

Invarianza, conservazione, simmetrie

1. Invarianza e conservazione in fisica classica

Come e' noto, l'uso del formalismo lagrangiano, eventualmente allargato alla descrizione di sistemi continui, come il campo elettromagnetico, permette di mettere in luce nella maniera piu' diretta il legame fra proprieta' di invarianza e leggi di conservazione. Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{equazioni di Lagrange}$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \rightarrow p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{cost}$$

Il significato e' trasparente: se la lagrangiana non dipende da una delle coordinate, il corrispondente momento coniugato e' una costante del moto. L'indipendenza di L dalla coordinata e' equivalente all'invarianza di L per trasformazioni che cambiano quella coordinata: questo e' dunque il legame fra invarianza e conservazione. Si puo' quindi stabilire una corrispondenza diretta fra le simmetrie del sistema fisico considerato, descritte matematicamente da proprieta' di invarianza della lagrangiana, e leggi di conservazione:

Simmetria	Invarianza	Conservazione
Indipendenza da origine riferimento	Traslazione spaziale	Quantita' di moto totale
Indipendenza da origine dei tempi	Traslazione temporale	Energia totale
Indipendenza da orientazione riferim.	Rotazione spaziale	Momento angolare totale
Indipendenza da velocita' riferim.	Trasf. di Lorentz	Velocita' del CM

Va sottolineato che le quantita' conservate *non* sono invarianti di Lorentz: quindi il loro valore cambia nel passare da un riferimento inerziale a un altro. Tuttavia, in un dato riferimento, il loro valore e' costante per un sistema isolato.

Si noti che, mentre il significato delle leggi di conservazione e' immediato per un sistema di punti materiali che interagiscono tramite un potenziale conservativo, le cose sono piu' complicate quando si considerano sistemi piu' generali, come p.es. un sistema di cariche che interagiscono attraverso il

campo elettromagnetico: quest'ultimo è un sistema fisico autonomo, che possiede energia, quantità di moto, momento angolare, ed è la somma totale di queste quantità (per cariche e campo) che viene conservata.

Nell'ambito della teoria classica dei campi, il legame fra invarianza e conservazione è stabilito, come è noto, dal teorema di Noether (v. corsi di teoria dei campi).

NB Si può osservare come in meccanica quantistica si preferisca utilizzare il formalismo hamiltoniano (e questo è il quadro generale nel quale si inseriscono le osservazioni che seguono), mentre in teoria dei campi si utilizza di preferenza il formalismo lagrangiano: la ragione è che la lagrangiana viene definita come un invariante di Lorentz, mentre l'hamiltoniano (che è un'energia) è la componente tempo di un 4-vettore, quindi non invariante.

2. Invarianza e conservazione in meccanica quantistica e teoria dei campi

Consideriamo il valore di aspettazione di un operatore Q :

$$\langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle \rightarrow \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| Q | \psi \right\rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | Q \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle$$

Usando l'eq. di Schrodinger:

$$i \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = H | \psi \rangle, \quad -i \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| = \langle \psi | H^\dagger$$

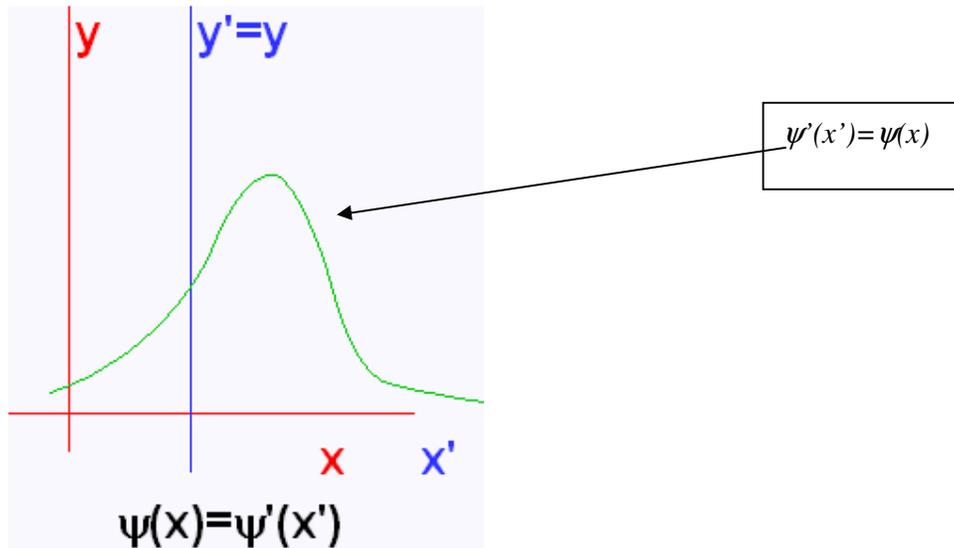
si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \middle| Q | \psi \right\rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle + \langle \psi | Q \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \\ &= i \langle \psi | H^\dagger Q | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial Q}{\partial t} | \psi \rangle - i Q H | \psi \rangle \\ H^\dagger = H &\rightarrow \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = i \langle \psi | \left[[H, Q] + \frac{\partial Q}{\partial t} \right] | \psi \rangle \end{aligned}$$

Quindi, se $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$, allora $[H, Q] = 0 \rightarrow \langle Q \rangle = \text{costante}$. Questo significa che $\langle Q \rangle$ è conservata se Q commuta con H : questa è dunque l'origine delle leggi di conservazione in meccanica quantistica. L'idea si estende anche al caso di un sistema di campi quantistici.

