Simmetrie unitarie

1. Introduzione

Come si ricordera', il numero quantico di isospin viene introdotto per descrivere la proprieta' saliente dell'interazione forte, ossia l'indipendenza dalla carica. Come e' noto, ci sono due fenomeni fondamentali legati a questo nuovo numero quantico:

- *la conservazione dell'isospin totale, e della sua componente z, in ogni processo forte*
- *la classificazione delle particelle a interazione forte in multipletti di isospin*

Entrambe questi aspetti portano a identificare quella di isospin come una *simmetria* dei sistemi contenenti particelle a interazione forte: come sappiamo, ogni legge di conservazione e' legata a una proprieta' di invarianza di H rispetto a qualche gruppo di trasformazioni, che e' conseguenza di una proprieta' di simmetria del sistema fisico; d'altra parte, l'osservazione di multipletti di stati con eguale energia e differenti valori di uno o piu' numeri quantici indica anch'essa l'esistenza di una proprieta' di simmetria del sistema fisico in oggetto.

> Si noti che le proprieta' di simmetria del sistema possono essere espresse come invarianza, rispetto a un gruppo di trasformazioni, di H (Hamiltoniano) , o equivalentemente anche di L (Lagrangiana, o densita' di Lagrangiana per un sistema continuo): poiche' per un sistema relativistico, quest'ultima quantita', al contrario di H, e' un invariante di Lorentz, essa e' preferibilmente usata in teoria dei campi

Conseguentemente, e' naturale porsi la domanda su quale sia il gruppo di simmetria dell'isospin: come risulta evidente, non ci aspettiamo che si tratti di qualche simmetria di tipo geometrico-cinematico, come quelle considerate a suo tempo, ma piuttosto di un nuovo tipo di *simmetria interna* (ossia, che non coinvolge trasformazioni di coordinate spazio temporali; si noti che in questo senso anche la simmetria di coniugazione di carica sarebbe di questo tipo; tuttavia essa e' sotto molti aspetti strettamente legata ad altre due simmetrie di tipo "geometrico", quelle per inversione spaziale e temporale).
L'individuazione del gruppo di simmetria collegato aggiunge poco alla nostra comprensione delle conseguenze della conservazione dell'isospin, tuttavia risulta utile per poi capire meglio come funzionano simmetrie interne piu' complicate.

2. Rotazioni, U(2) e SU(2)

a) Rotazioni

Il gruppo delle rotazioni e' strettamente imparentato con il gruppo dell'isospin, quindi conviene richiamare alcune delle sue proprieta' principali.
Come detto prima, le rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni vengono classificate in base al valore dell'unico operatore di Casimir del gruppo: in base all'interpretazione fisica dei generatori delle rotazioni infinitesime come componenti del momento angolare, esso viene identificato con il (quadrato del) momento angolare totale del sistema. I valori possibili dell'operatore sono le quantita' $j(j+1)$, con j intero o semintero. Corrispondentemente, le matrici rappresentative degli elementi del gruppo si possono classificare in base alle caratteristiche geometriche degli oggetti geometrici su cui operano:

j	2j+1	Quantita'
0	*1*	*Scalare*
1/2	*2*	*Spinore*
1	*3*	*Vettore*
3/2	*4*	*Spinore*
2	*5*	*Tensore*

Se consideriamo un sistema composto, per esso la matrice di rotazione risultera' il *prodotto esterno* delle matrici che ruotano i sottosistemi componenti. Si puo' dimostrare che la rappresentazione prodotto e' *riducibile*, ossia puo' essere scomposta, per mezzo di una trasformazione unitaria, nella somma di rappresentazioni a dimensione minore, ciascuna delle quali e' *autonoma* (nel senso che, all'interno di ognuna di esse, le componenti si trasformano fra loro, senza uscire dalla rappresentazione).

P.es., se combiniamo due sottosistemi a spin 1 (vettori, 3 componenti ciascuno), otteniamo 9 prodotti di componenti, che possiamo arrangiare in un vettore composto a 9 righe: su di esso agira' ovviamente una matrice rappresentativa 9x9:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & . & . & . & . & . & . & . & r_{19} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ r_{91} & . & . & . & . & . & . & . & r_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Quando la rappresentazione e' riducibile, come in questo caso, e' sempre possibile trovare una trasformazione unitaria che riduca la matrice a forma diagonale a blocchi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & a_{33} & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & a_{44} & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_{77} & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{pmatrix}$$

Quindi, l'oggetto geometrico su cui la matrice opera si spezza in tre oggetti, a dimensione 1,3 e 5, sui quali operano indipendentemente l'una dall'altra le 3 sottomatrici indicate. Queste sottomatrici non sono ulteriormente scomponibili, e quindi costituiscono altrettante rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni. Simbolicamente si scrive:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5}$$

per indicare che il *prodotto esterno (tensoriale)* di due rappresentazioni **3** e' la *somma diretta* delle tre rappresentazioni **1**, **3**, **5.** Si noti che questo risultato, e in generale le regole di scomposizione del prodotto di rappresentazioni, cambiano per i diversi gruppi che si considerano: le regole di SU(2) sono diverse da quelle di SU(3) etc, in conseguenza della diversa struttura dell'algebra di Lie di ogni gruppo.

b) Rappresentazioni di grado pari

Nelle rappresentazioni di grado dispari le matrici, che operano su tensori a *(2j+1)* componenti, sono ortogonali. Le cose sono piu' complicate per quelle di grado pari: se consideriamo p.es. la rappresentazione di grado 2, le relative matrici agiscono su oggetti geometrici a 2 componenti. Questi oggetti *non* sono, evidentemente, normali vettori a 2 componenti reali: una matrice 2x2 che sia ortogonale dipenderebbe da un solo parametro, e quindi non potrebbe rappresentare una rotazione in 3 D, che dipende da 3 angoli.

Si ricordi che una matrice in 2 dimensioni, ortogonale, soddisfa le condizioni:

$$\begin{aligned} & MM^T = 1 \\ & \rightarrow m_{11}^2 + m_{12}^2 = 1 \\ & \rightarrow m_{22}^2 + m_{21}^2 = 1 \\ & \rightarrow m_{12}m_{22} + m_{11}m_{21} = 0 \end{aligned}$$

che lasciano un solo parametro libero, coerentemente con le attese per la rotazione di un vettore a 2 componenti (che sta in un piano).

Quindi la matrice di ordine 2 agisce su (leggi: *ruota,* visto che e' una rappresentazione del gruppo delle rotazioni) oggetti geometrici a 2 componenti complesse (gli *spinori*, appunto), che hanno proprieta' di trasformazione per rotazioni diverse da quelle dei comuni vettori a 2 dimensioni. L'analisi delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni rivela dunque una nuova varieta' di enti geometrici, che ha applicazioni interessanti in meccanica quantistica. Definendo la norma dello spinore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ come:

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|^2 = |a|^2 + |b|^2 = aa^* + bb^*$$

richiediamo, come e' naturale, che essa sia lasciata invariata dalla rotazione. Quindi, siamo portati a individuare le matrici di rotazione per gli spinori (ossia, le matrici della rappresentazione ***2***) come tutte le matrici *unitarie 2x2*. In generale potremo scrivere:

$$\begin{aligned} & M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow 8 \text{ parametri liberi (Re+Im)} \\ & MM^\dagger = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & 4 \text{ condizioni:} \\ & \left. \begin{aligned} & AA^* + BB^* = 1 \\ & AC^* + BD^* = 0 \\ & CA^* + DB^* = 0 \\ & CC^* + DD^* = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 \text{ parametri liberi} \end{aligned}$$

