza fra la situazione in meccanica quantistica non relativistica e quella in meccanica quantistica relativistica, o teoria dei campi: nel primo caso i soli processi possibili sono quelli in cui la massa a riposo e l'energia totale vengono separatamente conservate, il che si traduce in una stretta conservazione dell'identita' di tutti i sistemi fisici in gioco; nel secondo caso massa ed energia sono intercambiabili. Questo significa che, nel caso di interazioni fra particelle relativistiche, si possono avere (e si hanno di fatto copiosamente) processi di creazione e distruzione di particelle. Fra le conseguenze di questo cruciale cambiamento di regime c'e' la necessita' di introdurre un'estensione del concetto di parita' sviluppato fin qui: *la parita' intrinseca*. Mentre e' doveroso rinviare ai corsi e testi di teoria dei campi per una introduzione soddisfacente a tutta la questione, qui ci si deve limitare ad un breve accenno: si e' visto a suo tempo che le grandezze fisiche (scalari, vettori, tensori,...) possiedono, oltre alla loro caratteristica tensoriale (proprieta' di trasformazione rispetto a cambiamenti continui di coordinate), anche una caratteristica di parita' (scalare/pseudoscalare, ...). Ora, in una teoria quantistico-relativistica *il campo e' una grandezza fisica*, e non la rappresentazione dello stato del sistema, come e' invece una funzione d'onda: il sistema fisico e' il campo stesso! In altre parole, *i gradi di liberta' del sistema sono i valori del campo* in ogni punto di una data regione dello spazio-tempo, mentre le coordinate spazio-

temporali stesse sono ridotte al ruolo di *indici* (continui) che identificano gli elementi del sistema. Come ogni grandezza fisica, ogni campo ha quindi una caratteristica tensoriale (ci sono campi scalari, vettoriali, ...): ci aspettiamo dunque che abbia anche una caratteristica di parità. La caratteristica di parità dell' *operatore campo* viene a sua volta trasferita a quella degli *stati del campo* stesso (per vedere questo, si pensi allo sviluppo del campo in serie di operatori di creazione/distruzione: ogni possibile stato del campo può essere pensato come risultante dall'applicazione di un certo numero di operatori di creazione allo *stato di vuoto*, e di conseguenza caratterizzarsi rispetto a inversione degli assi nello stesso modo degli operatori stessi), che quindi hanno una caratteristica di parità totale, composta sia da quella "orbitale", sia da quella propria del campo, detta "intrinseca".

Naturalmente, può essere comodo, per uno scopo o un altro, considerare come particelle elementari anche oggetti composti, come un mesone o un barione: in questo senso, possiamo attribuire ad essi una parità "intrinseca" che in realtà deriva anche da gradi di libertà (nascosti) di natura orbitale. Con questa convenzione sottintesa, si può parlare quindi di parità intrinseca del pione, del protone, etc.

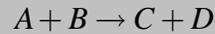
Un esempio di parità "intrinseca" di origine orbitale

Se consideriamo un nucleo, abbiamo due possibili punti di vista:

a) Lo consideriamo come lo stato legato di A nucleoni; se ci mettiamo nel suo centro di massa ($\mathbf{p}_{TOT}=0$), osserveremo il moto complicato di tutti i nucleoni, al quale potremo certamente attribuire vari numeri quantici; se il nucleo è in un autostato della parità, avremo fra essi anche la parità dovuta al moto orbitale sopra descritto

b) Lo consideriamo come una particella non strutturata, p.es. quando lo usiamo come proiettile o bersaglio in una collisione nella quale i nuclei incidenti sono sostituiti da altre specie nucleari; in questo caso, dobbiamo tenere conto della parità menzionata in a), oltre che di quella legata al moto orbitale del nucleo come un tutto, nella conservazione della parità nella collisione.

Si può fare un esempio fittizio e sovrasemplificato, ma tuttavia utile a rendere l'idea, considerando l'urto fra due particelle composte da costituenti ipotetici privi di spin, nella quale avvenga un riarrangiamento dei costituenti:



$$\mathbf{L}_{TOT}^{(in)} = \mathbf{L}_A^{(CM-A)} + \mathbf{L}_B^{(CM-B)} + \mathbf{L}_{AB}^{(CM-AB)}$$

$$P_{TOT}^{in} = (-1)^{L_{TOT}^{(in)}} = \underbrace{(-1)^{L_A^{(CM-A)}}}_{P_A} \underbrace{(-1)^{L_B^{(CM-B)}}}_{P_B} \underbrace{(-1)^{L_{AB}^{(CM-AB)}}}_{P_{ORB}}$$

$$\mathbf{L}_{TOT}^{(out)} = \mathbf{L}_C^{(CM-C)} + \mathbf{L}_D^{(CM-D)} + \mathbf{L}_{CD}^{(CM-CD)}$$

$$P_{TOT}^{out} = (-1)^{L_{TOT}^{(out)}} = \underbrace{(-1)^{L_C^{(CM-C)}}}_{P_C} \underbrace{(-1)^{L_D^{(CM-D)}}}_{P_D} \underbrace{(-1)^{L_{CD}^{(CM-CD)}}}_{P_{ORB}}$$

Se noi ignoriamo la struttura interna dei nuclei A e B, le quantità P_A e P_B appaiono come *intrinseche* alle particelle interagenti, ed essenziali nel garantire la conservazione della parità nella reazione.

Nelle collisioni fra particelle elementari e' altrettanto essenziale tenere conto della parità intrinseca delle particelle interagenti, che sia o no dovuta ad una loro struttura interna

La parità intrinseca deve quindi essere presa in considerazione ogni qual volta, in un processo, il numero o il tipo di particelle cambia. E' evidente che, quando invece le particelle interagenti sono le stesse prima e dopo la collisione, e l'interazione conserva la parità, i fattori dovuti alla parità intrinseca sono gli stessi da un lato e dall'altro dell'equazione di bilancio della parità totale, e quindi, cancellandosi, possono essere del tutto ignorati

Elicita'

Le proprietà "meccaniche" di ogni particella (che non riguardano quindi il suo accoppiamento ai vari campi, legati alle diverse interazioni) sono la *massa* e lo *spin*. Per specificare lo stato di una particella libera in un dato riferimento occorre quindi dire quali siano il 4-impulso e la "componente z" dello spin. Ora, quest'ultima grandezza si puo' definire in due modi, fondamentalmente equivalenti ma diversamente vantaggiosi dal punto di vista delle applicazioni:

descrizione in termini di un asse z fisso (formalismo di *spin-orbita*, piu' usato in spettroscopia)

descrizione in termini di un asse z allineato con l'impulso della particella (formalismo di *elicità*, piu' usato per lo scattering relativistico)

L'operatore *elicita'* e' definito proprio come la componente dello spin lungo l'impulso della particella. Facendo riferimento ad un'immagine classica, in cui lo spin della particella viene associato ad una *rotazione* della particella attorno ad un asse, che in questo caso coincide con la direzione dell'impulso, si dice che una particella con *elicita'* +va e' *destrorsa*, mentre una con *elicita'* -va e' *sinistrorsa*; occorre avere ben chiaro che questa e' solo una descrizione pittoresca, essendo lo spin un grado di liberta' privo di analogo classico.

La definizione dell'operatore *elicita'* e' quindi:

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ e' l'operatore di spin della particella.

Se la particella ha massa > 0 , e' immediato vedere come si possa definire l'*elicita'* nel riferimento di quiete della particella, come componente lungo una direzione z prescelta, e poi eseguire un boost di Lorentz lungo z per portare l'impulso della particella ad un valore dato: si noti tuttavia che l'*elicita'*, che essendo un prodotto scalare e' invariante per rotazioni, *non e'* un invariante di Lorentz

Questo si puo' vedere facilmente pensando ad una trasformazione di Lorentz lungo z tale da invertire il segno dell'impulso della particella: allora

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -\hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \end{array} \right\} \rightarrow h = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -h$$

L'*elicita'* non e' neanche invariante per parita': essendo il prodotto di un vettore e di uno pseudovettore, e' una quantita' pseudoscalare.

Nel caso di particelle a massa nulla (fotoni, neutrini), la velocita' della particella e' 1, quindi non esiste una trasformazione di Lorentz tale da invertire la direzione dell'impulso: quindi l'*elicita'* e' un invariante di Lorentz. Viceversa, l'*elicita'* continua ovviamente a non essere invariante per parita'.

d. La determinazione delle parita' intrinseche

Si indicano alcuni casi particolarmente importanti, con lo scopo di mostrare il tipo di argomenti, sperimentali e teorici, che possono essere usati per trovare il valore della parita' intrinseca delle particelle.

1) Parita' del fotone

Il fotone e' una particella a spin 1 (particella vettoriale). Le proprieta' di trasformazione dei campi classici \mathbf{E} e \mathbf{B} sono

$$P: \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$$

$$P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$$

Poiche'

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

segue che \mathbf{A} deve essere un vettore polare e φ uno scalare:

$$P: \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$$

$$P: \varphi \rightarrow \varphi$$

Gli stati di un fotone sono ottenuti trattando \mathbf{A} e φ come operatori: questo fa gia' supporre che la proprieta' di \mathbf{A} di essere un vettore polare, a parita' -va, si trasferisca agli stati a uno o piu' fotoni. Considerando il campo e.m. racchiuso in una cavita', \mathbf{A} , trattato come un operatore, si puo' sviluppare in serie di operatori di creazione e distruzione, ciascuno dei quali ha a coefficiente il versore polarizzazione. Il tipo di sviluppo in serie di \mathbf{A} dipende dalla nostra scelta: quella piu' immediata e' di sviluppare \mathbf{A} in onde piane (autostati dell'energia e dell'impulso), un'altra possibile e' quella di svilupparlo in autostati del mom. angolare totale. In ogni caso si possono scegliere due coppie ortogonali di versori base per la polarizzazione, supponendo p.es che, per l'onda piana, \mathbf{k} sia diretto lungo z.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) &= (0, 1, 0) \end{aligned} \right\} \text{base polarizzazione lineare}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_L(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})) \\ \mathbf{e}_R(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})) \end{aligned} \right\} \text{base polarizzazione circolare}$$

Per trovare la parità intrinseca del fotone, consideriamo l'operazione di inversione degli assi applicata ai vettori polarizzazione lineare e numero d'onda di un'onda elettromagnetica classica:

$$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})$$

$$P: \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$$

$$\rightarrow \frac{-\mathbf{k}}{|-\mathbf{k}|} = -[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})]$$

D'altra parte, dovendo essere in generale per un'onda qualsiasi:

$$\frac{-\mathbf{k}}{|-\mathbf{k}|} = \mathbf{e}_1(-\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(-\mathbf{k})$$

deve valere:

$$-[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})] = \mathbf{e}_1(-\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(-\mathbf{k})$$

Quindi l'operazione di inversione degli assi manda un'onda polarizzata linearmente, che viaggia nella direzione \mathbf{k} , in un'altra onda polarizzata linearmente, che viaggia in direzione $-\mathbf{k}$, con un segno -: questo segno negativo corrisponde alla *parità intrinseca negativa* del fotone a polarizzazione lineare, come anticipato sopra.