Occorre ora stabilire la connessione fra relazioni di commutazione e proprietà di invarianza dell'hamiltoniano (leggi: proprietà di simmetria del sistema). Come è noto, a ogni trasformazione del riferimento inerziale

(traslazione, rotazione, trasformazione di Lorentz, inversione degli assi o del tempo) corrisponde una trasformazione del vettore di stato (leggi: funzione d'onda) del sistema. Questo si può vedere nel modo più semplice considerando p.es. una traslazione lungo l'asse x :



Come si vede, le due funzioni d'onda $\psi(x), \psi'(x')$ rappresentano lo stesso stato, in due diversi riferimenti:

$$\psi'(x') = \psi(x) \quad \text{1 stato, 2 descrizioni (in 2 riferimenti diversi)}$$

La trasformazione degli stati e delle osservabili deve venire effettuata da un operatore unitario, per conservare la norma nella trasformazione: la situazione è a tutti gli effetti equivalente ad un cambiamento di base nello spazio degli stati, che deve conservare la norma degli stati e il valor medio delle osservabili

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \rightarrow U \text{ unitario: } U^\dagger = U^{-1}$$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle \text{ definizione del trasformato di } A$$

$$\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|U^\dagger A' U|\psi\rangle \rightarrow A' = U^\dagger A U$$

Se A è invariante rispetto alla trasformazione, allora A commuta con U :

$$A = A'$$

$$\rightarrow U^\dagger A U = A$$

$$\rightarrow [U, A] = 0$$

In particolare, si può scegliere $A=H$: se U è un operatore di simmetria, esso commuta con l'hamiltoniano H ed è una costante del moto:

$$[U, H] = 0 \rightarrow \langle U \rangle = \text{costante}$$

Tuttavia, non c'è normalmente una osservabile associata ad U , che non è in generale hermitiano.

3. Trasformazioni continue, generatori

In molti casi, l'operatore di simmetria U dipende in modo continuo da uno o più parametri. Assumendo che, nel caso di un solo parametro α , il valore $\alpha = 0$ corrisponda all'operatore identità, possiamo scrivere una specie di sviluppo in serie di Taylor per l'operatore U :

$$U(\delta\alpha) \cong 1 + i\delta\alpha G$$

Questo è un modo astratto di descrivere la situazione, che prescinde da come poi vogliamo rappresentare l'operatore U (p.es., per mezzo di una matrice). G è il *generatore* della trasformazione descritta da U :

$$G = -i \left. \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

L'inserimento di i nella definizione è fatto per convenienza. L'operatore per una trasformazione finita si può trovare come segue:

In generale

$$U(b) * U(a) = U(a+b) \quad \text{proprietà di gruppo}$$

Se $b = d\alpha$:

$$U(\delta\alpha)U(\alpha) = U(\alpha + \delta\alpha) \cong (1 + i\delta\alpha G)U(\alpha)$$

$$U(\alpha + \delta\alpha) - U(\alpha) \cong i\delta\alpha G U(\alpha)$$

$$\rightarrow \frac{dU}{d\alpha} = iG U(\alpha) \rightarrow U(\alpha) = e^{iG\alpha}$$

In parole, il generatore dell'operazione infinitesima è necessario e sufficiente a definire l'azione dell'operatore finito.

L'operatore U , nei casi che ci interessano, esegue trasformazioni di simmetria; allora deve essere unitario, e quindi:

$$\begin{aligned}
UU^\dagger &= 1 \\
\left. \begin{aligned} U &= 1 + i\delta\alpha G \\ U^\dagger &= 1 - i\delta\alpha G^\dagger \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 - i\delta\alpha(G^\dagger - G) = 1 \\
&\rightarrow G = G^\dagger \rightarrow G \text{ e' hermitiano}
\end{aligned}$$

Se U commuta con H , anche G , che e' un'osservabile, commuta ed e' conservato. Si noti che non sempre U dipende in modo continuo da parametri: fra le operazioni di simmetria ci sono anche operazioni discrete, che corrispondono pero' ad operatori unitari ed hermitiani (v. dopo)

Questo risultato completa il quadro di riferimento dei rapporti fra simmetrie, invarianza e conservazione in meccanica quantistica:

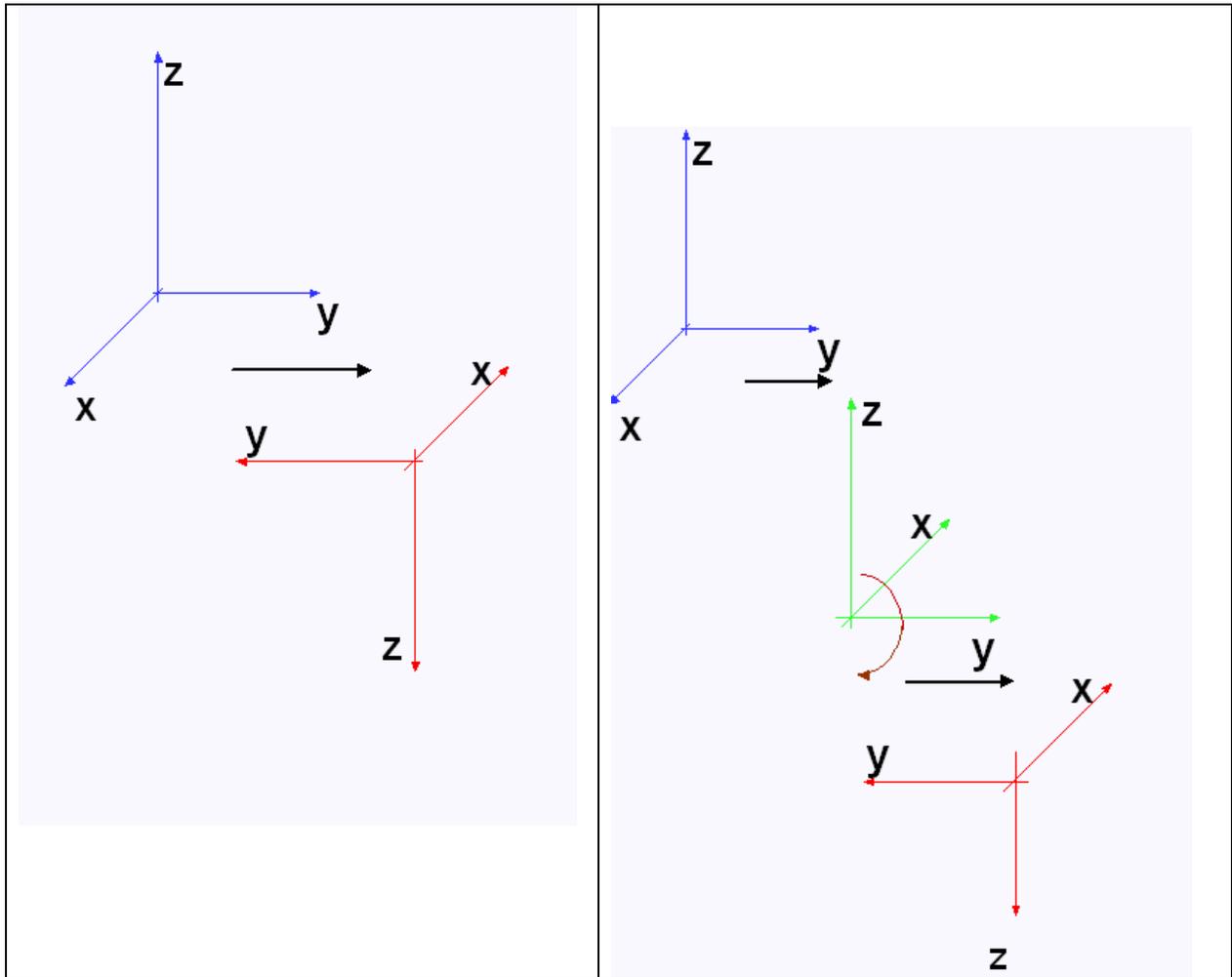
le simmetrie del sistema fisico corrispondono ad invarianza dell'hamiltoniano rispetto a trasformazioni unitarie nello spazio degli stati; l'invarianza e' equivalente alla commutativita' di hamiltoniano ed operatore unitario; se l'operatore dipende in maniera continua da parametri, il generatore della trasformazione e' hermitiano e, commutando con l'hamiltoniano, corrisponde ad un'osservabile conservata