C'e' quindi ancora qualcosa di troppo: l'insieme delle matrici considerate dipende da 4 parametri, uno in piu' rispetto alle rappresentazioni di grado dispari del gruppo delle rotazioni.

c) U(2) e SU(2)

L'insieme di tutte le matrici unitarie 2x2 e' (ovviamente) un gruppo, che si chiama *U(2).* Per queste matrici possiamo scrivere, visto che il determinante del prodotto e' il prodotto dei determinanti:

$$\det(M)\det\left(M^{\dagger}\right)=\det\left(MM^{\dagger}\right)=1\rightarrow\left|\det(M)\right|^{2}=1$$

il che mostra che il determinante di *M* e' una pura fase:

$$\det(M)=e^{i\varphi}$$

Possiamo ridurre di uno il numero dei parametri del gruppo richiedendo la condizione supplementare

$$\det(M)=1$$

In sostanza, questo si puo' fare perche' la fase di uno stato quantistico e' arbitraria e non misurabile.
Il gruppo di tutte le matrici unitarie e unimodulari si chiama SU(2). Esso ha 3 parametri, esattamente come il gruppo delle rotazioni: possiamo cosi' cercare la corrispondenza fra gli elementi dei due gruppi.

Un'osservazione importante sulle matrici unitarie unimodulari

Sappiamo che ogni matrice unitaria si puo' scrivere nella forma esponenziale:

$$M=e^{iH}$$

in cui *H* e' una matrice hermitiana. Il determinante di ogni matrice unitaria essendo una pura fase, se si impone la condizione di unimodularita' si ottiene

$$\det(M)=1\rightarrow\det\left(e^{iH}\right)=1$$

Ora, ci si puo' sempre mettere nel caso in cui *M* e' diagonale: se non lo e', possiamo trovare una trasformazione unitaria *U* che la diagonalizzi, lasciando invariato il determinante:

$$U : M \to UMU^{-1}$$
$$\det(M) \to \det\left(UMU^{-1}\right) = \underbrace{\det(U)}_{e^{i\varphi}} \det(M) \underbrace{\det\left(U^{-1}\right)}_{e^{-i\varphi}} = \det(M)$$

Si noti che *M* e' diagonale se lo e' *H* (basta pensare allo sviluppo in serie di potenze di e^{iH}); *H*, essendo hermitiana, e' sempre diagonalizzabile. Consideriamo il determinante di *M* quando la matrice e' diagonale:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{ii} \to \ln\left(\det(M)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(m_{ii})$$
$$\ln(m_{ii}) = \ln\left(e^{iH_{ii}}\right) = iH_{ii} \to \sum_{i=1}^{n} \ln(m_{ii}) = i\mathrm{Tr}(H)$$

Quindi:

$$\ln\left(\det(M)\right) = i\mathrm{Tr}(H) \to \det(M) = e^{i\mathrm{Tr}(H)}$$

Richiedere *det(M)=1* e' quindi equivalente a imporre *Tr(H)=0*. Quindi, l'insieme delle matrici *2x2*, hermitiane a traccia nulla e' sufficiente a costruire tutto il gruppo *SU(2)*. Poiche' qualunque matrice appartenente a questo insieme puo' essere scritta come combinazione lineare delle 3 matrici di Pauli, oltre che della matrice identita', queste 3 matrici costituiscono *l'insieme dei generatori* di SU(2): questo non ci stupisce, visto che esse costituiscono, in quanto componenti del momento angolare, anche l'insieme dei generatori del gruppo delle rotazioni per un sistema a spin *1/2*

Si puo' cogliere qualcosa del significato geometrico della corrispondenza fra rotazioni e matrici unitarie nel seguente modo: consideriamo l'insieme delle generiche matrici *M*, 2x2, hermitiane e a traccia nulla:

$$M = \begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & -a \end{pmatrix}$$
$$\to \det(M) = -a^2 - b^2 - c^2$$

Tale insieme costituisce anch'esso uno spazio vettoriale, come non e' difficile dimostrare; su di esso e' quindi possibile realizzare una rappresentazione di *SU(2)*. L'azione degli elementi del gruppo *SU(2)* in questo spazio vettoriale si esplica secondo le regole di trasformazione delle matrici:

$$M \to M' = UMU^{-1} = UMU^{\dagger}$$

Siccome la trasformazione e' unitaria, si conservano traccia, determinante, hermiticita'. Quindi:

$$M' = \begin{pmatrix} a' & b'-ic' \\ b'+ic' & -a' \end{pmatrix} \rightarrow \det(M') = -a'^2 - b'^2 - c'^2$$

Di conseguenza $a^2+b^2+c^2 = a'^2+b'^2+c'^2$; se ora interpretiamo *a,b,c* come le componenti di un vettore, vediamo che il mod. quadro del vettore viene conservato dalla trasformazione di *SU(2)*. Questo indica che le matrici del gruppo *SU(2)* sono in grado di ruotare i vettori a 3 componenti: *SU(2)* e' quindi di fatto equivalente al gruppo delle rotazioni.
Quindi, l'insieme delle trasformazioni del gruppo *SU(2)* e' in corrispondenza con l'insieme delle rotazioni in 3D (non biunivoca: ad ogni rotazione, corrispondono 2 trasformazioni di *SU(2)*, con segno opposto): Il gruppo delle rotazioni e *SU(2)*, essendo isomorfi (o quasi), hanno le stesse rappresentazioni irriducibili. Possiamo dire, usando un linguaggio non rigoroso, che il gruppo *SU(2)* e' per definizione l'insieme delle "rotazioni" degli spinori a 2 componenti, ricordando che per ruotare uno spinore non si puo' usare una matrice ortogonale, ma ne occorre una unitaria.

3. *SU(2)* e isospin

Il gruppo *SU(2)* compare dunque come una delle rappresentazioni unitarie del gruppo delle rotazioni. Tuttavia, e' evidentemente possibile partire dalla definizione stessa di *SU(2)* come insieme delle matrici 2x2 unitarie e unimodulari, in quanto gruppo in se' e per se'. Esso avra' le stesse rappresentazioni del gruppo delle rotazioni, visto che e' ad esso (quasi) isomorfo. Questo punto di vista si rivela utile nell'identificarlo come il gruppo di simmetria dell'isospin.

Qualche osservazione sul significato della simmetria di isospin

Lo scopo di questa nota e' quello di tentare di chiarificare il significato fisico della simmetria di isospin (e, per estensione, di altre simmetrie di flavor: piu' in generale, di simmetrie di tipo interno). Spesso si ha la sensazione che, al di la' degli aspetti e delle manipolazioni formali, il senso fisico di queste simmetrie non venga colto completamente: a parere del sottoscritto, la ragione di questo fatto potrebbe esser fatta risalire a una insufficiente comprensione del significato di spin.