I fotoni che interagiscono nelle reazioni fra particelle elementari prendono parte di solito a processi fra sistemi che sono in autostati della parità; quando la parità è conservata, i fotoni stessi devono essere in autostati della parità. Si pone quindi il problema di trovare gli stati di un fotone a parità definita; lo sviluppo in onde piane citato sopra non è adatto allo scopo, perché impulso e parità, come è noto, non commutano. Si deve quindi ricorrere allo sviluppo in autostati del momento angolare *totale* (orbitale + spin). La parità totale di uno stato a un fotone dipende, come al solito, dal suo stato

di momento angolare totale: tuttavia, fissato il valore di j , ci possono essere due valori opposti di parità, a seconda se la radiazione è di un multipolo *magnetico* o *elettrico*:

$$P_M = (-1)^{j+1}$$

$$P_E = (-1)^j$$

Parità della radiazione di multipolo

Come detto sopra, normalmente l'operatore campo e.m. viene sviluppato in onde piane (autostati dell'impulso):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|V}} \left[a_i(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{i(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x} - E_i t)} + a_i^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_i^* e^{-i(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x} - E_i t)} \right]$$

(Si trascura da ora in poi la dipendenza dal tempo).

Si può alternativamente svilupparlo in autostati del momento angolare totale $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, in cui $s=1$ (spin del fotone). Questi autostati, p.es. nella rappresentazione posizione, sono le *armoniche sferiche vettoriali*, definite da:

$$\mathbf{Y}_{JLm} = \sum_{\mu} Y_L^{m-\mu} \chi_{\mu}^{\mu} \langle 1, \mu, L, m-\mu | J, m \rangle$$

χ è la parte di spin per lo stato del fotone. In principio ci si potrebbe aspettare che nella definizione venisse inclusa anche una somma sui possibili valori di L che possono contribuire al valore di J considerato: si osservi tuttavia che gli autostati del campo elettromagnetico con definiti il solo momento angolare totale e la sua terza componente non sono a parità definita. In effetti, rispetto a inversione degli assi χ_i , che è un vettore, cambia segno, e Y acquista una fase $(-1)^L$. Poiché l'interazione elettromagnetica conserva la parità e' interessante definire stati del fotone in cui anche la parità, oltre al momento angolare, sia definita: questi sono gli stati definiti sopra.

In totale, dunque, la parità di un fotone in uno di questi stati è $(-1)^{L+1}$, e risulta diversa per diversi valori di L . Essendo $s=1$, per ogni dato valore di J, m ci sono 3 autostati indipendenti:

$$\mathbf{Y}_{J,J,m}, \mathbf{Y}_{J,J+1,m}, \mathbf{Y}_{J,J-1,m}$$

le cui parità seguono dalla regola trovata sopra:

$$(-1)^{J+1}, (-1)^J, (-1)^J$$

Il fotone nel primo stato si chiama *magnetico*, nel secondo o terzo si chiama *elettrico*: i nomi derivano dallo sviluppo in serie di multipoli della radiazione e.m. in una cavità sferica: le funzioni trovate sopra compaiono nella parte angolare dello sviluppo, rispettivamente per un 2^l -polo magnetico e un 2^l -polo elettrico

2) Parità relativa particella/antiparticella: bosoni e fermioni

Consideriamo le equazioni di Klein-Gordon e Dirac, rispettivamente per particelle a spin 0 e $\frac{1}{2}$.

- (i) La funzione d'onda di K-G, come è noto, è adatta a descrivere una particella senza spin, che può essere carica o neutra: se è neutra, particella e antiparticella coincidono. Se è carica, si può far vedere che la parità di particella e antiparticella è la stessa

Parità relativa bosone-antibosone (spin 0)

Una particella carica è descritta da una funzione d'onda complessa, o per essere più precisi da un campo non hermitiano. Se il campo che descrive le particelle è $\phi(x)$, quello delle antiparticelle è $\phi^*(x)$

Allora si deve avere, per un'onda piana:

$$\begin{aligned} U_P \phi(x) &= U_P e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = \eta_P e^{-i(Et + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \\ U_P \phi^*(x) &= U_P K \left(e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \right) = K U_P \left(e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \right) \\ \rightarrow U_P \phi^*(x) &= K \left[\eta_P e^{-i(Et + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \right] = \eta_P^* e^{+i(Et + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned}$$

perché l'operazione di coniugazione complessa commuta con l'operatore parità. Se η_P è reale, la parità di particella e antiparticella è la stessa

- (ii) È una delle conseguenze dell'equazione di Dirac che i fermioni e gli antifermioni abbiano parità opposta

Parità relativa fermione-antifermione

Si consideri l'eq. di Dirac libera:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$$

Rispetto all'inversione degli assi essa diviene:

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-\mathbf{p}) + \beta m) \psi'$$

Moltiplicando a sinistra per β , e facendo scorrere β da sinistra a destra nel II membro:

$$i \beta \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot (-\mathbf{p}) + \beta \beta m) \psi'$$

$$i \frac{\partial (\beta \psi')}{\partial t} = \left(\underset{=-\beta \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha} \beta} \cdot \mathbf{p} + \beta \beta m \right) \psi'$$

$$i \frac{\partial (\beta \psi')}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\beta \psi')$$

Si vede dunque che

$$\beta \psi' = \psi \xrightarrow{\beta^2=1} \psi' = \beta \psi$$

Se prendiamo le soluzioni nel sistema di quiete della particella, avremo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ energia positiva}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ energia negativa}$$

Ricordando che

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si vede che tutte e 4 le soluzioni sono autostati della parità, quelle con $E > 0$ con parità opposta a quelle con $E < 0$.

3) Fasi arbitrarie; parità immaginaria

In senso lato, tutte le parità intrinseche sono arbitrarie: lo stato con una particella, qualunque essa sia, si ottiene con l'operatore di creazione applicato allo stato di vuoto, la cui parità è intrinsecamente convenzionale. Tuttavia, *assumendo per convenzione* che la parità intrinseca dello stato di vuoto sia +va, la parità di alcuni tipi di particelle (quelli visti prima, che hanno i numeri quantici additivi uguali a quelli del vuoto) è definibile senza ambiguità. Viceversa, la parità dei fermioni non è definibile in modo assoluto, come conseguenza del fatto che essi vengono creati e distrutti sempre a coppie. Inoltre, se fra gli stati due fermioni diversi non ci sono transizioni che conservino la parità, è impossibile per essi definire la parità relativa: questo è un punto molto importante, alla luce delle regole di selezione derivanti da varie leggi di conservazione conosciute (carica elettrica, numero barionico, numeri leptonici, flavor nelle interazioni forti ed elettromagnetiche, ...). Per esempio, non ci sono processi elementari forti o elettromagnetici che colleghino uno stato a un quark s a uno stato a un quark u , quindi la loro fase (e a maggior ragione la loro parità) relativa è arbitraria. Quindi, si prende per convenzione come +va la parità di tutti i fermioni (leptoni e quarks) e come -va la parità di tutti gli antifermioni (antileptoni e antiquarks).

C'è un fatto curioso a proposito dei fermioni: come si è visto, il quadrato dell'operatore parità deve essere equivalente all'identità. Se ora consideriamo una coppia fermione/antifermione nel suo CM, l'operazione P corrisponde ad una rotazione di π intorno al CM, e P^2 ad una rotazione di 2π ; ma è noto che, per un fermione, una rotazione di 2π cambia il segno della funzione d'onda (a causa dello spin semiintero). Quindi occorrono 2 rotazioni di 2π per riavere la funzione d'onda originale con il segno giusto. Le due rotazioni corrispondono, per il ns sistema, all'operazione P^4 : quindi abbiamo

$$U_P^4 = 1 \rightarrow \eta_P^4 = 1 \rightarrow \eta_P^2 = \pm 1 \rightarrow \eta_P = \pm i, \pm 1$$

È quindi possibile assegnare a un fermione una parità immaginaria, fermo restando che l'antifermione corrispondente ha parità relativa -1. Questa assegnazione è usata nella descrizione dei neutrini di Majorana, particelle ipotetiche che, pur essendo fermioni, sarebbero autostati di C (coniugazione di carica): se esistessero, potrebbero avere un ruolo interessante nella descrizione delle masse dei neutrini

4) Stati particella/antiparticella; stati di 2 fotoni

Nel caso di una coppia fermione/antifermione, si considerino gli autostati del momento angolare orbitale nel CM: ad essi potremo ora assegnare la parita:

$$\eta_p^{\bar{f}f} = \underbrace{(-1)}_{\text{intrinseca}} \underbrace{(-1)^l}_{\text{orbitale}} = (-1)^{l+1}$$

Nel caso di una coppia bosone/antibosone, nella stessa situazione avremo:

$$\eta_p^{\bar{b}b} = \underbrace{(\eta_p)^2}_{\text{intrinseca}} \underbrace{(-1)^l}_{\text{orbitale}} = (-1)^l$$

Nel caso di una coppia di fotoni di uguale energia, l'espressione *centro di massa* e' un po' audace, tuttavia viene comunemente usata: si tratta del riferimento in cui i fotoni viaggiano collineari in direzioni opposte. Conviene utilizzare gli stati di particella singola a elicitita' definita, visti prima: cerchiamo l'effetto dell'operazione parita' su questi stati, ricordando che l'elicitita' cambia segno per riflessione:

$$\begin{aligned} U_p |\mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, R\rangle &= |-\mathbf{k}, L; \mathbf{k}, L\rangle \\ U_p |\mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, L\rangle &= |-\mathbf{k}, R; \mathbf{k}, R\rangle \\ U_p |\mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L\rangle &= |-\mathbf{k}, L; \mathbf{k}, R\rangle \equiv |\mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L\rangle \\ U_p |\mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R\rangle &= |-\mathbf{k}, R; \mathbf{k}, L\rangle \equiv |\mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R\rangle \end{aligned}$$

dove le ultime due uguaglianze vengono dall'indistinguibilita' dei due fotoni (particelle identiche).

Quindi

- $|\mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L\rangle, |\mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R\rangle$ sono autostati di U_p , con autovalore $+1$; per essi $J_z = \pm 2$
- le combinazioni lineari $|\mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, R\rangle \pm |\mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, L\rangle$ sono autostati di U_p , con autovalori ± 1 ; per essi $J_z = 0$

Ci sono interessanti applicazioni di questi risultati alla fisica delle particelle, che saranno discusse dopo la coniugazione di carica.

e. Conservazione e violazione di P

(i) Generalita'

Occorre naturalmente chiedersi se la parita' e' davvero una quantita' conservata o no, esattamente come per ogni altra osservabile [In effetti, dire che sia proprio naturale chiederselo e' antistorico: ci sono voluti decenni, e una serie di risultati sperimentali stupefacenti, perche' la domanda venisse infine formulata nel 1956; fino ad allora, la conservazione della parita' veniva data per scontata, e sottintesa]. Se ci rifacciamo ad esempi piu' semplici, consideriamo il caso dell'impulso: quantita' conservata per un sistema se H e' invariante per traslazioni. Analogamente, P e' una quantita' conservata per un sistema se H e' invariante per riflessioni. Ora, ci aspettiamo che H , per qualunque sistema *isolato*, sia invariante per traslazioni, quindi che il suo impulso sia conservato: caso mai, la difficolta' puo' stare nello stabilire che il sistema sia davvero isolato. Quindi, la legge della conservazione dell'impulso e' molto generale e basata sulla proprieta' di omogeneita' dello spazio. Come vanno le cose per H riguardo alle riflessioni? Qui sta la sorpresa: c'e' una componente di H , quella legata all'interazione debole, che non e' invariante per riflessione: conseguentemente, la parita' non e' conservata nei processi deboli. In qualche modo, questo, che e' un fatto sperimentale, ci dice che, per le interazioni deboli, lo spazio fisico e' dotato di un 'senso di avviticciamento' preferito, fatto certamente controintuitivo.