4. Simmetrie discrete: parita'

Si e' visto come, nel caso delle trasformazioni continue del sistema di riferimento, come traslazioni e rotazioni, le proprieta' di invarianza dell'hamiltoniano siano in relazione alle proprieta' di simmetria del sistema fisico: queste proprieta' di simmetria sono equivalenti ai corrispondenti "principi di relativita'", come p.es. "non esiste una terna di assi con posizione assoluta", oppure "non esiste una terna di assi con orientazione assoluta", e cosi' via. Le trasformazioni continue non esauriscono tuttavia le simmetrie possibili.

a. Inversione degli assi in fisica classica

Nello spazio 3-dimensionale esistono, come e' noto, 2 possibilita' di scelta per definire una terna di assi cartesiani, potendosi scegliere una terna destrorsa o sinistrorsa. Una terna sinistrorsa si ottiene da una destrorsa (e viceversa) tramite l'inversione del verso positivo di tutti e 3 gli assi; equivalentemente, si puo' invertire il verso positivo di uno solo degli assi, ed eseguire una rotazione di π attorno all'asse scelto, come indicato nella figura.



I due tipi di terna *non* sono sovrapponibili mediante rotazioni, fatto che sta p.es. alla base dell'esistenza di due tipi di guanti o di scarpe, destro e sinistro; e' interessante osservare che, invece, le coppie di assi nello spazio 2-dimensionale (o a dimensione *pari* in genere) lo sono.

Questa doppia possibilita' di scelta porta a ritenere che debba valere un "principio di relativita' " anche per la scelta della chiralita' della terna cartesiana: *non esiste una terna di assi con chiralita' assoluta*. Se questo principio valesse in ogni caso, dovrebbe essere indifferente, per descrivere il moto di un qualsiasi sistema , scegliere una terna destrorsa o una sinistrorsa. Di conseguenza, le equazioni del moto dovrebbero essere invarianti rispetto a riflessione degli assi.

Formalmente, possiamo ricondurre l'invarianza del moto di un sistema fisico rispetto a inversione degli assi all'analoga proprieta' della lagrangiana o dell'hamiltoniana: se L o H sono invarianti per parita', cosi' e'

anche il moto del sistema. Infatti, limitandosi a considerare il caso del formalismo hamiltoniano, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

Per semplicità, consideriamo solo il caso in cui q e p sono le componenti cartesiane dei vettori posizione e impulso (ma il risultato vale in generale). Le equazioni sono invarianti in forma se le quantità trasformate soddisfano equazioni identiche:

$$\begin{cases} \dot{q}'_i = \frac{\partial H(q', p')}{\partial p'_i} \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial q'_i} \end{cases}$$

Allora:

$$\begin{cases} q'_i = -q_i \\ p'_i = -p_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}'_i = \frac{\partial H(q', p')}{\partial p'_i} = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial p_i} = -\dot{q}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}'_i = -\frac{\partial H(q', p')}{\partial q'_i} = \frac{\partial H(q', p')}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H(q', p')}{\partial p'_i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H(q', p')}{\partial q'_i} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(q', p') = H(q, p) \rightarrow H(-q, -p) = H(q, p)$$

Un risultato analogo si troverebbe con il formalismo lagrangiano

Possiamo allora definire in astratto, come nuova operazione di simmetria, l'operazione di inversione degli assi:

$$P: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

dalla quale possiamo dedurre immediatamente le proprietà di trasformazione di diverse grandezze fisiche classiche rispetto all'inversione:

$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$	posizione
$t \rightarrow t$	tempo
$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$	3-impulso
$E \rightarrow E$	energia
$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$	mom.angolare

E' notevole in particolare l'*invarianza* del momento angolare, che discende dalla definizione $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Le equazioni della meccanica e dell'elettrodinamica classica sono invarianti per parità, tuttavia a questa invarianza non corrisponde una legge di conservazione (v.sotto).

b. Parità in meccanica quantistica

Come nel caso delle trasformazioni continue, possiamo associare a P un operatore unitario U_P , che agisce nello spazio degli stati. Tuttavia, in questo caso, la simmetria di cui U_P e' una rappresentazione non e' una simmetria continuo, e non possiede generatori; l'insieme delle operazioni di simmetria e' formato da due soli elementi, P e E (operatore identita'), con la tabella di moltiplicazione