Lo spin

Normalmente, le trattazioni elementari di questo soggetto partono dal concetto di momento angolare: accanto alla componente di origine orbitale, nella trattazione non relativistica si procede di solito a introdurre la componente intrinseca, le cui

proprieta' sono scelte ad hoc in modo da accordarsi all'esperienza. L'introduzione di funzioni d'onda a 2 componenti segue come necessaria, in considerazione dell'espressione esplicita delle matrici componenti di $\boldsymbol{J}$ quando $j=1/2$.
Come visto nel paragrafo precedente, risulta d'altronde possibile introdurre funzioni d'onda a 2 o piu' componenti (alla Pauli), in modo un po' meno surrettizio, anche se fondamentalmente sempre *ad hoc*, richiedendo in modo generale che esse abbiano proprieta' di simmetria definite rispetto al gruppo delle rotazioni: questo e' ragionevole se accettiamo il gruppo delle rotazioni come gruppo di simmetria di H per una particella. Questa richiesta equivale, come si e' visto, a quella di identificarle come stati appartenenti alle rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni. Poiche', come visto prima, le rappresentazioni irriducibili hanno tutte le dimensioni intere $d=2j+1$, siamo condotti in modo naturale ad accettare l'idea che ci siano funzioni d'onda a >1 componenti.
La possibilita' di introdurre funzioni d'onda a piu' di una componente suggerisce che esse descrivano stati nei quali sono presenti ulteriori *gradi di liberta' (interni)* oltre a quelli caratteristici del moto orbitale (che sono la versione quantizzata dell'analogo classico della particella). I generatori del gruppo delle rotazioni nelle rapp.irr. di cui si parla devono quindi rappresentare altrettante *grandezze fisiche* legate a questi ulteriori gradi di liberta'; nel caso delle rotazioni, le grandezze fisiche sono identificabili con le componenti del momento angolare intrinseco (spin) dello stato considerato. Dal punto di vista matematico, quindi, l'esistenza di multipletti di stati con la stessa energia segue dall'invarianza di H per rotazioni.
Ora, l'argomento puo' anche essere usato alla rovescia: l'osservazione di multipletti di stati con la stessa energia e diverso valore di un qualche grado di liberta' interno suggerisce l'esistenza di una proprieta' di simmetria del sistema, ossia l'invarianza di H rispetto a un gruppo di trasformazioni. Nel caso citato prima, il grado di liberta' interno e' una delle componenti del momento angolare, e il gruppo e' quindi quello delle rotazioni. Per gli stati delle particelle elementari, a parte alcune complicazioni relativistiche, questo e' appunto quel che si osserva: ci sono stati a momento angolare intrinseco nullo (scalari), come i pioni e i K, stati a spin ½ (spinori), come gli elettroni, i protoni o i quark, a spin 1 (vettori), come i fotoni e i mesoni ρ, etc.

L'isospin

L'osservazione sperimentale mette in luce, come e' noto, l'esistenza di altri multipletti, famiglie di particelle *a interazione forte* in cui il grado di liberta' interno non e' legato a proprieta' "meccaniche", come il momento angolare intrinseco, ma piuttosto al valore della carica elettrica. In altre parole, si osservano famiglie di particelle di massa *molto simile* (ossia, non identica come nel caso della simmetria per rotazioni) e diverso valore della carica elettrica. Unito all'indipendenza dell'interazione forte dalla carica elettrica, osservata p.es. confrontando lo scattering *pp*, *pn* e *nn* a bassa energia, o i livelli energetici dei nuclei speculari, questo fatto suggerisce di interpretare tutte le particelle di una data famiglia come diversi stati di un'unica particella: in ognuno di questi stati abbiamo un valore diverso per qualche grado di liberta' interno (*non meccanico*), da investigare.
Se questo modo di considerare le cose e' sensato, la struttura dei multipletti osservati dovrebbe metterci in grado di stabilire quale sia il gruppo di simmetria di H del quale i multipletti stessi sono la manifestazione. Ora, nel considerare le famiglie di particelle a interazione forte, si osservano singoletti, doppietti, tripletti,

quadrupletti: in altre parole, tutti i multipletti piu' bassi di *SU(2)*. Questo fa pensare che, almeno provvisoriamente, il gruppo di simmetria delle interazione forte sia da identificare con *SU(2)*. Per la sua completa analogia con l'altro *SU(2)*, quello che definisce il grado di liberta' interno legato allo spin degli stati, esso viene chiamato il *gruppo dell'isospin*. L'isospin e' dunque la grandezza fisica i cui autovalori definiscono la struttura a multipletti delle particelle a interazione forte: pur non essendo una grandezza meccanica, esso e' nondimeno una grandezza fisica a tutti gli effetti, al pari della carica elettrica (con l'importante differenza chenon possiamo prenderlo come sorgente di un campo di forza).

Consideriamo il caso di un nucleone: l'ipotesi base della simmetria di isospin e' che protone e neutrone siano i due possibili stati dinamici per una particella generica, il nucleone, nello stesso modo in cui i due stati a spin "su" e a spin "giu'" sono i possibili stati per un elettrone. Il nucleone viene quindi ad avere un *nuovo grado di liberta'*, che non compare per le particelle, come gli elettroni o i neutrini, che non sono soggette all'interazione forte. In questa descrizione, quindi, i due stati base nello spazio degli isospin per il nucleone sono:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi stati sono, nello spazio dell'isospin, gli stati base dell'insieme degli spinori a 2 componenti: ogni altro stato del nucleone risulta raggiungibile da questi tramite una "rotazione", che si effettua come visto tramite una delle matrici unitarie di SU(2).

Occorre pero' precisare che, agli effetti pratici, non tutte le combinazioni lineari degli stati base sono fisicamente realizzabili: visto che la carica elettrica e' assolutamente conservata (regola di superselezione), gli stati a carica non definita non sono stati fisici e non possono realizzarsi. Lo potrebbero se l'interazione e.m. potesse essere spenta…

Supponiamo che l'Hamiltoniano di interazione (quello cioe' dell'int. forte) sia invariante rispetto a queste "rotazioni": allora, la conseguenza e' che l'operatore di Casimir del gruppo (che, in analogia al gruppo delle rotazioni nello spazio ordinario, e' appunto $I(I+1)$) viene conservato, insieme a una delle componenti di $\boldsymbol{I}$ (di solito si sceglie I_3) ; inoltre, che gli stati appartengono alle rappresentazioni irriducibili del gruppo.
Riassumendo: siccome *SU(2)* e' isomorfo al gruppo delle rotazioni, ha le stesse rapp. irriducibili (*scalare/singoletto*, *spinore/doppietto*, *vettore/tripletto*, …). In generale, gli operatori infinitesimi sono identici alle matrici del momento angolare; nel caso della rappresentazione **2**, essi coincidono con le matrici con le quali il gruppo e' definito. Ricordando che i generatori sono rappresentati all'ordine *2* dalle matrici di Pauli (indicate in questo contesto con il simbolo τ), l'operatore di isospin per un doppietto e' quindi: $\boldsymbol{I} = \tau/2$.

Questa introduzione all'argomento, per quanto breve e incompleta, mostra pero' quale sia l'origine e il significato profondo dell'affermazione, altrimenti alquanto sconcertante, che l'interazione forte e' *invariante per rotazioni* nello spazio dell'isospin.

Isospin e carica elettrica

E' abbastanza naturale confrontare grandezze conservate e proprieta' generali dell'interazione elettromagnetica e di quella forte, *cosi' come compresa fino a questo punto*, per metterne in luce analogie e differenze.
E' utile ricordare, a questo scopo, che in QED si dimostra come la conservazione della carica elettrica sia una conseguenza di una proprieta' di invarianza, quella per trasformazioni di fase globali del campo dell'elettrone. L'insieme di queste trasformazioni e' un gruppo abeliano a 1 parametro, chiamato *U(1),* il quale in senso generale e' una versione 1-dimensionale del gruppo delle rotazioni.