Formalmente, la condizione di invarianza per parita' dell'eq. di Schrodinger per un sistema si riconduce all'invarianza dell'hamiltoniano, in totale analogia al caso classico:

$$H \text{ invariante per parita'} \rightarrow \text{Eq. di S. invariante}$$

In meccanica quantistica, l'invarianza di H e' equivalente alla commutativita' con U_p :

$$H \text{ invariante per parita'} \leftrightarrow [H, U_p] = 0$$

In teoria dei campi, l'invarianza delle equazioni di campo si riconduce all'invarianza della lagrangiana, proprieta' che sussiste o no a seconda della forma della lagrangiana stessa

Esempio di lagrangiana invariante per parita': interazione elettrone - fotone

$$L_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

L'invarianza segue dalle proprietà di trasformazione per parità delle matrici di Dirac e del 4-potenziale elettromagnetico A_μ

Esempio di lagrangiana non invariante per parità: interazione leptone - W (solo I generazione per semplicità)

$$L_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu + \text{hermitiano coniugato}$$

La non invarianza segue dalle proprietà di trasformazione per parità di γ_5 e del 4-potenziale debole W_μ

(ii) Test di conservazione della parità

Nel Modello Standard, l'interazione elettromagnetica e quella debole sono unificate nell'interazione elettrodebole, che incorpora *ab initio* la violazione della parità. Come è probabilmente noto, nel regime di basse energie ($E \ll M_W, M_Z$) l'interazione elettrodebole si scinde in due interazioni efficaci distinte, appunto elettromagnetica e debole: la prima conserva la parità, mentre la seconda la viola. D'altro canto, l'interazione forte conserva rigorosamente la parità ad ogni livello di approssimazione (se si prescinde da questioni complicate e controverse su effetti di violazione di CP dovuti alla struttura dell'interazione di colore, teoricamente possibili ma finora non osservati con alto grado di sensibilità). Essendo il Modello Standard, per l'appunto, un modello, occorre stabilirne sperimentalmente la validità delle assunzioni. Rinviando al capitolo sull'interazione debole una discussione più approfondita delle evidenze di violazione della parità, si riassumono di seguito alcuni test significativi della legge di conservazione della parità nelle interazioni forti e in quelle elettromagnetiche.

Test di parità nelle interazioni elettromagnetiche

Si osservi che la scoperta delle correnti deboli neutre e l'unificazione elettrodebole hanno aperto la strada ad un tipo di test particolarmente significativo, quello della ricerca di effetti di violazione della parità in processi elettromagnetici a bassa energia (*Atomic Parity Violation*, o *APV*). Tali effetti, chiaramente osservati in molti esperimenti, sono dovuti all'interferenza fra la corrente elettromagnetica e quella debole neutra; nel caso di transizioni atomiche.

Limitandoci ad un paio di esempi particolarmente significativi:

Si consideri una transizione fra due livelli atomici di ugual spin e parita',
 p.es. $(\mathcal{J}^P)_1 = I^+$, $(\mathcal{J}^P)_2 = I^+$. Il fotone emesso deve avere:

$$J_1 = J_2 + J_\gamma \rightarrow 1 = 1 \oplus J_\gamma \rightarrow J_\gamma = \cancel{0}, 1, 2$$

$$(+)= (+) \cdot P_\gamma \rightarrow P_\gamma = (+)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1^+ : \text{dipolo magnetico} \\ 2^+ : \text{quadrupolo elettrico} \end{cases}$$

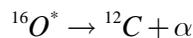
*Non ci sono fotoni a spin 0, perche'
 il fotone non ha mai elicitita' 0
 (gauge invariance)*

quindi la transizione di dipolo elettrico e' proibita: poiche' il rapporto fra le ampiezze di transizione dei multipoli superiori e quella di dipolo elettrico e' di circa 10^{-3} , ben calcolabile, si ottiene un limite dello stesso ordine per la componente di violazione della parita'.

La polarizzazione circolare dei fotoni e' simile all'elicitita', che e' una quantita' pseudoscalare: il suo valore atteso per transizioni fra stati a parita' definita e' zero. Se si osserva un valore $\neq 0$, allora la transizione da cui ha origine il fotone viola la parita'. Il limite che si ottiene e' di circa 10^{-4} , ben superiore all'effetto atteso dall'interferenza elettrodebole.

Test di parita' nelle interazioni forti

In questo caso, usando transizioni nucleari indotte dall'interazione forte, come il decadimento α , si cercano effetti indotti dall'interazione debole: si noti che questo e' diverso dall'interferenza elettrodebole, essendo solo una conseguenza delle interazioni deboli dei nucleoni. Nel caso del decadimento



ci troviamo di fronte al seguente schema di numeri quantici:

$$\left. \begin{array}{l} ^{16}\text{O}^* : 2^- \\ ^{12}\text{C} : 0^+ \\ \alpha : 0^+ \end{array} \right\} \rightarrow L = 2 \rightarrow (-1)^L = (+)$$

Quindi il decadimento viola la conservazione della parita' ed e' proibito. Tuttavia, si osserva effettivamente una debole transizione α , corrispondente ad un'ampiezza di circa $3 \cdot 10^{-7}$ e consistente con gli effetti dell'interazione debole.

(iii) Momenti di dipolo elettrico

Una conseguenza interessante della invarianza per parità è la non esistenza di momenti di dipolo elettrico elementari: infatti, se esistessero darebbero luogo ad un'interazione con un campo elettrico esterno:

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -a\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$$

che non sarebbe invariante per parità. Questo sarebbe ovviamente in contraddizione con il fatto che lo stato fondamentale della particella è a parità definita. Il fatto che si assuma che \mathbf{d} sia allineato con $\boldsymbol{\sigma}$ viene da questo: se non lo fosse, la particella avrebbe un ulteriore grado di libertà interno, analogo allo spin, che dovrebbe risultare allora in un completo cambiamento delle proprietà degli insiemi di particelle identiche, e del quale invece non c'è alcuna traccia. Naturalmente, il fatto che l'interazione debole violi la parità porterebbe a concludere che i dipoli elettrici elementari possano effettivamente esistere: tuttavia, la loro esistenza violerebbe anche il time reversal (v. dopo), la cui violazione, pur osservata in alcuni processi è piccola e non sembra poter giustificare momenti di dipolo osservabili.

Ci si può chiedere come questo risultato si confronti con l'esistenza, ben nota, di momenti di dipolo elettrico a livello molecolare (p.es. la molecola d'acqua è polare): ma molti degli stati stazionari delle molecole polari sono appunto stati *degeneri*, a parità non definita

6. Simmetrie discrete: coniugazione di carica

Esiste un'altra operazione di simmetria discreta, che però non riguarda cambiamenti del sistema di riferimento: si potrebbe dire che tale operazione corrisponde ad una inversione del verso positivo dell' "asse" della carica elettrica, nonché di quello dei numeri barionico e leptonico, della stranezza etc:

$$\begin{aligned} C: q &\rightarrow -q \\ B &\rightarrow -B \\ S &\rightarrow -S \\ &\dots \end{aligned}$$

In questo senso, la simmetria corrispondente all'operazione C (nei casi in cui e' verificata) e' definibile come un altro principio di relativita': "non esiste un «sistema di riferimento assoluto» per il segno delle cariche (in senso allargato); scambiare negativo con positivo non porta conseguenze misurabili".

Anche per questa operazione possiamo definire un operatore unitario nello spazio degli stati, come per la parita':

$$U_C |\psi\rangle = \eta_C |\bar{\psi}\rangle$$

L'operatore U_C , al pari di U_P , ha la proprieta' fondamentale: $U_C^2 = e^{2i\alpha} = 1$, come conseguenza dell'arbitrarieta' della fase assoluta degli stati. Essendo U_C unitario, questo vuol dire che, come per U_P :

$$U_C^2 = U_C U_C^\dagger \rightarrow U_C = U_C^\dagger \rightarrow U_C \text{ hermitiano}$$

Quindi U_C e' un'osservabile e ha autovalori reali; se lo applichiamo ad un suo autostato

$$U_C |\alpha\rangle = \eta_C |\alpha\rangle, U_C (U_C |\alpha\rangle) = \eta_C^2 |\alpha\rangle \rightarrow \eta_C = \pm 1$$

La quantita' η_C si chiama *parita' di carica*.

Si osservi che gli stati con carica (in senso allargato) non nulla *non* sono autostati di C , visto che vengono cambiati in stati con carica opposta. Di fatto, un autostato di C deve avere tutti i numeri quantici additivi uguali a zero (= numeri quantici del vuoto). Anche U_C , al pari di U_P , e' elemento di un gruppo discreto a 2 elementi, e da' luogo quindi ad un numero quantico *moltiplicativo*. Anche per C , se $[H, C] = 0$ η_C e' una costante del moto, e in assenza di degenerazione ha valore definito per gli stati stazionari.

a) Applicazioni

(i) Parita' di carica del fotone

La densita' di energia associata ad un sistema di cariche interagenti con il campo elettromagnetico e' data, in notazione covariante, da: $j^\mu A_\mu$, in termini della 4-corrente e del 4-potenziale. Poiche' le interazioni e.m. sono invarianti per C , le proprieta' di trasformazione di j e A rispetto a C devono essere uguali; poiche'

$$j_\mu = (\rho, \mathbf{j}) \xrightarrow{C} (-\rho, -\mathbf{j}) = -j_\mu$$

allora anche

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \xrightarrow{C} -A_\mu = -(\varphi, \mathbf{A})$$

Quindi la parita' di carica del fotone e' negativa. Per un sistema di n fotoni, si ha:

$$U_C |n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$$

Siccome le interazioni e.m. conservano C , uno stato iniziale con n fotoni non puo' evolvere in uno stato finale con m fotoni, se $m \neq n$, risultato noto come *teorema di Furry*.

(ii) Stati fermione/antifermione, etc

Per stati contenenti coppie bosone/antibosone, l'operazione C coincide con l'operazione P : entrambe scambiano di posto la particella con l'antiparticella. Il risultato quindi e':

$$U_C |b\bar{b}\rangle = U_P |b\bar{b}\rangle = (-1)^l |b\bar{b}\rangle \rightarrow \eta_C = (-1)^l$$

Per stati contenenti coppie fermione/antifermione, le cose sono leggermente piu' complicate: questo perche' P e C non sono equivalenti. Infatti:

$$U_P |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+1} |\bar{f}f\rangle$$

$$U_C |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+s} |\bar{f}f\rangle$$

Infatti, si consideri l'operazione C applicata al sistema descritto nel suo CM: essa e' equivalente all'azione combinata dell'operazione P e di quella dell'operazione S (scambio degli spin - ossia delle loro proiezioni lungo z).