	E	P
E	E	P
P	P	E

In fisica classica, il fatto che l'operazione riflessione spaziale sia *intrinsecamente separata* dall'operazione identita' (a differenza di quel che avviene per traslazioni e rotazioni, operazioni che possono essere fatte evolvere in modo continuo dall'operazione identita') esclude la possibilita' di associare leggi di conservazione alla simmetria. In meccanica quantistica le cose vanno diversamente, come si vede subito.

a) Relazioni di commutazione di U_P e alcuni operatori fondamentali:

1. Operatore posizione

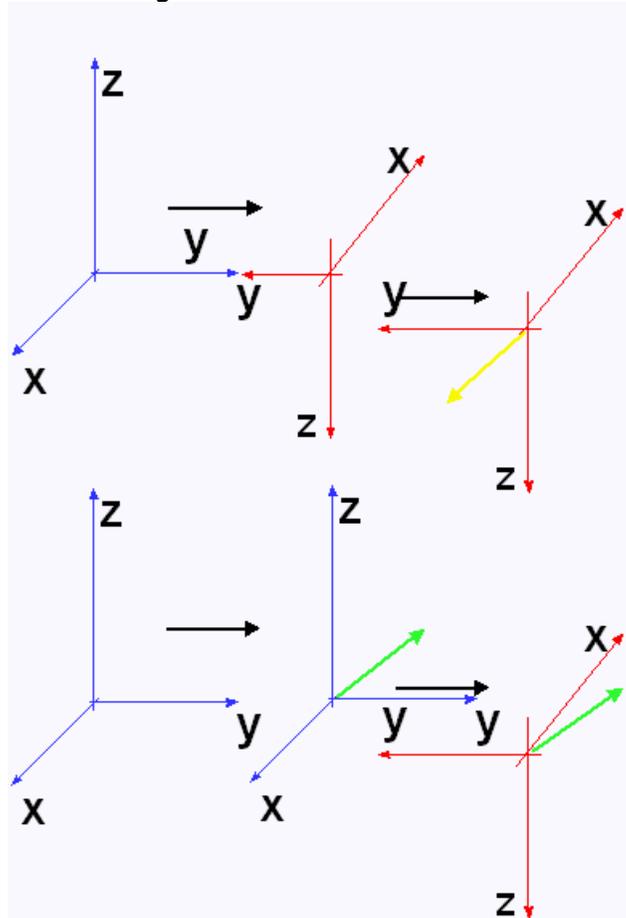
$$U_P \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{r}} U_P \rightarrow U_P \hat{\mathbf{r}} U_P^{-1} = -\hat{\mathbf{r}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
 U_p \hat{\mathbf{r}} |\psi\rangle &= U_p \hat{\mathbf{r}} \sum |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle = U_p \sum \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle = \sum U_p \mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi\rangle \\
 &= \sum (-\mathbf{r}) |-\mathbf{r}\rangle \langle -\mathbf{r} | \psi\rangle = (-\hat{\mathbf{r}}) U_p |\psi\rangle = -\hat{\mathbf{r}} U_p |\psi\rangle
 \end{aligned}$$

2. Operatore impulso

Per ciò che riguarda l'operatore impulso, si osservi che le operazioni traslazione e inversione degli assi sono anticommutative:



La cosa si esprime nello spazio degli stati con l'uso dell'operatore di traslazione (infinitesima, e sufficiente per ogni altro caso):

$$U_p U_T(-\delta\mathbf{r}) = U_T(\delta\mathbf{r}) U_p$$

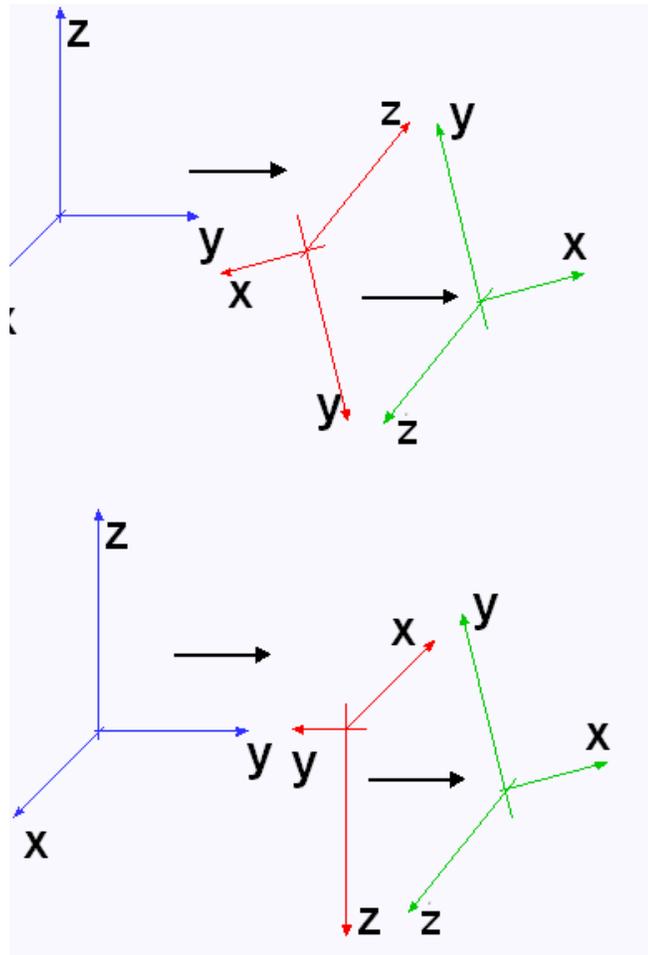
$$U_p (1 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r}) = (1 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r}) U_p$$

$$\rightarrow -U_p \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} U_p \rightarrow -U_p \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} U_p$$

Quindi \mathbf{p} va in $-\mathbf{p}$ per parita', in linea con le attese dalla analogia situazione classica.

3. Operatore momento angolare

Le operazioni rotazione e inversione degli assi commutano



Si trova, per gli operatori nello spazio degli stati:

$$U_p \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}} U_p$$

Questo e' consistente con la definizione classica $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Sempre in concordanza con l'analogia situazione classica, \mathbf{L} va in \mathbf{L} per parita'; questo risultato si estende al caso dello spin, e quindi del momento angolare totale $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

4. Energia etc

Per tutte le altre quantita' valgono relazioni di commutazione che si derivano da quelle trovate sopra.