Int. Elettromagnetica	*Int. Forte*
Grandezza conservata: *Carica elettrica*	Grandezza conservata: *Isospin*
Grandezza scalare (1 comp)	Grandezza vettoriale (3 comp)
Simmetria: trasformazioni di fase	Simmetria: rotazione interna
(≡ 'rotazioni' 1-dimensionali)	(≡ estensione della trasf. di fase)
Gruppo: *U(1)*	Gruppo: *SU(2)*
Abeliano	*Non abeliano*
Rapp.irr.: solo 1-dimensionali	Rapp.irr.: 1,2,3,4,…-dimensionali
Multipletti: singoletti	Multipletti: singoletti, doppietti, …
Valori di Q (in unita' di e) *non fissati*	Valori di I,I_3 *fissati*
(la quantizzazione della carica *non* e' spiegata in QED)	(i valori di I e I_3 sono fissati dalle proprieta' di *SU(2)*)
Sorgente di un campo	Non sorgente di un campo

In questo quadro, dunque, l'analogia fra carica elettrica ed isospin e' limitata: mentre entrambe le quantita' si possono identificare come grandezze conservate, l'isospin non sembra ricoprire fin qui alcun ruolo dinamico. In particolare, le proprieta' del numero quantico di isospin *non specificano* le caratteristiche del campo delle interazioni forti, tanto e' vero che sono stati proposti diversi modelli di interazione forte (scambio di pioni, scambio di mesoni vettoriali, etc) tutti costruiti in modo da rispettare la conservazione dell'isospin.
Come si vedra' in seguito, la natura duale della carica elettrica – grandezza conservata *e* sorgente di un campo di forza, puo' essere compresa come conseguenza di proprieta' di simmetria piu' generali di quella considerata fin qui. Essa puo' effettivamente essere estesa con successo anche alle quantita' conservate caratteristiche dell'interazione forte, le *cariche di colore*: il gruppo di simmetria coinvolto (analogo a *SU(2)*, anche se piu' complicato) e' chiamato *SU(3) di colore.*

4. Multipletti

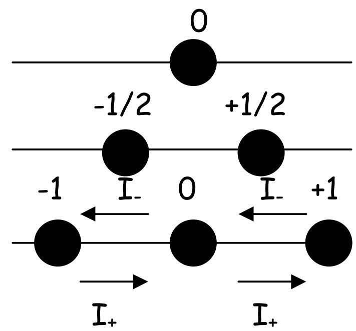
Possiamo dare una rappresentazione grafica dei multipletti che risultano dalla simmetria di isospin: visto che c'e' un solo operatore che commuta con l'operatore di Casimir, possiamo rappresentare ogni multipletto su una retta: ogni cerchio rappresenta un possibile valore di I_3. Gli operatori I_i, $i=1,2,3$ sono i generatori delle rotazioni nello spazio dell'isospin. Si possono costruire due operatori ausiliari:

$$I_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I_1 + iI_2\right)$$
$$I_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I_1 - iI_2\right)$$

il cui effetto sugli stati e' quello di far passare da un membro del multipletto ad un altro, incrementando o diminuendo di *1* il valore di I_3:

Rappresentazione	I
1	0
2	½
3	1

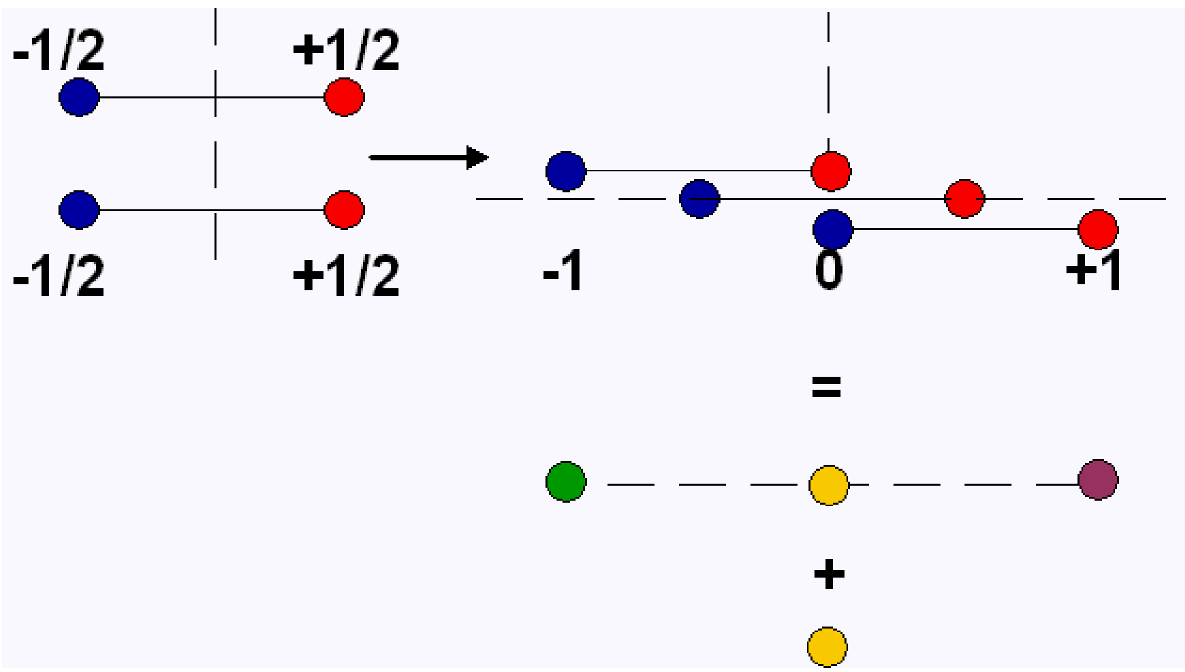
Schema del multipletto



etc. Poiche' gli elementi di un multipletto sono distinti dalla loro carica elettrica, possiamo scrivere per le rappresentazioni dispari: $Q = I_3$. Questa relazione deve essere modificata per le rappresentazioni pari, nelle quali I_3 assume valori semiinteri; considerando che ad essa appartiene il nucleone , che ha numero barionico *1*, possiamo scrivere la relazione piu' generale $Q = I_3 + B/2$. Questa e' la forma piu' semplice della relazione di Gell-Mann e Nishijina, e vale per tutti gli stati adronici (mesoni e barioni) non strani (e non charmati, etc).

5. Rappresentazioni prodotto in SU(2)

Nell'ipotesi che l'isospin sia una simmetria delle particelle a interazione forte, ogni stato fisico di un sistema di particelle a interazione forte deve appartenere ad una rappresentazione di SU(2): quindi, quando si ha a che fare con un sistema composto occorre combinare correttamente i multipletti di isospin dei diversi componenti. Questa operazione e' del tutto analoga alla somma dei momenti angolari, e segue in realta' le stesse regole matematiche, visto l'isomorfismo fra SU(2) e il gruppo delle rotazioni. Un modo assai semplice di combinare i multipletti e' quello che fa uso dei diagrammi dei pesi: graficamente, si sovrappone il diagramma del II multipletto ("moltiplicatore") centrandolo su ognuno dei siti del I multipletto ("moltiplicando"). Gli autovalori dell'operatore diagonale (I_3) si sommano linearmente in ogni sito, e il risultato e' un diagramma dei pesi del sistema composto, in cui ci sono i siti risultanti e la molteplicita' di ogni sito. L'esempio mostrato in figura mostra come si combinano i pesi di due doppietti di isospin: si riporta il centro di un multipletto in corrispondenza della posizione di ogni autovalore dell'altro. La combinazione ottenuta non e' una rappresentazione irriducibile di SU(2) (l'autovalore 0 compare con peso 2), e puo' essere scomposta in una somma di rappresentazioni irriducibili come indicato



In pratica, le regole di composizione degli isospin sono condensate nei coefficienti di Clebsch-Gordan, come per i momenti angolari.