L'autovalore dell'operatore U_S e' $(-1)^{s+1}$, perche' la funzione d'onda di spin cambia segno per $s=0$, e non cambia segno per $s=1$:

$$U_S |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\rangle = -|\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle$$

$$U_S |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle$$

$$U_S |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, U_S |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\text{Allora: } \eta_C = (-1)^{J+1} (-1)^{S+1} = (-1)^{J+S}$$

(iii) Particelle realmente neutre

I mesoni neutri con valore zero di stranezza, charm, etc ($\pi^0, \eta, \rho^0, \omega, \phi, J/\psi, \dots$) sono autostati di U_C , con parita' di carica $+1$ o -1 . Si noti che particelle elettricamente neutre come il neutrone o il K^0 non sono autostati di C , perche' non hanno tutti i numeri quantici del vuoto (il neutrone ha $B=1$, il K^0 ha $S=+1$). Per tutte le altre particelle, C non commuta con Q, Y etc. Per trovare la parita' di carica di questi stati:

$$\pi^0, \eta$$

Il pione neutro e il mesone η decadono elettromagneticamente in 2γ . Basandosi su questa proprieta', e assumendo che l'interazione e.m. conservi C , possiamo dire:

$$\eta_C = (-1)^2 = +1 \quad \text{per } \pi^0, \eta$$

$$\omega, \phi, J/\psi, \dots$$

E' interessante osservare come questi stati (particelle vettoriali, cioe' a spin 1) non possano decadere in 2γ . Infatti, c'e' un famoso argomento dovuto a Landau e Yang che lo prova

Consideriamo uno stato a spin 1 che decade in 2 fotoni. Lo stato finale deve

contenere i versori polarizzazione dei 2 fotoni, ciascuno una sola volta (v. sviluppo del campo e.m. in operatori di creazione e distruzione)

essere simmetrico rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$ fra i 2 fotoni (part. identiche)

assicurare che $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$, in cui \mathbf{k} e' l'impulso relativo dei 2 fotoni nel loro CM (trasversalita' del campo e.m.)

Con i 3 vettori $\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ dobbiamo costruire una quantita' vettoriale/pseudovettoriale (perche' il mom.angolare si conserva, quindi la funzione d'onda dello stato finale deve avere carattere vettoriale come quella dello stato iniziale). Le sole

quantita' vettoriali indipendenti che si possono costruire con i 3 vettori sono:

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \\ & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{k} \\ & \mathbf{k} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Nessuna delle 3 soddisfa tutti i requisiti

La I e' antisimmetrica per scambio $1 \leftrightarrow 2$

La II anche, visto che $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ per scambio $1 \leftrightarrow 2$

La III e' $\mathbf{e}_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1)$, quindi e' 0

Quindi una particella vettoriale non puo' decadere in 2 fotoni

(iv) Positronio

E' lo stato legato, analogo all'atomo di idrogeno, di un elettrone e un positrone. Le due particelle si annichilano rapidamente, e lo stato decade in 2 o 3 fotoni. E' interessante ricavare le regole di selezione dei decadimenti:

$$C : (-1)^{l+s} \rightarrow \text{per uno stato } S \begin{cases} \eta_C = +1 \text{ singoletto} \\ \eta_C = -1 \text{ tripletto} \end{cases}$$

$$\text{Per } n \text{ fotoni } \eta_C = (-1)^l \rightarrow \begin{cases} 2 \text{ fotoni } \eta_C = +1 \\ 3 \text{ fotoni } \eta_C = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{singoletto} \rightarrow 2 \text{ fotoni} \\ \text{tripletto} \rightarrow 3 \text{ fotoni} \end{cases}$$

(v) Mesoni e modello a quark

Sotto il profilo delle simmetrie P e C , i mesoni nel modello a quark assomigliano al positronio, essendo stati legati quark/antiquark. I numeri quantici attesi per i mesoni sono quindi (ogni casella mostra J, η_P, η_C , essendo sottointeso che C e' definita solo per particelle realmente neutre)

L	$S=0$	$S=1$
0	0^{-+}	1^{--}
1	1^{+-}	0^{++} 1^{++} 2^{++}
2	2^{-+}	1^{--} 2^{--} 3^{--}

I numeri quantici di queste sequenze sono detti *parita' (spaziale e di carica) naturali*. Si noti che le regole di selezione del positronio si applicano anche ai mesoni, quindi risultano vietati p.es. i decadimenti $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, nonche' i decadimenti di stati vettoriali in $\gamma\gamma$, etc

(vi) Decadimenti forti ed elettromagnetici in 2 pioni e affini

Le regole di selezione di P e C possono essere ricavate dai numeri quantici permessi per stati di 2 particelle scalari o pseudoscalari ($\pi\pi, KK, \dots$): $\eta_P = \eta_C = (-1)^J$

J	$PC=++$	$PC=-+,-+,--$
0	OK	KO
1	KO	KO,KO,OK
2	OK	KO

Si noti che per uno stato I^- (es. mesone ρ^0 in $\pi\pi$, o mesone ϕ in KK) e' proibito il decadimento in 2 particelle scalari identiche, perche' la funzione d'onda (che ha solo parte spaziale) sarebbe antisimmetrica ($J=1$) per scambio delle 2, e questo violerebbe la statistica di Bose.

b) Conservazione e violazione di C

Come per la parita', ci si chiede se le interazioni conservino la parita' di carica: e la risposta e' dello stesso tipo, ossia che questo avviene, tranne che per l'interazione debole. Quindi, possiamo dire che la componente di H relativa all'interazione debole *non e' invariante* rispetto a C

Test di coniugazione di carica nelle interazioni elettromagnetiche

I test storici che sono stati effettuati riguardano i decadimenti di π^0 ed η :

$$\pi^0, \eta$$

$$J^{PC} = 0^{-+} \rightarrow \begin{matrix} \pi^0 \\ C=+ \end{matrix} \not\rightarrow \begin{matrix} 3\gamma \\ C=(-)^3=- \end{matrix} \quad \text{limite superiore: } \leq 10^{-6}$$

Positronio, singoletto di onda S limite superiore: $\leq 10^{-6}$

$$J^{PC} = 0^{-+} \rightarrow \begin{matrix} (e^+e^-)^{1S_0} \\ C=+ \end{matrix} \not\rightarrow \begin{matrix} 3\gamma \\ C=(-)^3=- \end{matrix}$$

Qual e' il significato dell'espressione *limite superiore*? Esso e' da ricercarsi nelle proprieta' statistiche di insiemi di eventi. Nel caso considerato, si immagini di avere a disposizione un certo numero di pioni neutri, diciamo N_{π^0} : essi sarebbero presumibilmente prodotti in reazioni fra adroni ad alta energia, ed il numero totale di pioni prodotti nell'esperimento potrebbe essere dedotto dal conteggio dei loro decadimenti in uno dei modi il cui rapporto di decadimento sia conosciuto con precisione, p.es. in 2 gamma. La ricerca di decadimenti in 3 gamma procederebbe dall'osservazione di eventi con la giusta *topologia* (p.es. eventi che hanno 3 gamma che puntano al vertice primario dell'interazione), e per i quali sia soddisfatta la *cinematica* (p.es. la massa invariante dei 3 gamma e' uguale alla massa a riposo del π^0). Alla fine di questa ricerca si possono avere o no eventi del tipo cercato: se, dopo la correzione per le efficienze di rivelazione e la sottrazione degli inevitabili fondi, si rimane con $N_{3\gamma}$ eventi candidati, si arriva a determinare un rapporto di decadimento per il modo che viola C :

$$R = \frac{N_{3\gamma}}{N_{\pi^0}}$$

Se invece, come effettivamente e' accaduto in questi casi, non si osservano eventi per il modo proibito dalla conservazione di C , allora il rapporto R risulterebbe, a prima vista, uguale a 0: saremmo quindi portati a concludere che C e' strettamente conservata. Tuttavia, occorre ricordare che la misura e' stata eseguita *con una certa, limitata sensibilita' statistica*. P.es., se il rapporto R vero fosse 10^{-9} , con un campione di 10^6 π^0 non potremmo, evidentemente, mai osservare neanche un evento del tipo cercato: la nostra misura avrebbe una sensibilita' statistica insufficiente per quel valore di R ! In altre parole, osservare 0 eventi in un dato esperimento puo' essere la conseguenza di una regola di selezione assoluta, oppure di sensibilita' statistica insufficiente. Per esprimere quantitativamente il significato della non osservazione di un certo tipo di eventi ricorriamo alla statistica: fissati N_{π^0} e un ipotetico valore di R , ci aspettiamo di osservare *in media* $\bar{n} = N_{\pi^0} R$ eventi. Il senso di questo e', come al solito, quello di valore

medio ottenuto eseguendo molti, al limite infiniti esperimenti uguali. La distribuzione del numero n di eventi di quel dato tipo osservati in ogni singolo esperimento e' approssimativamente quella di Poisson:

$$P(n; \bar{n}) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

Quando \bar{n} e' piccolo il valore di n effettivamente osservato fluttua molto da un esperimento all'altro, e puo' accadere che assuma il valore 0; questo accade con probabilita' diversa al variare di \bar{n} (come e' ovvio, decrescente al crescere di \bar{n}). Quindi, se osservo $n=0$, questo' puo' derivare da un valor medio diverso da zero...

Supponiamo di voler dare una stima del max. valor medio (limite sup. per \bar{n}) che potrebbe fluttuare a 0 conteggi: per farlo dobbiamo prima decidere quale livello di confidenza dare al limite stesso. In senso assoluto, qualunque valore di \bar{n} puo' talvolta fluttuare a zero, solo che se \bar{n} e' grande lo fara' con probabilita' molto bassa; diciamo che la probabilita' minima che riteniamo sensato considerare e' $1-C$, dove $0 < C < 1$ e' il *livello di confidenza*. P.es., se accettiamo di trascurare le fluttuazioni che avvengano con prob. $< 5\%$, $C = 1 - 0.05 = .95$: questo equi vale a dire che non consideriamo possibili fluttuazioni che avvengano con probabilita' inferiore al 5%. Questa e', naturalmente, un'approssimazione, e se vogliamo essere conservativi possiamo aumentare il confidence level, p.es. portandolo al 99%: il punto essenziale e' che *non c'e' modo di portare il CI al 100% con una statistica finita*. Quindi il nostro limite superiore \bar{n}_{upp} si ottiene, fissato il livello di confidenza C , da:

$$\frac{\bar{n}_{upp}^0 e^{-\bar{n}_{upp}}}{0!} = 1 - C \rightarrow \bar{n}_{upp} = -\ln(1 - C)$$

$$C = 0.99 \rightarrow \bar{n}_{upp} = 4.60$$

$$C = 0.95 \rightarrow \bar{n}_{upp} = 2.99$$

$$C = 0.90 \rightarrow \bar{n}_{upp} = 2.30$$

$$C = 0.68 \rightarrow \bar{n}_{upp} = 1.14$$

Il limite superiore al rapporto di decadimento e' allora:

$$R < \frac{\bar{n}_{upp}(C)}{N_{\pi^0}} \text{ al } C (\%) \text{ confidence level}$$

Si puo' a questo punto interpretare meglio l'affermazione fatta sopra che ottenere un limite superiore con *100% CL* richiederebbe una statistica infinita: con altre parole, *non e'*

possibile dimostrare con certezza assoluta che C e' conservata. Viceversa, evidentemente e' piu' facile dimostrare che C e' violata: basta trovare un campione significativo di eventi che violano C, anche se eventi di fondo ed efficienza limitata possono rendere arduo determinare il significato statistico dell'osservazione.

Sono stati eseguiti anche altri tipi di test, fra i quali alcuni storici riguardanti la ricerca di asimmetrie nelle distribuzioni energetiche dei pioni in altri modi di decadimento del mesone η :

$$\left. \begin{array}{l} \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \\ \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma \end{array} \right\} \rightarrow \text{elettromagnetici}$$

[Anche il primo dei 2 viene tradizionalmente classificato come elettromagnetico, perche' la sua ampiezza e' circa uguale a quella del secondo]. Se C e' conservata, ci si attende che il numero di decadimenti in cui il π^+ ha energia maggiore del π^- sia uguale a quello dei decadimenti in cui avviene il contrario, e il risultato conferma l'ipotesi.