In breve, ogni grandezza fisica (scalare, vettore, tensore) acquista, oltre alla sua caratteristica *tensoriale* - che la definisce rispetto al gruppo delle rotazioni, anche una caratteristica di *parita'*, che la definisce rispetto alle riflessioni spaziali: si parla quindi di *scalari/pseudoscalari, vettori/pseudovettori, etc..* Si noti che

	Vero	Pseudo
Scalare	+1	-1
Vettore	-1	+1
Tensore di rango N	$(-1)^N$	$(-1)^{N+1}$

La seguente tabella mostra le proprieta' di trasformazione di diversi operatori elettromagnetici rispetto all'inversione degli assi; esse sono basate sull'attribuzione alla carica elettrica della proprieta' di essere uno *scalare* rispetto a riflessioni

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &\rightarrow -\mathbf{j}(-\mathbf{r},t) \text{ dens. di corrente} \\ \rho(\mathbf{r},t) &\rightarrow \rho(-\mathbf{r},t) \text{ dens. di carica} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &\rightarrow -\mathbf{E}(-\mathbf{r},t) \text{ campo elettrico} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &\rightarrow \mathbf{B}(-\mathbf{r},t) \text{ campo magnetico} \end{aligned}$$

b) Proprieta' dell'operatore parita'

Poiche' l'operazione di inversione spaziale esegue la trasformazione del sistema di coordinate (leggi: posizione di un punto fisso espressa nei due riferimenti):

$$P: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

nello spazio degli stati le due diverse rappresentazioni dello stesso stato fisico dovranno soddisfare la relazione:

$$\langle \mathbf{r}' | \psi' \rangle = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \langle -\mathbf{r}' | \psi \rangle$$

Quindi

$$\langle \mathbf{r} | \psi' \rangle = \langle -\mathbf{r} | \psi \rangle$$

Siccome l'operatore unitario che trasforma gli stati, U_p , deve eseguire l'operazione

$$U_p : |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U_p |\psi\rangle$$

dovrà essere:

$$U_p : |\mathbf{r}\rangle \rightarrow |\mathbf{r}'\rangle = U_p |\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$$

La proprietà fondamentale dell'operatore parità è che, applicato a uno stato due volte in successione, riconduce allo stato iniziale:

$$U_p |\psi\rangle = |\psi'\rangle \rightarrow U_p |\psi'\rangle = U_p (U_p |\psi\rangle) = |\psi\rangle$$

Vale forse la pena di sottolineare che gli stati $|\psi\rangle$ indicati sopra non sono in generale autostati dell'operatore parità. Di fatto, non tutti gli stati possibili hanno parità definita! P.es. un autostato dell'impulso non ha parità definita (a meno che appartenga all'autovalore $\mathbf{p}=0$). Neanche tutti gli stati stazionari (autostati di H) sono a priori a parità definita, anche se $[H, U_p]=0$: questo avviene perché, quando l'hamiltoniano commuta separatamente con due operatori che fra loro non commutano, gli stati stazionari sono degeneri, con molteplicità data da quella degli autostati di uno dei due. Questo è una situazione che si presenta spesso, e si può visualizzare p.es. così:

a) Consideriamo una particella libera; allora $H = p^2/2m$, e H commuta con \mathbf{p} (impulso) e con U_p (parità), che fra loro come sappiamo non commutano; allora gli stati stazionari sono degeneri, con degenerazione 2 perché U_p ha due autovalori. Infatti, per ogni autovalore di H , ci sono due autostati di H e \mathbf{p} , $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$, $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$, che non hanno parità definita; si passa dall'uno all'altro attraverso l'operatore U_p . Alternativamente, ci sono due autostati di H e U_p , $\sin \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$, $\cos \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$, che non hanno \mathbf{p} definito; si passa dall'uno all'altro attraverso l'operatore \mathbf{p} .

b) Consideriamo un sistema a simmetria sferica; allora H commuta con L^2 , che è quindi una costante del moto. Ora, L^2 commuta separatamente con L_x, L_y, L_z , che fra loro non commutano. Allora gli autostati di L^2 (e H) sono degeneri, in questo caso con degenerazione $2l+1$ (perché p.es. L_z ha $2l+1$ autovalori); si passa dall'uno all'altro tramite gli operatori a ladder L_+ , L_- , che sono combinazioni lineari di L_x , L_y . Il discorso può essere ripetuto in maniera analoga se si sceglie L_x o L_y , vista la totale simmetria fra le tre componenti di \mathbf{L} , il che mostra che anche qui vale la regola citata sopra.

Se lo stato $|\psi\rangle$ è un autostato dell'operatore parità sarà:

$$U_p |\psi\rangle = \eta_p |\psi\rangle$$

L'operatore U_p , che è unitario per definizione, è d'altra parte anche hermitiano, visto che

$$U_p^2 = 1, \quad U_p U_p^\dagger = 1 \rightarrow U^\dagger = U_p \rightarrow U_p \text{ hermitiano}$$

Quindi è un'osservabile, ed ha autovalori reali: $\eta_p = \pm 1$. Questo autovalore, per un autostato della parità, costituisce un numero quantico, la parità spaziale appunto (senza analogo classico!), che si aggiunge agli altri che caratterizzano lo stato in questione. Quindi, se $[H, P] = 0$, η_p è una costante del moto; se inoltre uno stato stazionario è non degenere, ha parità definita (anche un livello degenere può avere parità definita, nel caso ovvio in cui tutti gli stati che fanno capo al livello abbiano la stessa parità!). La parità di uno stato composto è il *prodotto* delle parità dei componenti: ossia, la parità spaziale è un numero quantico *moltiplicativo*.