6. Rappresentazione coniugata

Ad ogni rappresentazione irriducibile e' possibile associare una rappresentazione coniugata (o duale) nel seguente modo: consideriamo la rappresentazione definita dall'equazione

$$\psi' = D(\alpha)\psi$$

ψ e' un vettore e D e' una matrice della rappresentazione considerata, che si puo' come e' noto scrivere:

$$D(\alpha) = e^{i\alpha F}$$

con *F* hermitiana. Facendo il complesso coniugato dell'equazione si trova:

$$\psi'^* = D^* \psi^*$$
$$D^* = e^{-i\alpha(F)^*} \equiv e^{i\alpha\tilde{F}}$$

in cui $\tilde{F} = -F^*$ sono i generatori della rappresentazione coniugata *D**; quest'ultima e' effettivamente una rappresentazione perche' prendere il complesso coniugato degli elementi delle matrici non altera le proprieta' dei loro prodotti. Ora, si vede che gli autovalori nella rappresentazione coniugata hanno segno opposto a quelli nella rappresentazione originale: quindi, poiche' il diagramma dei pesi originale e' simmetrico rispetto all'origine, quello coniugato e' del tutto equivalente; si ritrovano cioe' gli stessi autovalori, solo rinominati. In conclusione, per SU(2) la rappresentazione coniugata e' equivalente all'originale (leggi: indistinguibile).

7. Stranezza

Per riassumere in breve una storia gia' detta, il puzzle rappresentato dalle strane proprieta' di una famiglia di particelle osservate prima nei raggi cosmici e poi copiosamente prodotte agli acceleratori di alta energia, viene risolto introducendo un nuovo numero quantico, la *stranezza* appunto, che vale *0* per tutti gli stati "normali", mentre e' *# 0* per le particelle strane: l'assegnazione del numero quantico di stranezza viene fatta in modo che la stranezza stessa sia conservata in tutti i processi forti (v. capitolo su risonanze).
Quest'ultima e' l'idea base per spiegare la fenomenologia delle particelle strane:

c'e' un nuovo grado di liberta', la stranezza, che e' conservata dalla interazione forte e da quella elettromagnetica, mentre puo' essere violata da quella debole

In questo modo si spiega il decadimento lento delle particelle strane (stranezza violata: $\Delta S \# 0 \rightarrow$ non interazione forte o e.m., solo debole, quindi processo lento), e anche la loro produzione associata (stranezza conservata: $\Delta S=0 \rightarrow$ processo forte OK *se sono prodotte 2 particelle strane con stranezza opposta*; ovviamente anche altre configurazioni sono possibili, purche' complessivamente $\Delta S=0$). Quindi il numero quantico di stranezza assomiglia un po' alla carica elettrica, con 2 differenze fondamentali:

- *la carica elettrica e' assolutamente conservata da tutte le interazioni; la stranezza non e' conservata dalla interazione debole*

- *la carica elettrica e' la sorgente del campo elettromagnetico; la stranezza non e' la sorgente di alcun campo fisico*

Poiche' le particelle strane interagiscono fortemente, sono portatrici anche del numero quantico di isospin, che viene assegnato esattamente con gli stessi criteri con cui viene assegnato alle particelle non strane.

Si noti che anche le particelle con charm e beauty si raggruppano naturalmente in multipletti di isospin: la cosa e' meno interessante a causa della grande differenza fra le loro masse e quelle delle particelle senza numeri quantici extra e strane, che rende implausibile la ricerca di simmetrie unitarie piu' elevate di SU(3), come si vedra' fra breve.

Le particelle strane a massa piu' bassa possono allora essere raggruppate nei seguenti multipletti di isospin e stranezza:

MESONI

I_3	S=+1	S=-1
+1/2	K^+	$\bar{K}^0$
-1/2	K^0	K^-

BARIONI

I_3	S	nome
0	-1	Λ^0
+1,0,-1	-1	$\Sigma^+,\Sigma^-,\Sigma^0$
+1/2,-1/2	-2	Ξ^0,Ξ^-
0	-3	Ω^-

ANTIBARIONI

I_3	S	nome
0	+1	$\bar{\Lambda}^0$
+1,0,-1	+1	$\bar{\Sigma}^+,\bar{\Sigma}^0,\bar{\Sigma}^-$
+1/2,-1/2	+2	$\bar{\Xi}^0,\bar{\Xi}^-$
0	+3	$\bar{\Omega}^-$

8. Supermultipletti

Viene spontaneo chiedersi se tutta la popolazione dei vari multipletti di isospin non possa essere raggruppata in famiglie piu' vaste. Storicamente, i primi tentativi di unificazione e semplificazione della complessa fenomenologia delle interazioni forti furono proprio nel senso di identificare dei "multipletti di multipletti": anche se questa strada non ha poi portato di per se' a una comprensione corretta e completa della dinamica dell'interazione forte, il risultato e' lo stesso interessante, e conduce direttamente all'idea di costituenti. Il pattern che si presenta e' riassunto nelle tabelle seguenti, nelle quali sono indicati i vari multipletti di ***(S,I)*** osservati, separati per spin/parita': questa separazione e' ragionevole, visto che ci aspettiamo che l'Hamiltoniano delle interazioni forti commuti con il momento angolare totale e con la parita'.

MESONI

$J^P=0^-$

I	S=+1	S=0	S=-1
0		$\eta, \eta^{'}$	
1/2	K		$\bar{K}$
1		π	

$J^P=1^-$

I	S=+1	S=0	S=-1
0		ω, φ	
1/2	K^*		$\bar{K}^*$
1		ρ	

$J^P=2^+$

I	S=+1	S=0	S=-1
0		f_0, f_1	
1/2	K^{**}		$\bar{K}^{**}$
1		a_2	

BARIONI

$J^P=1/2^+$

I	S=-2	S=-1	S=0
0		Λ^0, Λ^{0*}	
1/2	Ξ		N
1		Σ	

$J^P=3/2^+$

I	S=-3	S=-2	S=-1	S=0
0	Ω^-			
1/2		Ξ^*		
1			Σ^*	
3/2				Δ

E' evidente la presenza di regolarita' nei numeri quantici, anche se non e' evidente che ci sia un'unica regola con cui i multipletti si dispongono. Non stupisce quindi che per molto tempo si sia cercato uno schema unificatore per stranezza e isospin.

9. SU(3)

a) Si e' visto come il gruppo di simmetria dell'isospin sia *SU(2)*. Nella ricerca di un gruppo di simmetria piu' allargato, occorre trovare un gruppo con:

1) Due operatori di Casimir (*S* e I^2 sono contemporaneamente diagonali nel supermultipletto) → rango 2
2) Struttura a multipletti conforme ai dati sperimentali

b) Il gruppo *SU(3)* soddisfa a entrambe queste richieste. Le sue caratteristiche principali sono:

- *SU(3)*: gruppo delle matrici unitarie, unimodulari 3x3
  Esse agiscono su spinori complessi a 3 componenti, in completa analogia alle matrici di SU(2) sugli spinori a 2 componenti

- No. parametri : 8 (= no. generatori)
  Matrice complessa 3x3→2x9=18 parametri; 9 condizioni di unitarieta'; 1 condizione di unimodularita'→8 parametri liberi

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Operatori infinitesimi: 8 matrici di Gell-Mann, (v. sopra), analoghe alle matrici di Pauli per *SU(2)*

- 2 generatori che commutano, λ_3 e λ_8 → rango = 2 → 2 operatori di Casimir (Cfr. *SU(2)*, 1 solo operatore di C.); se ridefinisco $F_i = \frac{\lambda_i}{2}$ trovo le relazioni di commutazione $\left[F_i, F_j\right] = i f_{ijk} F_k$, essendo f_{ijk} le costanti di struttura date da:

$$f_{123} = 1$$
$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$$
$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$$

Tutte le altre *f* sono zero. Le *f* sono antisimmetriche nello scambio di 2 indici.