Test di coniugazione di carica nelle interazioni forti

Un esempio di test di conservazione di C in processi forti e' quello della produzione di pioni a 90° nel CM da annichilazioni antiprotono-protone; in effetti, applicando C al processo indicato:



Quindi, le distribuzioni in energia dei pioni +vi e -vi emessi a 90° nel CM dell'annichilazione devono essere uguali. Il test fornisce un limite superiore alla violazione di C di circa 10^{-2} .

7. Time reversal

La simmetria rispetto a inversione del tempo (che dovrebbe essere in realta' chiamata simmetria rispetto a *inversione del moto*) riguarda processi fra particelle elementari, e non e', ovviamente, applicabile a

sistemi macroscopici, la cui evoluzione temporale procede in modo irreversibile; come e' noto, l'apparente contraddizione fra reversibilita' microscopica e irreversibilita' macroscopica fu posta in luce verso la fine dell' '800, e spiegata su basi statistiche da Boltzmann. La simmetria (o l'asimmetria) dei processi elementari rispetto a inversione temporale deve quindi essere intesa alla stessa stregua di quello rispetto a inversione spaziale: ne' piu' ne' meno che il cambiamento di segno della coordinata temporale degli eventi.

Anche a livello microscopico si e' osservata una piccola violazione della simmetria in alcuni processi deboli, osservazione che ha dato luogo a un intenso sforzo teorico e sperimentale teso a chiarirne il meccanismo; mentre il Modello Standard e' in grado di dare una descrizione relativamente semplice del fenomeno, esso rimane in gran parte non realmente compreso.

a) Invarianza per inversione temporale in fisica classica

Anche per l' inversione temporale si puo' invocare un " principio di relativita' " (*per le interazioni per cui e' verificato*), come per l'inversione delle altre coordinate: sistemi di riferimento nei quali la coordinata temporale degli eventi scorre nei due possibili sensi sono equivalenti per la descrizione dei sistemi fisici.

La descrizione piu' semplice dell'invarianza per time reversal e' quella in cui si immagina di filmare un processo, e poi di proiettare il film all'indietro: se il processo proiettato e' un possibile processo fisico si verifica la simmetria rispetto a inversione temporale. P.es., il film di un sasso che cade viene riproiettato come quello di un sasso lanciato verso l'alto; quest'ultimo e' un possibile processo fisico, quindi diciamo che l'interazione gravitazionale e' invariante per time reversal.

Possiamo quindi, come per la parita', definire in astratto una nuova operazione di simmetria:

$$T: t \rightarrow t' = -t$$

Così troviamo le proprieta' di trasformazione rispetto a time reversal delle diverse grandezze meccaniche ed elettriche, richiedendo, come proprieta' base, che le equazioni di Newton, o di Maxwell, restino invariate in forma rispetto alla trasformazione. Le grandezze meccaniche si trasformano allora come segue:

$$\begin{aligned}
t &\rightarrow -t : \\
\mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r} \\
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{d(-t)} = -\mathbf{v}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \\
\mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \\
\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{L} \\
E &\rightarrow E
\end{aligned}$$

Le grandezze elettromagnetiche seguono le leggi di trasformazione:

$$\begin{aligned}
\rho &\rightarrow \rho \\
\mathbf{j} &= \rho\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{j} \\
\varphi &\rightarrow \varphi \quad \text{legato alle cariche} \\
\mathbf{A} &\rightarrow -\mathbf{A} \quad \text{legato alle correnti} \\
\mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{E} \quad \text{legato alle cariche, e a } \partial\mathbf{B}/\partial t \\
\mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{B} \quad \text{legato alle correnti, e a } \partial\mathbf{E}/\partial t
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, come già per l'operazione di inversione spaziale, si può osservare che le proprietà di trasformazione delle grandezze elettromagnetiche rispetto a time reversal sono convenzionali, essendo basate sull'assunzione che la carica elettrica sia un invariante; viceversa, è possibile assumere che la carica stessa cambi segno rispetto alla riflessione temporale, senza che le leggi fisiche cambino. In questo caso, in tutte le equazioni riportate sopra si avrebbe un cambiamento di segno.

Si osservi come non tutte le equazioni della fisica classica siano invarianti per time reversal: le equazioni che coinvolgono processi dissipativi (in sistemi a molti gradi di libertà, quindi) non sono invarianti per time reversal. Un tipico esempio di equazione che descrive un processo irreversibile è la legge di Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

Se si ammette che la conduttività sia una costante invariante per time reversal (come è naturale), allora la legge di Ohm, come si vede immediatamente, non è invariante; questo è coerente con la nostra comprensione di questa legge come non legata a processi fondamentali.

b) Time reversal in meccanica quantistica: azione sugli stati

Dobbiamo in primo luogo, in analogia con i casi precedenti, trovare un operatore U_T nello spazio degli stati.

Poiche' l'operazione esegue la trasformazione della coordinata temporale

$$T : t \rightarrow t' = -t$$

nello spazio degli stati le due diverse rappresentazioni dello stesso stato fisico dovranno, *a prima vista*, soddisfare la relazione:

$$\langle t' | \psi' \rangle = \langle t | \psi \rangle = \langle -t' | \psi \rangle$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle t | \psi' \rangle &= \langle -t | \psi \rangle \\ \rightarrow \psi'(t) &= \psi(-t) \end{aligned}$$

Siccome l'operatore che trasforma gli stati, U_T , deve eseguire l'operazione

$$U_T : |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle \equiv U_T |\psi\rangle$$

sembrerebbe naturale richiedere:

$$U_T : |t\rangle \rightarrow |t'\rangle \equiv U_T |t\rangle = \eta | -t \rangle$$

dove η e' una pura fase, presente perche' gli stati sono appunto definiti a meno di una fase arbitraria.

Le cose tuttavia sono un po' piu' complicate: supponiamo infatti che per gli stati l'operazione di time reversal coincida con la semplice sostituzione $T : t \rightarrow -t$, senza altre modifiche, esattamente come per l'inversione spaziale. Allora si trova che:

- L'eq. di Schrodinger non e' invariante per inversione del tempo: infatti

$$H |\psi(t)\rangle = i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} \xrightarrow{U_T} H |\psi(-t)\rangle = -i \frac{\partial |\psi(-t)\rangle}{\partial t}$$

Per risolvere il problema, si definisce (Wigner) l'operatore di time reversal come

$$\left. \begin{array}{l} T : t \rightarrow -t \\ K : i \rightarrow -i \end{array} \right\}, U_T = KT$$

Si puo' notare che $K^2 = 1, K^{-1} = K$; l'operatore K coincide dunque con l'operazione di coniugazione complessa.

In conclusione, l'azione dell'operatore di TR su uno stato e' :

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow U_T |\psi(t)\rangle = |\psi^T(t)\rangle = |\psi^*(-t)\rangle$$

Questa definizione, tuttavia, deve essere considerata provvisoria, perche' non copre tutti i casi possibili: quando la funzione d'onda ha piu' di una componente le cose sono piu' complicate, e la definizione di operazione di time reversal deve essere completata.

A titolo di esempio, prendiamo la solita onda piana nella rapp. posizione:

$$e^{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \xrightarrow{U_T} e^{-(-i)(E(-t) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = e^{(-i)(Et + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = e^{-i(Et + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$$

Come atteso intuitivamente, lo stato time-reversed coincide con quello che si ottiene invertendo l'impulso dello stato originale.

Si osservi: il risultato si ottiene senza cambiare il segno di \mathbf{p} , perche' nella definizione di U_T si parla solo di

Coniugazione complessa di ψ
Cambiamento di $t \rightarrow -t$

Il cambiamento di segno di \mathbf{p} e' un *effetto* della trasformazione: ossia, rende conto di come descriviamo lo stesso stato fisico (onda piana che si propaga p.es. lungo la x) in 2 sistemi di riferimento con senso positivo dell'asse temporale opposto: *onda progressiva* \leftrightarrow *onda regressiva*

- Consideriamo ora il caso di una particella a spin $\frac{1}{2}$, descritta non relativisticamente da una funzione d'onda a 2 componenti: poiche' abbiamo visto che le componenti del momento angolare cambiano segno sotto time reversal, ci aspettiamo che questa trasformazione scambi di ruolo la componente a spin-up e quella a

spin-down nella funzione d'onda. Quindi dobbiamo estendere la definizione di operatore di TR per il caso di particelle a spin $\frac{1}{2}$: in pratica

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_+^*(-t) \\ \psi_-^*(-t) \end{pmatrix}$$

dove M e' una matrice unitaria 2×2 , da determinare richiedendo che, conformemente alla regola dei momenti angolare, l'operatore di spin (matrici di Pauli):

$$\langle \psi^T(t) | \boldsymbol{\sigma} | \psi^T(t) \rangle = - \langle \psi(-t) | \boldsymbol{\sigma} | \psi(-t) \rangle$$

Si puo' mostrare che M deve soddisfare

$$M^{-1} \boldsymbol{\sigma} M = -\boldsymbol{\sigma}^*$$

e che una possibile scelta di M e':

$$M = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi per una particella a spin $\frac{1}{2}$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} = -i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_+^*(-t) \\ \psi_-^*(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^*(-t) \\ \psi_+^*(-t) \end{pmatrix}$$

In effetti, lo stato trasformato ha invertita la direzione dello spin, come ci aspettiamo debba essere. Un ragionamento analogo si puo' fare per stati descritti dall'eq. di Dirac o da altre equazioni d'onda relativistiche (v. corsi di teoria dei campi).

A proposito dell'azione di U_T su stati a spin $\frac{1}{2}$, si osservi che:

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{U_T} \begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} = -i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_+^*(-t) \\ \psi_-^*(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_-^*(-t) \\ \psi_+^*(-t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{U_T} -i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_-^*(t) \\ -\psi_+^*(t) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -\psi_+(t) \\ -\psi_-(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}$$

Quindi U_T^2 non e' la trasformazione identica, ma introduce un segno - per gli stati di una particella a spin $\frac{1}{2}$; il risultato si estende a tutti gli stati a spin semi-intero, mentre vale $U_T^2 = 1$ per stati a spin intero. Questa proprieta' degli stati a spin $\frac{1}{2}$ e' analoga a quella riguardante l'operazione di inversione spaziale.

c) Azione sulle osservabili

Se ci chiediamo quali siano le relazioni di commutazione fra operatore di time reversal e osservabili, possiamo semplicemente usare le proprieta' di trasformazione delle analoghe quantita' classiche.

d) Azione su prodotti scalari ed elementi di matrice

L'operatore U_T non e' un operatore unitario, ne' hermitiano; infatti

$$U_T (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a^* U_T |\psi_1\rangle + b^* U_T |\psi_2\rangle$$

che non e' quel che ci si attende da un operatore unitario; si dice che U_T e' anti-unitario e antihermitiano.