Numeri quantici additivi e moltiplicativi

Perché alcuni numeri quantici, per un sistema composto, risultano essere quantità moltiplicative, mentre altri sono additivi? La ragione sta nel tipo di simmetria da cui i numeri quantici derivano, tramite gli autovalori dell'operatore unitario corrispondente

- a) Se si tratta di una simmetria *discreta* (come p.es. inversione spaziale, coniugazione di carica, etc), la quantità conservata (quindi anche il numero quantico) è moltiplicativa. In effetti, se consideriamo p.es. la parità di un sistema composto da due sottosistemi:

$$U_p^{(1)} (U_p^{(2)} |\psi\rangle) = U_p^{(1)} (\eta_p^{(2)} |\psi\rangle) = \eta_p^{(1)} \eta_p^{(2)} |\psi\rangle$$

- b) Se si tratta di una simmetria *continua*, l'operatore unitario non è hermitiano, quindi non ha autovalori reali; per altro, essendo la simmetria continua è possibile, come visto prima, limitarsi a considerare gli operatori infinitesimi: p.es., per le traslazioni:

$$U_T^{(1)} \simeq 1 + ia\mathbf{p}^{(1)}, U_T^{(2)} \simeq 1 + ia\mathbf{p}^{(2)}$$

$$U_T^{(1)} (U_T^{(2)} |\psi\rangle) \simeq (1 + ia\mathbf{p}^{(1)}) [(1 + ia\mathbf{p}^{(2)}) |\psi\rangle]$$

Al I ordine

$$U_T^{(1)} (U_T^{(2)} |\psi\rangle) \simeq (1 + ia\mathbf{p}^{(1)} + ia\mathbf{p}^{(2)}) |\psi\rangle = [1 + ia(\mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)})] |\psi\rangle$$

E' evidente che questa volta la quantita' conservata e' la somma delle quantita' relative ai due sottosistemi.

Parlando in modo pochissimo rigoroso, la quantita' conservata e' sempre in relazione ad un operatore hermitiano: se l'operatore (unitario) di simmetria non lo e', quel che si conserva non e' l'operatore, ma il suo *logaritmo* (qualunque cosa questo voglia dire), visto che

$$U \text{ unitario} \rightarrow U = e^{iH}, H \text{ hermitiano};$$

da cui la legge di composizione additiva: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

c) Parita' in fisica delle particelle

Ammesso che la parita' sia conservata, si pone ovviamente il problema teorico/sperimentale di determinare la parita' di ogni dato stato stazionario, come gli stati fondamentali delle particelle elementari

Parita' orbitale

Come detto sopra, l'operatore parita' commuta con l'operatore momento angolare totale di un sistema: ci aspettiamo quindi che un sistema preparato in un autostato di \mathcal{J} abbia parita' definita. Possiamo studiare inizialmente il caso del solo momento angolare orbitale per semplicita': quindi, consideriamo un sistema preparato in un autostato del momento angolare orbitale e della sua componente z . Nella rappresentazione posizione, la parte angolare della sua funzione d'onda sara' allora un'armonica sferica:

$$\psi(\mathbf{r}) = Nf(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Dalle proprieta' delle armoniche sferiche:

$$P: \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \Rightarrow Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow Y_l^m(\theta - \pi, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Quindi lo stato e' autostato della parita' con autovalore $(-1)^l$, che si chiama *parita' orbitale* dello stato. Ricordando lo sviluppo di un'onda piana in armoniche sferiche

risulta evidente che, invece, un sistema in un autostato dell'impulso non ha parita' definita.

Parita' intrinseca

C'e' un'importante differenza fra la situazione in meccanica quantistica non relativistica e quella in meccanica quantistica relativistica, o teoria dei campi: nel primo caso i soli processi possibili sono quelli in cui la massa a riposo e l'energia totale vengono separatamente conservate, il che si traduce in una stretta conservazione dell'identita' di tutti i sistemi fisici in gioco; nel secondo caso massa ed energia sono intercambiabili. Questo significa che, nel caso di interazioni fra particelle relativistiche, si possono avere (e si hanno di fatto copiosamente) processi di creazione e distruzione di particelle. Fra le conseguenze di questo cruciale cambiamento di regime c'e' la necessita' di introdurre un'estensione del concetto di parita' sviluppato fin qui: *la parita' intrinseca*. Mentre e' doveroso rinviare ai corsi e testi di teoria dei campi per una introduzione soddisfacente a tutta la questione, qui ci si deve limitare ad un breve accenno: si e' visto a suo tempo che le grandezze fisiche (scalari, vettori, tensori,...) possiedono, oltre alla loro caratteristica tensoriale (proprieta' di trasformazione rispetto a cambiamenti continui di coordinate), anche una caratteristica di parita' (scalare/pseudoscalare, ...). Ora, in una teoria quantistico-relativistica *il campo e' una grandezza fisica*, e non la rappresentazione dello stato del sistema, come e' invece una funzione d'onda: il sistema fisico e' il campo stesso! In altre parole, *i gradi di liberta' del sistema sono i valori del campo* in ogni punto di una data regione dello spazio-tempo, mentre le coordinate spazio-temporali stesse sono ridotte al ruolo di *indici* (continui) che identificano gli elementi del sistema. Come ogni grandezza fisica, ogni campo ha quindi una caratteristica tensoriale (ci sono campi scalari, vettoriali, ...): ci aspettiamo dunque che abbia anche una caratteristica di parita'. La caratteristica di parita' dell' *operatore campo* viene a sua volta trasferita a quella degli *stati del campo* stesso (per vedere questo, si pensi allo sviluppo del campo in serie di operatori di creazione/distruzione: ogni possibile stato del campo puo' essere pensato come risultante dall'applicazione di un certo numero di operatori di creazione allo *stato di vuoto*, e di conseguenza caratterizzarsi rispetto a inversione degli assi nello stesso modo degli operatori stessi), che quindi hanno una caratteristica di parita' totale, composta sia da quella "orbitale", sia da quella propria del campo, detta "intrinseca".

Naturalmente, puo' essere comodo, per uno scopo o un altro, considerare come particelle elementari anche oggetti composti, come un mesone o un barione: in questo senso, possiamo attribuire ad essi una parita' "intrinseca" che in realta' deriva anche da gradi di liberta' (nascosti) di natura orbitale.

Con questa convenzione sottintesa, si puo' parlare quindi di parita' intrinseca del pione, del protone, etc.