- Gli operatori I_3 ed *Y* si identificano con:

$$I_3 = F_3$$
$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

- Gli stati di un supermultipletto sono etichettati dai valori di I_3 *e Y* (cfr. SU(2), solo dai valori di I_3), quindi gli autovalori si dispongono in un piano

10. Rappresentazioni irriducibili di SU(3)

Come si sara' intuito, cosi' come *SU(2)* e' un gruppo unitario equivalente al gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni, *SU(3)* e' anch'esso un gruppo unitario (*non* equivalente al gruppo delle rotazioni in 8 dimensioni !). Le sue caratteristiche essenziali sono riassunte di seguito:

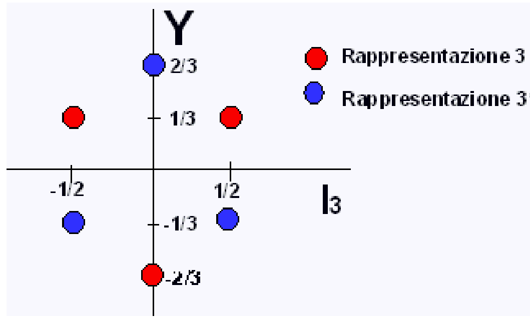
Rappresentazione fondamentale: dim. minima > 1 matrici 3x3
Rappresentazione aggiunta: dim. = numero parametri matrici 8x8

Autostati della rappresentazione fondamentale: 3 vettori unitari (cfr. SU(2), 2 vettori unitari), con autovalori:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = \frac{1}{2};\\ Y = \frac{1}{3}\end{cases} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = -\frac{1}{2};\\ Y = \frac{1}{3}\end{cases} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} I_3 = 0\\ Y = -\frac{2}{3}\end{cases}$$

Si noti che ogni autostato e' etichettato da 2 numeri quantici, per altro con ipercarica frazionaria

Nel caso di SU(3) la rappresentazione fondamentale e la sua coniugata non sono equivalenti: questo avviene perche' gli autovalori dell'ipercarica non sono simmetrici rispetto allo zero. La rappresentazione fondamentale e' un tripletto; possiamo riportare graficamente le 2 rappresentazioni fondamentali:



Gli operatori I_+ e I_- di *SU(2)* vengono sostituiti da 3 coppie di operatori di shift:

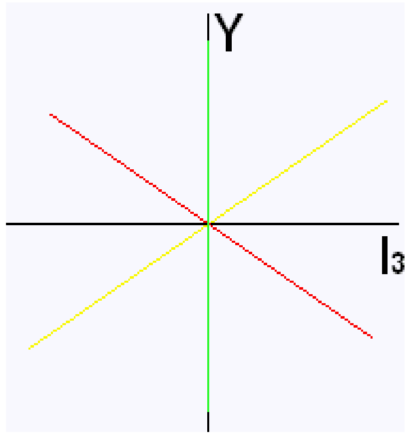
$$I_\pm = F_1 \pm iF_2$$
$$V_\pm = F_4 \pm iF_5$$
$$U_\pm = F_6 \pm iF_7$$

che inducono le seguenti trasformazioni all'interno di ogni multipletto:

$$I_\pm \rightarrow \Delta Y = 0, \Delta I_3 = \pm 1$$
$$U_\pm \rightarrow \Delta Y = \pm 1, \Delta I_3 = \mp 1/2$$
$$V_\pm \rightarrow \Delta Y = \pm 1, \Delta I_3 = \pm 1/2$$

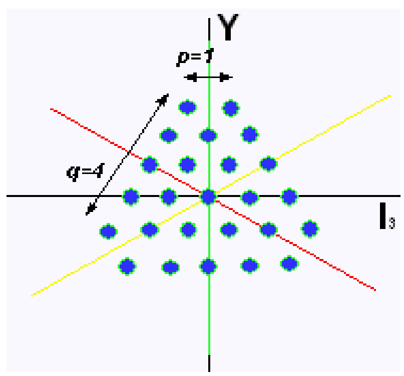
Diversamente da cio' che accede in *SU(2)*, nelle cui rappresentazioni irriducibili ogni stato si presenta con peso unitario (leggi: una sola volta), nelle rappresentazioni irriducibili di *SU(3)* il peso di certi stati, definiti da (I_3, Y), puo' essere maggiore di 1. Questa extra-degenerazione indica la presenza di un altro numero quantico, che deve commutare con I_3 e Y: esso e' il quadrato dell'isospin, che puo' essere usato per distinguere gli stati degeneri all'interno di un multipletto. Le proprieta' principali delle rappresentazioni di SU(3), non difficili da dimostrare, si possono elencare come segue:

a) i multipletti posseggono simmetria esagonale, essendo del tutto simmetrici rispetto ai 3 assi a 120^0 indicati (uno dei quali coincide con Y):



b) i multipletti sono completamente specificati dai due numeri interi *p* e *q*
p = numero spazi in un lato esterno del diagramma dei pesi
q = numero spazi nel lato successivo del diagramma dei pesi

La figura mostra il multipletto (1,4)

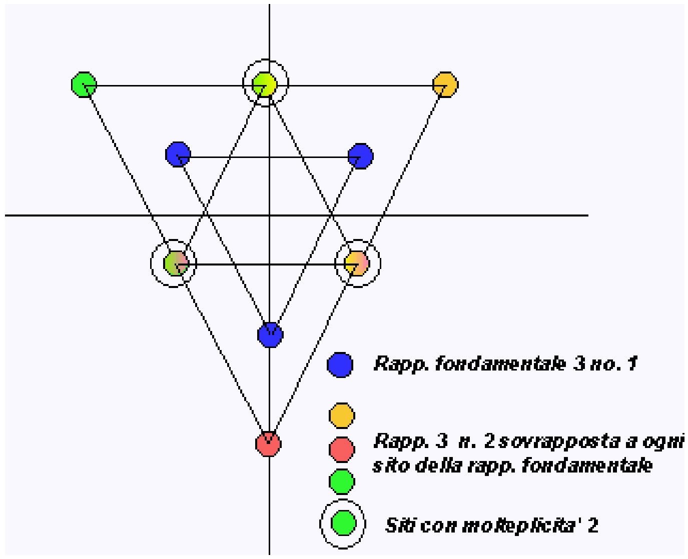


c) La molteplicita' (leggi: peso) di ogni sito aumenta di 1 ad ogni "strato", fino a che il perimetro diventa un triangolo, quindi rimane costante
d) La dimensionalita' (leggi: numero di sottostati) di un multipletto e' data da:

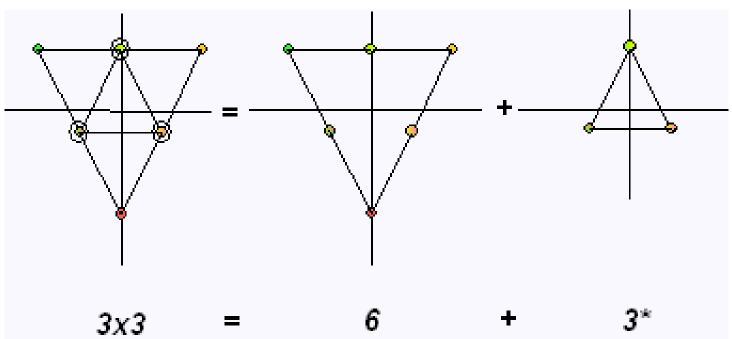
$$n = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$$