Si osservi che l'operazione di coniugazione complessa, malgrado l'apparenza, non e' un'operazione lineare: infatti

$$K : \alpha z \rightarrow (\alpha z)^* = \alpha^* z^*$$

Prova:

$$\alpha = a e^{i\varphi}, z = \rho e^{i\psi} \rightarrow \alpha^* = a e^{-i\varphi}, z^* = \rho e^{-i\psi}$$

$$\alpha z = a e^{i\varphi} \rho e^{i\psi} = a \rho e^{i(\varphi+\psi)} \rightarrow (\alpha z)^* = a \rho e^{-i(\varphi+\psi)} = \alpha^* z^*$$

Ma:

$$\alpha^* z^* \neq \alpha z^* \rightarrow \text{Non lineare se } \alpha \neq \alpha^* !!$$

Infatti, per un operatore lineare deve essere:

$$A : (\alpha z) \rightarrow A(\alpha z) = \alpha A(z)$$

Come tale, pur preservando la norma, U_T non ha autovalori reali, e quindi non da' luogo a un numero quantico conservato (come la parita' e la coniugazione di carica). E' interessante trovare l'azione di U_T sui prodotti scalari: a questo scopo, possiamo considerare il prodotto scalare fra due stati, e verificare come si trasforma rispetto a U_T :

$$\begin{aligned}
& \{|i\rangle, i=1, \dots\} \text{ insieme di stati base} \\
& \langle i|j\rangle = \delta_{ij} \\
& \rightarrow \langle U_T i|U_T j\rangle = \delta_{ij} \text{ norma conservata da } U_T \\
& |\psi_1\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\psi_1\rangle \rightarrow |U_T \psi_1\rangle = \sum_i |U_T i\rangle \langle i|\psi_1\rangle^* \\
& \langle \psi_2| = \sum_j \langle \psi_2|j\rangle \langle j| \rightarrow \langle U_T \psi_2| = \sum_j \langle \psi_2|j\rangle^* \langle U_T j| \\
& \rightarrow \langle U_T \psi_2|U_T \psi_1\rangle = \sum_j \langle \psi_2|j\rangle^* \langle U_T j|\sum_i |U_T i\rangle \langle i|\psi_1\rangle^* \\
& = \sum_{i,j} \langle \psi_2|j\rangle^* \underbrace{\langle U_T j|U_T i\rangle}_{\delta_{ij}} \langle i|\psi_1\rangle^* = \sum_i \langle \psi_2|i\rangle^* \langle i|\psi_1\rangle^* \\
& = \sum_i \langle i|\psi_2\rangle \langle \psi_1|i\rangle = \langle \psi_1|\psi_2\rangle
\end{aligned}$$

Quindi U_T scambia gli stati nel prodotto scalare; se essi sono gli stati iniziale e finale di un processo, questo impone l'uguaglianza degli elementi di matrice di transizione fra i due processi, diretto e inverso, se H commuta con U_T , condizione verificata per le interazioni forti ed elettromagnetiche, ma non per quelle deboli. Non va dimenticato che gli elementi di matrice che devono risultare uguali se il TR e' una buona simmetria collegano stati iniziale e finale scambiati con valori di impulso e componente dello spin rovesciati (v. qui sotto)!

e) Applicazione del time reversal in fisica delle particelle

1) In assenza di numeri quantici conservati, l'applicazione piu' interessante della simmetria (o violazione) di time reversal in fisica delle particelle viene dal *teorema di reciprocita' e principio del bilancio dettagliato*, che si puo' comprendere nel seguente modo:

Teorema di reciprocita'

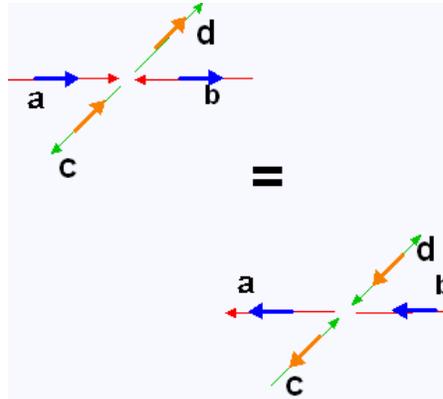
Se la matrice S e' invariante per time reversal, si puo' dimostrare che vale la relazione *fra ampiezze di transizione*, in una reazione a 2 corpi,:

$$\begin{aligned}
& 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \\
& \langle \mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f | S | \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i \rangle = \frac{\langle -\mathbf{p}_i, -\mathbf{s}_i |}{T|\mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i\rangle} S \frac{| -\mathbf{p}_f, -\mathbf{s}_f \rangle}{T\langle \mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f |}^*
\end{aligned}$$

dove i simboli indicano collettivamente gli impulsi e gli spin iniziali e finali. Si noti che, come visto prima, l'operatore di time reversal:

- inverte impulsi e spin
- scambia stato iniziale e stato finale

Per una reazione a 2 corpi la cosa si puo' visualizzare p.es. nel seguente modo



Teorema del bilancio dettagliato

Facendo le opportune medie sugli spin iniziali e finali, e tenendo conto dei rispettivi fattori di spazio delle fasi, segue la relazione fondamentale *fra sezioni d'urto differenziali*:

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega} = \left(\frac{p_f}{p_i} \right)^2 \frac{(2s_3 + 1)(2s_4 + 1)}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}$$

- 2) Un' interazione e' invariante per TR se H non contiene coefficienti complessi e se contiene solo operatori invarianti per TR (2 condizioni indipendenti) . In termini di proprieta' dell' hamiltoniano si ha:

Esempi ovvii di operatori non TR-invarianti sono:

$$\sigma, p, \sigma \cdot r, \sigma \cdot (p_1 \times p_2)$$

Quindi p.es. la polarizzazione trasversale, che e' appunto il valore medio di $\sigma \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$, non e' invariante per TR. Attenzione pero' a non estrapolare questa conclusione: nel caso delle interazioni forti, sono sempre presenti le interazioni nello stato finale, che modificano il risultato dell'interazione primaria. Questo spiega perche' in effetti si osservino polarizzazioni trasversali considerevoli nella maggior parte dei processi forti. Viceversa, in un decadimento come $K \rightarrow \pi + \mu + \nu$ che procede tramite l'interazione debole, non c'e' interazione nello stato finale, e si puo' cercare una polarizzazione trasversale del μ (valor medio dell'operatore $\sigma_\mu \cdot (\mathbf{p}_\pi \times \mathbf{p}_\mu)$, non TR-invariante) come segnale di violazione di T

- 3) L'invarianza delle interazioni per time reversal proibisce l'esistenza di momenti di dipolo elettrico a livello elementare (p.es., per leptoni e quark). Infatti, se un tale momento di dipolo esistesse, esso interagirebbe con un campo elettrico esterno tramite l'hamiltoniano:

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -a\sigma \cdot \mathbf{E}$$

dovendo essere \mathbf{d} allineato con σ (v. discussione a proposito della parita'). Ora, H_{dip} viola appunto il time reversal

Si puo' osservare come l'esistenza di dipoli elettrici elementari sia quindi doppiamente proibita, sia dalla parita' sia dal time reversal: poiche' tutte e due queste simmetrie sono in realta' violate nelle interazioni deboli, non si puo' escludere che i dipoli elettrici elementari in effetti esistano. C'e' una notevole attivita' sperimentale tesa a mettere in luce la presenza di dipoli elementari, soprattutto per il neutrone

f) Test e violazioni dell'invarianza per time reversal

Così come per le altre simmetrie, occorre stabilire se le interazioni conosciute rispettano l'invarianza per time reversal: in assenza di numeri quantici conservati, e quindi di regole di selezione per i processi, l'invarianza per time reversal si puo' verificare cercando conferme o violazioni delle conseguenze previste dall'invarianza stessa. Conformemente a quanto detto sopra, alcuni test "storici" hanno confermata la validita' dell'invarianza attraverso diverse verifiche:

a. Test del bilancio dettagliato

Poiche' in base al time reversal ci si attende

$$\langle \mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f | S | \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i \rangle = \frac{\langle -\mathbf{p}_i, -\mathbf{s}_i | S | -\mathbf{p}_f, -\mathbf{s}_f \rangle^*}{T(\mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i)} \frac{1}{T(\mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f)}$$

e' possibile, in principio, confrontare sezioni d'urto differenziali per due processi, a uguali energie nel CM, in cui gli stati iniziale e finale siano scambiati. Risultati ad elevata sensibilita' sono stati ottenuti per le reazioni forti a bassa energia:

$$p + {}^{27}\text{Al} \leftrightarrow \alpha + {}^{24}\text{Mg}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Amp}(T \text{ viol})}{\text{Amp}(T \text{ cons})} \leq 4 \cdot 10^{-4}$$

E' da notare che il processo viene studiato ad energie basse, e quindi non e' sensibile ad eventuali effetti T-violating che abbiano origine ad energie elevate.

b. Test in decadimenti deboli 'standard'

Un tipico esempio e' quello del decadimento del barione strano Λ^0 :

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Tale decadimento viola la parita', come ogni processo debole, e quindi lo stato finale viene prodotto in una miscela di onde S e P.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1^+}{2} &= \frac{1^+}{2} \oplus 0^- \oplus L^{(-1)^L} = \frac{1}{2} \oplus L \\ + &= + \cdot \cdot \cdot (-1)^L = (-1)^{L+1} \end{aligned} \right\} \rightarrow L = 0, 1$$

Si puo' far vedere che la distribuzione angolare del pione nel CM della Λ^0 ha la forma generale:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_\pi} = 1 + A(\mathbf{J}_\Lambda + \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi + B(\mathbf{J}_\Lambda \times \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi + C(\mathbf{J}_\Lambda \cdot \mathbf{J}_p) + (1-C)(\mathbf{J}_\Lambda \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi)(\mathbf{J}_p \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi)$$

in cui i vettori $\mathbf{J}_{L,p}$ sono le polarizzazioni di Λ^0 e protone, mentre \mathbf{p}_p e' un versore nella direzione del pione. Si nota subito che il fattore con il prodotto triplo non e' invariante per time reversal:

$$(\mathbf{J}_\Lambda \times \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi \xrightarrow{T} ((-\mathbf{J}_\Lambda) \times (-\mathbf{J}_p)) \cdot (-\hat{\mathbf{p}}_\pi) = -(\mathbf{J}_\Lambda \times \mathbf{J}_p) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\pi$$

quindi ci si attende che sia $B=0$ se l'interazione debole e' invariante. Tuttavia, come accennato prima, in questo caso l'interazione forte fra le particelle dello stato finale (a tutti gli effetti, si tratta di scattering fra adroni) introduce una correzione a questa conclusione. La correzione e' comunque calcolabile, e conduce a un valore di B consistente con zero, con errore dell'ordine di qualche % (v parte su interazione debole per qualche dettaglio in piu')

c. Violazione del time reversal

La violazione del time reversal e' stata effettivamente osservata in alcune classi di processi deboli, che coinvolgono i mesoni K^0 e B^0 . Originariamente l'osservazione e' stata di tipo *indiretto*, essendo basata sull'evidenza sperimentale per la violazione di CP e sull'assunzione di validita' dell'invarianza per CPT . Recentemente si e' ottenuta evidenza sperimentale *diretta* per la violazione di T in alcuni modi di decadimenti dei K^0 (v. parte su interazione debole).

Nel Modello Standard, la violazione del time reversal, strettamente legata a quella di CP , e' descritta tramite la presenza di una fase complessa nella matrice CKM delle interazioni elettrodeboli.

Esiste inoltre una possibilita' teorica di violazione di CP , e di T , da parte dell'interazione di colore, basata sull'esistenza nella lagrangiana della QCD di un termine CP - e T -violating proporzionale ad un parametro, il cui valore non e' per altro previsto in alcun modo dalla teoria. Il fatto che, entro errori molto piccoli, esso risulti uguale a zero costituisce un fatto non compreso, che ha portato i teorici a formulare diverse possibili spiegazioni: la piu' interessante richiede l'esistenza di una nuova particella, l'*assione*, della quale alcuni esperimenti continuano a cercare evidenza.