Un esempio di parita' "intrinseca" di origine orbitale

Se consideriamo un nucleo, abbiamo due possibili punti di vista:

a) Lo consideriamo come lo stato legato di A nucleoni; se ci mettiamo nel suo centro di massa ($\mathbf{p}_{TOT}=0$), osserveremo il moto complicato di tutti i nucleoni, al quale potremo certamente attribuire vari numeri quantici; se il nucleo e' in un autostato della parita', avremo fra essi anche la parita' dovuta al moto orbitale sopra descritto

b) Lo consideriamo come una particella non strutturata, p.es. quando lo usiamo come proiettile o bersaglio in una collisione nella quale i nuclei incidenti sono sostituiti da altre specie nucleari; in questo caso, dobbiamo tenere conto della parita' menzionata in a), oltre che di quella legata al moto orbitale del nucleo come un tutto, nella conservazione della parita' nella collisione.

Si puo' fare un esempio fittizio e sovrasemplificato, ma tuttavia utile a rendere l'idea, considerando l'urto fra due particelle composte da costituenti ipotetici privi di spin, nella quale avvenga un riarrangiamento dei costituenti:

$$A + B \rightarrow C + D$$

$$\mathbf{L}_{TOT}^{(in)} = \mathbf{L}_A^{(CM-A)} + \mathbf{L}_B^{(CM-B)} + \mathbf{L}_{AB}^{(CM-AB)}$$

$$P_{TOT}^{in} = (-1)^{L_{TOT}^{(in)}} = \underbrace{(-1)^{L_A^{(CM-A)}}}_{P_A} \underbrace{(-1)^{L_B^{(CM-B)}}}_{P_B} \underbrace{(-1)^{L_{AB}^{(CM-AB)}}}_{P_{ORB}}$$

$$\mathbf{L}_{TOT}^{(out)} = \mathbf{L}_C^{(CM-C)} + \mathbf{L}_D^{(CM-D)} + \mathbf{L}_{CD}^{(CM-CD)}$$

$$P_{TOT}^{out} = (-1)^{L_{TOT}^{(out)}} = \underbrace{(-1)^{L_C^{(CM-C)}}}_{P_C} \underbrace{(-1)^{L_D^{(CM-D)}}}_{P_D} \underbrace{(-1)^{L_{CD}^{(CM-CD)}}}_{P_{ORB}}$$

Se noi ignoriamo la struttura interna dei nuclei A e B , le quantita' P_A e P_B appaiono come *intrinseche* alle particelle interagenti, ed essenziali nel garantire la conservazione della parita' nella reazione.

Nelle collisioni fra particelle elementari e' altrettanto essenziale tenere conto della parita' intrinseca delle particelle interagenti, che sia o no dovuta ad una loro struttura interna

La parita' intrinseca deve quindi essere presa in considerazione ogni qual volta, in un processo, il numero o il tipo di particelle cambia. E' evidente che,

quando invece le particelle interagenti sono le stesse prima e dopo la collisione, e l'interazione conserva la parità, i fattori dovuti alla parità intrinseca sono gli stessi da un lato e dall'altro dell'equazione di bilancio della parità totale, e quindi, cancellandosi, possono essere del tutto ignorati

d) Elicità

Le proprietà "meccaniche" di ogni particella (che non riguardano quindi il suo accoppiamento ai vari campi, legati alle diverse interazioni) sono la *massa* e lo *spin*. Per specificare lo stato di una particella libera in un dato riferimento occorre quindi dire quali siano il 4-impulso e la "componente z" dello spin. Ora, quest'ultima grandezza si può definire in due modi, fondamentalmente equivalenti ma diversamente vantaggiosi dal punto di vista delle applicazioni:

descrizione in termini di un asse z fisso (formalismo di *spin-orbita*, più usato in spettroscopia)

descrizione in termini di un asse z allineato con l'impulso della particella (formalismo di *elicità*, più usato per lo scattering relativistico)

L'operatore elicità è definito proprio come la componente dello spin lungo l'impulso della particella. Facendo riferimento ad un'immagine classica, in cui lo spin della particella viene associato ad una *rotazione* della particella attorno ad un asse, che in questo caso coincide con la direzione dell'impulso, si dice che una particella con elicità +va è *destrorsa*, mentre una con elicità -va è *sinistrorsa*; occorre avere ben chiaro che questa è solo una descrizione pittoresca, essendo lo spin un grado di libertà privo di analogo classico.

La definizione dell'operatore elicità è quindi:

$$\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

dove s è l'operatore di spin della particella.

Se la particella ha massa > 0 , è immediato vedere come si possa definire l'elicità nel riferimento di quiete della particella, come componente lungo una direzione z prescelta, e poi eseguire un boost di Lorentz lungo z per portare l'impulso della particella ad un valore dato: si noti tuttavia che l'elicità, che essendo un prodotto scalare è invariante per rotazioni, *non* è un invariante di Lorentz

Questo si puo' vedere facilmente pensando ad una trasformazione di Lorentz lungo z tale da invertire il segno dell'impulso della particella: allora

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -\hat{\mathbf{p}} \\ \sigma \rightarrow \sigma \end{array} \right\} \rightarrow h = \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -h$$

L'elicità non è neanche invariante per parità, essendo il prodotto di un vettore e di uno pseudovettore.

Nel caso di particelle a massa nulla (fotoni, neutrini), la velocità della particella è 1, quindi non esiste una trasformazione di Lorentz tale da invertire la direzione dell'impulso: quindi l'elicità è un invariante di Lorentz. Viceversa, l'elicità continua ovviamente a non essere invariante per parità.

e) La determinazione delle parità intrinseche

Si indicano alcuni casi particolarmente importanti, con lo scopo di mostrare il tipo di argomenti, sperimentali e teorici, che possono essere usati per trovare il valore della parità intrinseca delle particelle.