11. Rappresentazioni prodotto in SU(3)

Considerata l'additivita' dei 2 numeri quantici I_3 *e* Y, si puo' procedere come per SU(2) nel costruire tutte le rappresentazioni a partire dalla fondamentale: p.es., per costruire il prodotto ***3⊗3*** si procede come indicato in figura:



Il multipletto prodotto non e' una rappresentazione irriducibile di SU(3: esso puo' essere scomposto in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili, come illustrato per l'esempio di seguito:



Come si vede, nella scomposizione in somma diretta compare la nuova rappresentazione ***6*** e la rapp. fondamentale coniugata ***3****. Similmente, si puo' vedere che

$$
\begin{aligned}
&3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^{*} \\
&6 \otimes 3 = 8 \oplus 10 \\
&3 \otimes 3^{*} = 1 \oplus 8 \\
&3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10
\end{aligned}
$$

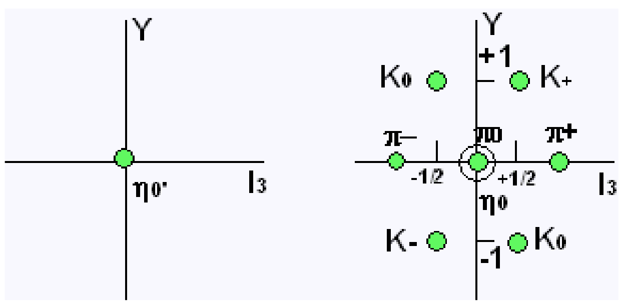
etc etc.

12. Adroni e supermultipletti

L'interesse originario di *SU(3)* per la fisica delle particelle sta nel fatto che le sue rappresentazioni irriducibili si adattano bene a descrivere il pattern di supermultipletti adronici osservati sperimentalmente. Quando si dice che si rappresentano bene, occorre precisare che l'accordo e' molto buono per cio' che riguarda i numeri quantici: all'interno di ogni supermultipletto, le differenze di massa sono molto grandi, e di fatto non sono compatibili con un'interazione forte indipendente dall'ipercarica, molto meno di quanto all'interno di un multipletto di isospin le differenze di massa siano spiegabili con effetti elettromagnetici.

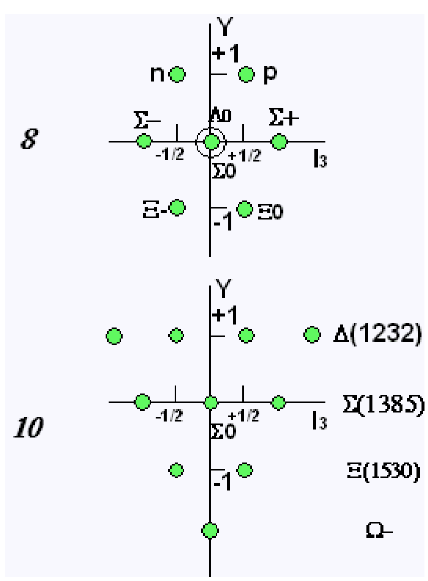
a) Mesoni

Si ricordera' come i mesoni si possano classificare in famiglie di data spin-parita': di ogni famiglia fanno parte 9 stati individuali, raggruppati in, 2 singolett1, 2 doppietti e 1 tripletto di isospin. Gli stati di ogni famiglia quindi si rappresentano nel piano *(I_3,Y)* esattamente come i multipletti delle due rappresentazioni ***1*** e ***8*** di SU(3) visti prima:



b) Barioni

I barioni a spin ½ si rappresentano bene nel multipletto ***8***, quelli a spin 3/2 nel multipletto ***10***, come mostrato in figura:



La cosa piu' interessante e' la concordanza dei numeri quantici, e l'assenza di stati con numeri quantici fuori dallo schema di SU(3) (assenza di *stati esotici*). Questa e' stata la motivazione principale del grande interesse che inizialmente si e' avuto per questa simmetria, chiamata allora, con termine preso a prestito dalla meditazione buddista, la *via ottuplice (eightfold way)*.

Un po' come nel caso dei primi modelli delle struttura atomica, che cercavano di interpretare le regolarita' sistematiche della tavola periodica di Mendeleev in termini di costituenti, la simmetria unitaria non e' tanto importante perche' rifletta un aspetto fondamentale della realta' fisica (la simmetria – approssimata – di isospin o di SU(3) e' oggi considerata un fenomeno accidentale, dovuto al piccolo valore della massa dei quark leggeri rispetto alla scala di energia delle interazioni di colore), quanto perche' per la prima volta ha introdotto in forma quantitativamente comprensibile l'idea di costituenti degli adroni.

13. SU(3) come simmetria rotta: formule di massa

Malgrado i suoi limiti, il modello a simmetria unitaria ha fornito una serie di previsioni e spiegazioni davvero notevole: esse riguardano in particolare le masse degli adroni leggeri. Questi risultati si ottengono facendo delle ipotesi sul meccanismo di rottura della simmetria SU(3); che essa debba rompersi e' piuttosto evidente dal fatto che le masse degli adroni di un supermultipletto non sono uguali: si riportano di seguito i casi dell'ottetto dei mesoni pseudoscalari e di quello dei barioni a spin ½, nonche' del decupletto a spin 3/2:

Mesoni

$J^P=0^-$

I	S=-1	S=0	S=+1
0		$\eta(547),\eta'(958)$	
1/2	$\bar{K}(496)$		$K(496)$
1		$\pi(137)$	

$J^P=1^-$

I	S=-1	S=0	S=+1
0		$\omega(782),\varphi(1020)$	
1/2	$\bar{K}^*(892)$		$K^*(892)$
1		$\rho(770)$	

$J^P=2^+$

I	S=-1	S=0	S=+1
0		$f_2(1270), f_2^{'}(1525)$	
1/2	$\bar{K}^{**}(1430)$		$K^{**}(1430)$
1		$a_2(1320)$	

BARIONI

$J^P=1/2^+$

I	S=-2	S=-1	S=0
0		$\Lambda^0(1116), \Lambda^{0*}(1405)$	
1/2	$\Xi(1317)$		$N(938)$
1		$\Sigma(1192)$	

$J^P=3/2^+$

I	S=-3	S=-2	S=-1	S=0
0	$\Omega^-(1672)$			
1/2		$\Xi^*(1530)$		
1			$\Sigma^*(1385)$	
3/2				$\Delta(1232)$

Come si vede, le differenze di massa sono molto grandi, e questa e' stata una delle ragioni principali che hanno impedito per lungo tempo il riconoscimento, nel pattern complicato delle masse, della simmetria sottostante. Una spiegazione *fenomenologica* (ossia, non derivante da una teoria completa e consistente, ma piuttosto formulata in accordo con qualche modello, piu' o meno ad hoc) puo' essere trovata se si assume che l'hamiltoniano dell'adrone (il cui valore medio nello stato fondamentale dell'adrone deve riprodurre la sua massa) non si trasformi come un invariante di SU(3), ma in modo un po' piu' complicato. All'epoca quest'idea venne concretizzata immaginando che ci fossero due tipi di interazione forte, una *molto forte* e una *medio-forte*: in questo modo l'hamiltoniano totale veniva scritto come:

$$H_S = H_{VS} + H_{MS}$$

Le proprieta' di trasformazione dei due termini rispetto alle trasformazioni di SU(3) sono per ipotesi diverse:

H_{VS} e' invariante

H_{MS} non e' invariante

Il primo termine dara' un contributo identico a tutti i membri di un multipletto, mentre il secondo dara' un contributo diverso ai vari membri. In termini piu' specifici, la cosa si puo' vedere nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
&\langle a|H|a\rangle \to \underbrace{\langle a|U^{-1}}_{\substack{\text{stato } SU(3)\\ \text{trasformato}}} H \underbrace{U|a\rangle}_{\substack{\text{stato } SU(3)\\ \text{trasformato}}}\\
&\to \langle a|U^{-1}\left(H_{VS}+H_{MS}\right)U|a\rangle = \langle a|U^{-1}H_{VS}U|a\rangle + \langle a|U^{-1}H_{MS}U|a\rangle\\
&H_{VS}\ \ \text{invariante} \to U^{-1}H_{VS}U = H_{VS}\\
&H_{MS}\ \ \text{non invariante}\ \to\ U^{-1}H_{MS}U \neq H_{MS}\\
&\to \langle a|H|a\rangle = \langle a|U^{-1}H_{VS}U|a\rangle + \langle a|U^{-1}H_{MS}U|a\rangle = \langle a|H_{VS}|a\rangle + \langle a|U^{-1}H_{MS}U|a\rangle
\end{aligned}
$$

Qual e' la proprieta' di trasformazione rispetto a *SU(3)* che puo' assumere H_{MS}? Abbiamo un paio di vincoli: H_{MS} non deve commutare con *U*, trasformazione unitaria di *SU(3)*, quindi non deve commutare con tutti i generatori del gruppo; tuttavia, i membri dei multipletti hanno valori definiti di I_3 e *S*, quindi H_{MS} deve commutare con i generatori corrispondenti a questi operatori: come sappiamo, l'identificazione e':

$$
\begin{aligned}
I_3 &= F_3\\
Y &= \frac{2}{\sqrt{3}}F_8
\end{aligned}
$$

quindi la possibilita' piu' semplice e' che $H_{MS} \propto F_8 \propto Y$; si noti che introdurre una dipendenza da I_3 sarebbe contradditorio, visto che si verifica una ottima uniformita' delle masse all'interno dei multipletti di isospin, rotta solo da effetti elettromagnetici. Okubo e Gell-Mann dimostrarono che in una rappresentazione qualsiasi di SU(3) si ha:

$$\langle a|H_{MS}|a\rangle \propto \langle a|F_8|a\rangle \propto A + BY + C\left[Y^2/4 - I\left(I+1\right)\right]$$

dove *A*,*B* e *C* sono coefficienti che dipendono dalla rappresentazione considerata. Ci aspettiamo dunque, se il modello ha qualcosa a che fare con la realta':

$$m\left(Y,I\right) = m_0 + bY + c\left[Y^2/4 - I\left(I+1\right)\right]$$

per la massa dei membri di un supermultipletto.
Questa formula fu usata da Gell-Mann per predire la massa del membro mancante (nel 1962) del decupletto dei barioni, la particella con *S=-3* chiamata Ω^-; in effetti, per il decupletto deve essere:

$$\Delta m_{ij} = m_i - m_j = b\left(\Delta Y\right)_{ij} + c\left[\left(Y_i^2 - Y_j^2\right)/4 - \left(I_i\left(I_i+1\right) - I_j\left(I_j+1\right)\right)\right]$$

Se ora si prendono le masse dei 3 stati allora conosciuti $\Delta^{++}(1232)$, $\Sigma^{+}(1385)$,$\Xi^{*}(1530)$ si hanno le 2 differenze

$$m_\Sigma - m_\Delta \approx m_\Xi - m_\Sigma \approx 150 \ \text{MeV}$$

che fissano *b* e *c*. Questi ultimi furono usati da Gell-Mann per predire la massa della particella mancante, prevista a 1672 Mev e trovata, l'anno dopo, a 1675 MeV! Nello stesso modo, si trovano altre relazioni di massa, come questa per l'ottetto di barioni:

$$\frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}m_{\Xi^0} = \frac{1}{4}m_{\Sigma^0} + \frac{3}{4}m_{\Lambda^0}$$

corretta a circa 1%. La situazione risulta invece meno brillante nel caso dei mesoni, con discrepanze fino al 10-12 %.
La simmetria di SU(3) sommariamente descritta di sopra viene spesso chiamata *simmetria di flavor*, e indicata per questo motivo con $SU(3)_f$, per distinguerla da un'altra simmetria SU(3), legata ad un altro e piu' importante grado di liberta' dei quark, chiamato *colore*.

L'origine delle simmetrie di flavor, ieri e oggi

Il *flavor* e', nella visione odierna, nient'altro che un'etichetta indicante il *tipo* di quark, che gioca un ruolo importante nel modello standard in quanto cambia nella maggior parte dei processi deboli: come tale, non segue, a livello fondamentale, la simmetria $SU(3)_f$ sopra descritta, ma un'altra totalmente diversa. Cosa resta in comune fra queste due descrizioni?
Il flavor deve in realta' essere considerato uno speciale grado di liberta' presente al livello di sottostruttura degli adroni (leggi: a livello di quark), e propagato a livello di adroni, che dai quark sono costituiti: quindi, un adrone strano lo e' perche' contiene almeno un quark *s*, e cosi' via. Questo punto resta certamente valido in entrambe le descrizioni.
L'ipotesi di simmetria unitaria esatta (estensione della simmetria di isospin, prototipo di tutte le simmetrie di flavor) prevede che tutti gli adroni di un supermultipletto abbiano la stessa massa (degenerazione completa): ovviamente, questo non puo' essere vero, perche' sappiamo che fra gli adroni che costituiscono un multipletto unitario ci sono forti differenze di massa. Come abbiamo visto, l'origine di queste differenze venne all'inizio attribuita a componenti dell'interazione forte (si pensi per concretezza a diversi termini dell'hamiltoniano forte) con diverse proprieta' di trasformazione rispetto a SU(3), e quindi

in grado di rompere la simmetria: p.es., un termine che si trasforma come un ottetto mescola gli stati dell'ottetto, etc. Oggi pensiamo che non sia questo il meccanismo di rottura della simmetria di flavor, che viene rotta per il semplice fatto che le masse dei quark non sono uguali. Quest' ultima idea si e' potuta sviluppare dopo il chiarimento portato, nell'ambito del modello unificato delle interazioni elettrodeboli, dalla (creduta) comprensione del meccanismo di rottura spontanea di simmetria elettrodebole e dell'origine della massa (che non ha, per quel che si pensa oggi, origine dall'interazione forte: ma tutto questo soggetto e' tuttora, di fatto, non privo di controversie).
Inoltre, oggi pensiamo che non ci sia un campo fisico generato dal flavor, cosi' come ci sono quelli legati alle cariche elettriche e deboli e alla carica di colore: la simmetria di flavor non e' dunque una simmetria di *gauge*, come quella elettrodebole o quella di colore, ma solo *accidentale*, dovuta cioe' alla relativa piccolezza delle masse dei primi 3 quark *u,d,s* rispetto alla scala di energia delle interazioni forti, che e' dell'ordine delle centinaia di MeV. Quindi, la classificazione degli adroni in multipletti di isospin, di SU(3) etc, e' oggi interpretata come un fatto del tutto fortuito; le leggi di conservazione dell'isospin, della stranezza, del charm etc, verificate esattamente dalle interazioni forti, e variamente violate da quelle deboli ed elettromagnetiche, sono d'altra parte interpretate come derivanti da una legge semplice e generale di conservazione del tipo di quark nelle interazioni di colore. In altre parole , *l'interazione di colore fra due quark e' insensibile al loro flavor*, *e non lo cambia*. Nondimeno, le simmetrie di flavor, come isospin e SU(3), anche se accidentali, restano abbastanza ben verificate, e non sono quindi meno utili, *anche se solo fenomenologicamente*, che se avessero un'origine fondamentale.