8. Teorema CPT e conseguenze

a) Teorema CPT

Qualunque interazione che rispetti i principi generali della *microcausalita'* (per cui gli effetti dell'interazioni si sentono nel futuro, ma non nel passato), e della *relazione spin-statistica* (per cui le particelle a spin semiintero seguono la statistica di Fermi e quelle a spin intero quella di Bose) e' invariante rispetto all'operazione combinata *CPT*. Questo vuole anche dire che se una delle simmetrie e' violata, almeno un'altra deve esserlo. Questo risultato, che si dimostra, anche se non molto facilmente, in teoria dei campi, da un lato pone un vincolo rigido alla forma di qualsiasi interazione; dall'altro ha anche alcune altre conseguenze molto importanti: si puo' infatti far vedere che dalla sua validita' seguono la eguaglianza rigorosa di masse a riposo e vite medie, nonche' dei momenti magnetici, per ogni coppia particella/antiparticella.

b) Test di CPT

E' ovviamente di grande interesse stabilire sperimentalmente la validita' del teorema CPT. I test eseguiti finora riguardano il confronto fra masse, vite medie e momenti magnetici di particelle e antiparticelle; i limiti piu' stringenti vengono dal confronto eseguito sui *K* neutri:

$$2 \frac{m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}}{m_{K^0} + m_{\bar{K}^0}} \leq 10^{-18}, \quad 90\% \text{ CL}$$

Questo risultato si ottiene attraverso misure non banali che sfruttano il fenomeno della rigenerazione dei *K* neutri.

9. Altre leggi di conservazione

Oltre a quelle "spazio-temporali" e alla coniugazione di carica, ci sono altre simmetrie delle interazioni fondamentali le cui associate leggi di conservazione hanno rilevanza: si tratta della conservazione della *carica elettrica*, del *numero barionico*, dei 3 *numeri leptonici* (elettronico, muonico, tauonico), e del *tipo di quark* (flavor: quindi isospin, stranezza, charm, beauty, top)

Non tutte queste leggi di conservazione sono sullo stesso piano: se consideriamo carica elettrica e numero barionico, entrambi

assolutamente conservati per quel che ne sappiamo, osserviamo che, mentre la prima e' anche la sorgente di un campo (appunto, il campo elettromagnetico), non c'e' evidenza di un qualche campo associato al secondo, cosi' come ai 3 numeri leptonici. Per questi ultimi, fra l'altro, c'e' una evidenza sempre piu' convincente che le rispettive leggi di conservazione non siano assolutamente rispettate, ma vengano violate, almeno nel fenomeno delle oscillazioni dei neutrini. Per quanto riguarda la conservazione del flavor, essa e' rispettata dalle interazioni forti ed elettromagnetiche, mentre e' violata dalle interazioni deboli.

Riassunto principali leggi di conservazione

Quantita' conservata	Interazione		
	forte	e.m.	debole
4-impulso	OK	OK	OK
Carica	OK	OK	OK
Mom.ang, moto CM	OK	OK	OK
Numero barionico	OK	OK	OK
N numeri leptonici(3)	OK	OK	OK
Parita'	OK	OK	KO
Parita' di carica	OK	OK	KO
(Time reversal)	OK	OK	KO
CP	OK	OK	KO
(CPT)	OK	OK	OK
Flavor	OK	OK	KO

NB Time reversal e CPT sono proprieta' di invarianza alle quali non corrispondono leggi di conservazione, perche' i corrispondenti operatori non sono unitari

10. Simmetrie e gruppi: nomenclatura

A causa del diverso apparato formale usato in meccanica quantistica per la descrizione degli stati di un sistema (spazio vettoriale lineare (Hilbert) vs. spazio delle fasi in meccanica classica), risulta alquanto vantaggioso utilizzare le tecniche della teoria dei gruppi, soprattutto delle loro rappresentazioni a mezzo di matrici, per descrivere le proprieta' di simmetria dei sistemi fisici.

In matematica un gruppo e' un insieme di elementi fra i quali e' definita una legge di composizione (leggi: una generalizzazione

dell'idea di operazione fra numeri) che gode delle seguenti proprietà:

- a) Il risultato della composizione di due elementi qualsiasi del gruppo è un elemento del gruppo (*chiusura*):

$$A * B = C, \quad A, B \text{ elementi qualunque dle gruppo}$$

- b) La legge di composizione è *associativa*:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

- c) Il gruppo contiene un *elemento identità* E , definito da:

$$E * A = A * E = A \quad \forall A$$

- d) Per ogni elemento A del gruppo esiste *l'elemento inverso* A^{-1} , appartenente al gruppo e definito da:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$$

Esempio 1

Insieme: Traslazioni lungo una retta

Operazione: combinazione di traslazioni collineari

Allora:

$$T(a) * T(b) = T(a+b) \in \mathcal{G}$$

$$T^{-1}(a) = T(-a) \in \mathcal{G}$$

$$e = T(0)$$

Controesempio

Insieme: Traslazioni lungo un segmento $[-c, c]$

Operazione: come sopra

Allora:

$$T(a) * T(b) = T(a+b) \notin \mathcal{G} \text{ se } |a+b| > c$$

Esempio 2

Insieme: Rotazioni attorno ad un asse fisso

Operazione: Combinazione di rotazioni coassiali

Allora:

$$R(\alpha)R(\beta)=R(\alpha+\beta)\in G$$

$$R^{-1}(\alpha)=R(-\alpha)$$

$$E=R(0)$$

Nomenclatura relativa ai gruppi

1. Un gruppo si dice *abeliano* se due qualsiasi operazioni commutano; *non abeliano* in caso contrario

Esempio 3:

Il gruppo delle rotazioni attorno ad un asse fisso e' abeliano

$$R(\alpha)*R(\beta)=R(\beta)*R(\alpha)$$

Controesempio

Il gruppo delle rotazioni nello spazio attorno a un punto fisso e' non abeliano

$$R(\alpha,\beta,\gamma) R(\alpha',\beta',\gamma') \neq R(\alpha',\beta',\gamma') R(\alpha,\beta,\gamma)$$

2. Un gruppo si dice *finito* o *infinito* a seconda del numero dei suoi elementi

3. Un gruppo, finito o infinito, si dice *discreto* se l'insieme dei suoi elementi puo' essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi.

4. Un gruppo infinito si dice *continuo* se puo' essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei numeri reali. Gli elementi di un gruppo continuo dipendono da uno o piu' parametri (reali), il cui numero e' l'*ordine* del gruppo. Possiamo scrivere simbolicamente:

$$G = \{g : g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)\} \text{ gruppo continuo di ordine } N$$

Esempio:

Una rotazione generica dipende in modo continuo da 3 angoli; scegliendoli come gli angoli di Eulero si scrive simbolicamente:

$$R = R(\alpha, \beta, \gamma)$$

In fisica delle particelle ci sono molti diversi esempi di gruppi, che hanno notevole importanza per la classificazione degli stati, l'esistenza di leggi di conservazione e regole di selezione, e soprattutto in quanto rappresentativi di *simmetrie fondamentali* dei sistemi fisici. Fra questi, rivestono particolare interesse i *gruppi di Lie*, che sono gruppi continui particolari d'ordine finito. Un gruppo di Lie e' un gruppo continuo in cui, nella legge di composizione generica:

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma(\alpha, \beta))$$

il *vettore dei parametri* γ per l'operazione prodotto e' una funzione analitica dei vettori α e β delle operazioni fattori. La richiesta di analiticit  (Lie) consente di ricondurre le propriet  di tutti gli elementi del gruppo a quelle degli elementi infinitamente vicini all'elemento identit . Nelle applicazioni fisiche, i gruppi di Lie sono invariabilmente dei gruppi di *trasformazioni di coordinate*, intendendo il termine coordinata nel senso piu' vasto a includere, oltre alle normali coordinate spazio-temporali di un sistema fisico, anche le sue coordinate interne (struttura di Lorentz degli operatori di campo, coordinate interne come le varie 'cariche' elettrica, barionica, etc). Consideriamo la trasformazione di coordinate

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

e conveniamo di identificare con $\alpha=0$ la trasformazione identica:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N; \mathbf{0}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Nell'ipotesi di analiticit , le $f_i(\alpha)$ sono sviluppabili in serie di potenze di α p.es. nell'intorno di $\alpha=0$, quindi:

$$dx_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j$$

Ora, una qualunque funzione $F(\mathbf{x})$ delle coordinate cambiera', in seguito alla trasformazione considerata, della quantita':

$$F \rightarrow F + dF$$

$$dF = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r d\alpha_j \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F$$

$$F + dF = F \left[1 + \sum_{j=1}^r d\alpha_j \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right]$$

Consideriamo la quantità (operatore)

$$X_j = i \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

che, come si vede, è indipendente dalla natura della grandezza F , e nella cui definizione il fattore i è convenzionale: essa si chiama il j -esimo *generatore* (oppure *operatore infinitesimo*) della trasformazione. Per un gruppo di Lie il numero dei generatori (operatori infinitesimi) è evidentemente uguale all'ordine del gruppo. Le operazioni finite (non infinitesime) si ottengono *esponenziando* i generatori, il che corrisponde a *iterare* le operazioni infinitesime:

$$X_j = i \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$\rightarrow F + dF = \left[1 - i \sum_{j=1}^r X_j d\alpha_j \right] F$$

$$\rightarrow F + \Delta F = e^{-i\mathbf{X}\mathbf{a}} F \equiv U(\mathbf{a}) F$$

L'operatore finito U è unitario quando gli \mathbf{X} sono hermitiani. L'insieme dei generatori costituisce quella che si chiama *l'algebra di Lie del gruppo* (ossia, una struttura algebrica legata a quella del gruppo).

Un risultato importantissimo sui gruppi di Lie è che il commutatore di 2 generatori qualsiasi è sempre una combinazione lineare di tutti i generatori del gruppo:

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_{\nu=1}^r c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu$$

dove le quantità (costanti complesse) $c_{\lambda\mu}^\nu$ sono le *costanti di struttura* (una specie di DNA) del gruppo.

Il (max. numero di generatori che commutano fra loro) è il *rango* del gruppo.

Se si possono costruire funzioni dei generatori che commutano con tutti gli elementi del gruppo, queste si chiamano *operatori di Casimir* del gruppo; si puo dimostrare che il loro numero e' uguale al rango del gruppo, e che ognuno e' un multiplo dell'operatore identita' (lemma di Schur)

11. Simmetrie e gruppi: rappresentazioni

Una rappresentazione (lineare) di un gruppo e' un insieme di matrici quadrate, in corrispondenza con gli elementi del gruppo, che godono delle stesse proprieta' del gruppo: chiusura rispetto alla moltiplicazione (fra matrici), rispettando la corrispondenza elemento/matrice; esistenza di un inverso per ogni elemento; esistenza di un elemento unita'. Per un dato gruppo ci possono essere diverse rappresentazioni (anche in numero infinito): in particolare, sono di interesse particolare le rappresentazioni a dimensione finita (matrici quadrate $n \times n$).

Nota

Si possono considerare le rappresentazioni di un gruppo costituito da matrici: si tratta di insiemi di matrici diverse da quelle che costituiscono il gruppo. D'altra parte, il gruppo originale e' di fatto una rappresentazione di se stesso!

La chiave per comprendere l'utilita' dei metodi della teoria dei gruppi nello studio delle simmetrie di un sistema quantistico sta proprio nel concetto di rappresentazione: le matrici della rappresentazione possono, come al solito, essere pensate come operatori lineari che agiscono entro qualche spazio vettoriale, reale o complesso. Ora, lo spazio degli stati di un sistema quantistico e' proprio uno spazio vettoriale, quindi se si possono trovare rappresentazioni unitarie di un dato gruppo di simmetria nello spazio degli stati, le operazioni di simmetria descritte dal gruppo sono in corrispondenza con operatori unitari nello spazio degli stati; come al solito, la proprieta' di unitarieta' viene dalla richiesta, per un sistema quantistico, che le operazioni di simmetria lascino invariati norme e prodotti scalari fra gli stati. Data la relazione vista prima fra le operazioni finite e i generatori, si vede subito che quando la rappresentazione e' unitaria i generatori sono hermitiani, e quindi corrispondono a osservabili (grandezze fisiche) del sistema. Per vedere concretamente in che cosa questo si traduce, consideriamo un sistema fisico descritto dall'hamiltoniano H , e supponiamo che S sia un gruppo di simmetria di

H : allora, per ogni operatore unitario U_S che faccia parte di una rappresentazione di S si avra' per definizione:

$$H' = U_S^{-1} H U_S = H \rightarrow [H, U_S] = 0$$

Ora, gli autostati di H soddisferanno:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \rightarrow H U_S |\psi\rangle = U_S H |\psi\rangle = E U_S |\psi\rangle$$

quindi $U_S|\psi\rangle$ e' un autostato di H : quindi il livello E e' degenere (ossia, ad esso appartengono diversi stati indipendenti). La degenerazione del livello dipende da S ed H . Se la degenerazione e' n , si dice che gli stati del sistema con energia E costituiscono un *multipletto* di ordine n . Poiche' si puo' sempre scrivere

$$U_S |\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^n U_S^{ij} |\psi_j\rangle, \quad j=1, \dots, n$$

allora possiamo identificare la matrice U_S^{ij} con una rappresentazione (di ordine n) del gruppo di simmetria S . Se ora consideriamo l'insieme degli operatori di Casimir del gruppo S , risulta evidente che, commutando con tutti i generatori del gruppo di simmetria del sistema, commutano anche con l'hamiltoniano: quindi sono altrettante costanti del moto.

Una rappresentazione a dimensione n in genere puo' essere scomposta in rappresentazioni a dimensione piu' piccola: in questo caso la rappresentazione si dice *riducibile*. Se questo non e' possibile, la rappresentazione e' detta *irriducibile*. Ogni rappresentazione riducibile puo' essere scomposta nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili. La ricerca delle rappresentazioni unitarie irriducibili di un dato gruppo di trasformazioni di simmetria costituisce evidentemente la parte centrale dello studio di quel gruppo, almeno per cio' che riguarda le sue applicazioni ai problemi fisici.

Definizione di due rappresentazioni irriducibili importanti:

Rappresentazione *fondamentale*:

quella con $dim = dimensione\ minima > 1$

Rappresentazione *regolare* (o *aggiunta*):

quella con $dim = \text{numero dei parametri}$

Riassumendo, vale il seguente risultato:

Se S e' un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema fisico descritto dall'hamiltoniano H , gli autostati del sistema si raggruppano in multipletti, ciascuno dei quali costituisce la base di una rappresentazione irriducibile di S .

12. Esempio: gruppo delle rotazioni

Il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ e' un gruppo di Lie a 3 parametri (perche' per definire la rotazione ci vogliono 3 angoli: si possono visualizzare come gli angoli di Eulero - v. moto del corpo rigido, oppure dicendo che 2 servono a indicare la direzione dell'asse di rotazione, e 1 l'angolo di cui si ruota attorno all'asse). In generale, l'operazione di simmetria sulle coordinate cartesiane e' definita da:

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$$

$$R \text{ matrice ortogonale} \rightarrow RR^T = I$$

$$\rightarrow \det(RR^T) = 1 \rightarrow \det(R) = \det(R^T) = \pm 1$$

Il gruppo $SO(3)$ e' quindi definibile come il gruppo delle matrici reali ortogonali 3×3 per le quali $\det = +1$ (escluse quindi le riflessioni degli assi). Sviluppando la matrice generica nell'intorno di I si ha, al prim'ordine:

$$\begin{cases} R \rightarrow I + \delta R \\ R^T \rightarrow (I + \delta R)^T \end{cases} \rightarrow (I + \delta R)(I + \delta R)^T = I \rightarrow \delta R = -\delta R^T$$

Quindi la matrice generica e' antisimmetrica; poiche' dipende da 3 parametri reali si potra' scrivere in tutta generalita' come:

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} dx_1 = -\varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_2 \\ dx_2 = -\varepsilon_3 x_1 + \varepsilon_1 x_3 \\ dx_3 = -\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1 \end{cases}$$

Identificando gli ε_i con gli incrementi infinitesimi $d\alpha_i$, abbiamo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} = -x_3, \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} = x_2$$

.....

.....

da cui otteniamo i generatori:

$$\begin{cases} X_1 = i \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ X_2 = i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ X_3 = i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{cases}$$

Operazione finita:

$$U(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{a}}$$

$SO(3)$ ha quindi 3 generatori, che si identificano immediatamente con le componenti cartesiane del momento angolare del sistema. Le relazioni di commutazione dell'algebra di Lie di $SO(3)$ sono quindi quelle del momento angolare:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k = c_{ij}^k J_k$$

con il che abbiamo anche identificato le costanti di struttura. Nessuno dei generatori commuta con gli altri 2, quindi il rango del gruppo $SO(3)$ e' 1; c'e' quindi un solo operatore di Casimir, che ora si identifica immediatamente con il quadrato del momento angolare $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

La ricerca delle rapp. unitarie irr. di $SO(3)$ porta a identificarle in base al valore dell'operatore di Casimir; come e' noto dalla teoria del momento angolare, le dimensioni delle rapp.irr. sono $1, 2, 3, 4, \dots$, e ognuna corrisponde a un valore di $(2j+1)$, con j della serie $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

Un breve accenno a come si arriva a questo risultato:
Si definiscono gli operatori a scaletta

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$$

Quindi:

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2$$

Dalle relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2J_3 \\ [J_\pm, J_3] &= \mp J_\pm \end{aligned}$$

Poiche' \mathbf{J}^2 e J_3 commutano, possiamo considerare gli autostati comuni ai due e i rispettivi autovalori:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |\lambda, m\rangle &= \lambda |\lambda, m\rangle \\ J_3 |\lambda, m\rangle &= m |\lambda, m\rangle \end{aligned}$$

Ora consideriamo l'azione degli operatori a scaletta sugli autostati di \mathbf{J}^2 e J_3 :

$$\begin{aligned} J_\pm |\lambda, m\rangle &= \mp [J_\pm, J_3] |\lambda, m\rangle = \mp J_\pm J_3 |\lambda, m\rangle \pm J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ &= \mp J_\pm m |\lambda, m\rangle \pm J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ \rightarrow J_\pm |\lambda, m\rangle \pm m J_\pm |\lambda, m\rangle &= J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ \rightarrow (m \pm 1) J_\pm |\lambda, m\rangle &= J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ \rightarrow J_\pm |\lambda, m\rangle &\text{ e' autostato di } J_3 \text{ con autovalore } m \pm 1 \end{aligned}$$

Allora deve essere

$$J_\pm |\lambda, m\rangle = C_\pm(\lambda, m) |\lambda, m \pm 1\rangle$$

Poiche' $\mathbf{J}^2 - J_3^2 = J_1^2 + J_2^2 \geq 0$, allora $\lambda - m^2 \geq 0$, quindi i possibili valori di m sono limitati per ogni dato λ .

Sia j il max. valore di m :

$$\begin{aligned} J_+ |\lambda, j\rangle &= 0 = J_- J_+ |\lambda, j\rangle \\ \rightarrow (\mathbf{J}^2 - J_3^2 - J_3) |\lambda, j\rangle &= (\lambda - j^2 - j) |\lambda, j\rangle = 0 \\ \rightarrow \lambda &= j(j+1) \end{aligned}$$

Sia j' il min. valore di m : ripetendo il ragionamento

$$\rightarrow \lambda = j'(j'-1)$$

Quindi

$$j(j+1) = j'(j'-1)$$
$$\rightarrow j' = -j$$

visto che l'altra soluzione $j'=j+1$ e' in contraddizione con l'ipotesi che $j=m_{max}$. Dunque $j-j'=2j$ deve essere un numero intero, visto che J_+, J_- incrementano o decrementano i valori di m fra $-j$ e $+j$ di una unita' per volta: quindi j deve essere intero o semi-intero

Gli operatori di Casimir corrispondenti hanno l'espressione $j(j+1)I$. Ogni rapp. irr. definisce cosi' un multipletto di molteplicita' $2j+1$, in cui i diversi stati sono identificati dal valore m di una delle componenti di j , considerata come l'unico generatore che commuta, e le transizioni fra essi sono generate dagli operatori di transizione, combinazioni lineari degli altri 2 generatori. Se l'hamiltoniano commuta con l'operatore \hat{J}^2 (invarianza per rotazioni), gli stati di ogni multipletto sono degeneri.

Quindi l'insieme delle infinite rappresentazioni unitarie del gruppo delle rotazioni in 3D corrisponde all'insieme dei possibili operatori momento angolare per un dato sistema fisico: per ogni rappresentazione c'e' un insieme di 3 matrici, che, nello spazio degli stati, corrisponde agli operatori componenti cartesiane del momento angolare del sistema. La diversa dimensionalita' delle matrici di ogni rappresentazione corrisponde al numero di componenti necessarie e sufficienti a descrivere gli stati di momento angolare del sistema. Se il momento angolare puo' essere scomposto nella somma vettoriale di due o piu' contributi (es. tipico, mom. orbitale e spin), la rappresentazione e' riducibile, e le matrici rappresentative si scompongono nella *somma diretta* di matrici corrispondenti a rapp. irriducibili. Per esempio, un sistema in cui il momento angolare totale risulti dal contributo orbitale $l=1$ e da quello di spin $s=1/2$ potra' trovarsi in uno stato appartenente alla rappresentazione prodotto

$$\underline{3} \otimes \underline{2}$$

$=2*1+1$ $=2*1/2+1$

Questa rappresentazione e' riducibile, e si scompone nella somma diretta di 2 rapp. irriducibili

$$\underline{3} \otimes \underline{2} = \underline{2} \oplus \underline{4}$$

$=2*3/2+1$

E' bene riflettere sul significato di questo risultato: in *ogni rappresentazione* ci sono 3 generatori, che corrispondono alle 3 componenti del mom. angolare totale del sistema. Essi hanno il significato universale – indipendente dalla rappresentazione - di componenti di un vettore (o meglio di un tensore antisimmetrico del II ordine, che e' il momento angolare totale). Il modo con cui questi generatori agiscono, nello spazio di Hilbert degli stati, per ruotare la funzione d'onda, dipende viceversa dalla rappresentazione: in quella 1-dimensionale, la funzione d'onda *scalare* rimane invariata; in quella 2-dimensionale, la funzione d'onda *spinoriale* viene ruotata dalle matrici di Pauli; in quella 3-dimensionale, la funzione d'onda *vettoriale* viene ruotata dalle matrici di rotazione; etc.

Questo e' vero per ogni gruppo di Lie. Le regole per la scomposizione dipendono da come e' fatta l'algebra di Lie del gruppo (ossia, dalle costanti di struttura): per le rotazioni sono codificate nei coefficienti di Clebsch-Gordan.

Altri esempi di gruppi di Lie saranno discussi in connessione con i concetti di isospin, simmetria unitaria etc.