1) Parità del fotone

Il fotone è una particella a spin 1 (particella vettoriale). Le proprietà di trasformazione dei campi classici \mathbf{E} e \mathbf{B} sono

$$P: \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$$

$$P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$$

Poiché

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

segue che \mathbf{A} deve essere un vettore polare:

$$P: \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$$

Gli stati di un fotone sono ottenuti trattando \mathbf{A} come un operatore: questo fa già supporre che la proprietà di \mathbf{A} di essere un vettore polare, a parità -va, si trasferisca agli stati a uno o più fotoni. Considerando il campo e.m. racchiuso in una cavità, \mathbf{A} , trattato come un operatore, si può sviluppare in serie di operatori di creazione e distruzione, ciascuno dei quali ha a coefficiente il versore polarizzazione. Il tipo di sviluppo in serie di \mathbf{A}

dipende dalla nostra scelta: quella piu' immediata e' di sviluppare A in onde piane (autostati dell'energia e dell'impulso), un'altra possibile e' quella di svilupparlo in autostati del mom. angolare totale. In ogni caso si possono scegliere due coppie ortogonali di versori base per la polarizzazione, supponendo p.es che \mathbf{k} sia diretto lungo z:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) &= (0, 1, 0) \end{aligned} \right\} \text{base polarizzazione lineare}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_L(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})) \\ \mathbf{e}_R(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})) \end{aligned} \right\} \text{base polarizzazione circolare}$$

Per trovare la parita' intrinseca del fotone, consideriamo l'operazione di inversione degli assi applicata ai vettori polarizzazione lineare e numero d'onda di un'onda elettromagnetica classica:

$$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})$$

$$P: \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$$

$$\rightarrow \frac{-\mathbf{k}}{|-\mathbf{k}|} = -[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})]$$

D'altra parte, dovendo essere in generale per un'onda qualsiasi:

$$\frac{-\mathbf{k}}{|-\mathbf{k}|} = \mathbf{e}_1(-\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(-\mathbf{k})$$

deve valere:

$$-[\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k})] = \mathbf{e}_1(-\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(-\mathbf{k})$$

Quindi l'operazione di inversione degli assi manda un'onda polarizzata linearmente, che viaggia nella direzione \mathbf{k} , in un'altra onda polarizzata linearmente, che viaggia in direzione $-\mathbf{k}$, con un segno -: questo segno negativo corrisponde alla *parita' intrinseca negativa* del fotone a polarizzazione lineare, come anticipato sopra.

I fotoni che interagiscono nelle reazioni fra particelle elementari prendono parte di solito a processi fra sistemi che sono in autostati della parita'; quando la parita' e' conservata, i fotoni stessi devono essere in autostati

della parità. Si pone quindi il problema di trovare gli stati di un fotone a parità definita; lo sviluppo in onde piane citato sopra non è adatto allo scopo, perché impulso e parità, come è noto, non commutano. Si deve quindi ricorrere allo sviluppo in autostati del momento angolare *totale* (orbitale + spin). La parità totale di uno stato a un fotone dipende, come al solito, dal suo stato di momento angolare totale. Tuttavia, fissato il valore di j , ci possono essere due valori opposti di parità, a seconda se la radiazione è di un multipolo *magnetico* o *elettrico*:

$$P_M = (-1)^{j+1}$$

$$P_E = (-1)^j$$

Parità della radiazione di multipolo

Come detto sopra, normalmente l'operatore campo e.m. viene sviluppato in onde piane (autostati dell'impulso):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|V}} \left[a_i(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_i e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E t)} + a_i^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_i^* e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E t)} \right]$$

(Si trascura da ora in poi la dipendenza dal tempo).

Si può alternativamente svilupparlo in autostati del momento angolare totale $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, in cui $s=1$ (spin del fotone). Questi autostati, p.es. nella rappresentazione posizione, sono le *armoniche sferiche vettoriali*, definite da:

$$\mathbf{Y}_{JLm} = \sum_{\mu} Y_L^{m-\mu} \chi_{\mu}^{\mu} \langle 1, \mu, L, m-\mu | J, m \rangle$$

χ è la parte di spin per lo stato del fotone. Lo stato corrisponde ad un valore definito di parità: in effetti, rispetto a inversione degli assi χ , che è un vettore, cambia segno, e Y acquista una fase $(-1)^L$. In totale dunque la parità di un fotone in questo stato è $(-1)^{L+1}$. Essendo $s=1$, per ogni dato valore di J, m ci sono 3 autostati indipendenti:

$$\mathbf{Y}_{J,J,m}, \mathbf{Y}_{J,J+1,m}, \mathbf{Y}_{J,J-1,m}$$

le cui parità seguono dalla regola trovata sopra:

$$(-1)^{J+1}, (-1)^J, (-1)^J$$

Il fotone nel primo stato si chiama magnetico, nel secondo o terzo si chiama elettrico. I nomi derivano dallo sviluppo in serie di multipoli della radiazione e.m. in una cavità sferica: le funzioni trovate sopra

compaiono nella parte angolare dello sviluppo, rispettivamente per un 2^J -polo magnetico e un 2^J -polo elettrico

2) Parita' relativa particella/antiparticella: bosoni e fermioni

Consideriamo le equazioni di Klein-Gordon e Dirac, rispettivamente per particelle a spin 0 e $\frac{1}{2}$.

- (i) La funzione d'onda di K-G, come e' noto, e' adatta a descrivere una particella senza spin, che puo' essere carica o neutra: se e' neutra, particella e antiparticella coincidono. Se e' carica, si puo' far vedere che la parita' di particella e antiparticella e' la stessa

Parita' relativa bosone-antibosone (spin 0)

Una particella carica e' descritta da una funzione d'onda complessa, o per essere piu' precisi da un campo non hermitiano. Allora si deve avere, per un'onda piana:

$$U_p \varphi(x) = U_p e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} = \eta_p e^{-i(Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$
$$U_p \varphi^*(x) = U_p e^{+i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} = \eta_p^* e^{+i(Et + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

perche' l'operazione di coniugazione complessa commuta con l'operatore parita'. Se η_p e' reale, la parita' di particella e antiparticella e' la stessa

- (ii) E' una delle conseguenze dell'equazione di Dirac che i fermioni e gli antifermioni abbiano parita' opposta

Parita' relativa fermione-antifermione

Si consideri l'eq. di Dirac libera:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi$$

Rispetto all'inversione degli assi essa diviene:

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-\mathbf{p}) + \beta m) \psi'$$

Moltiplicando a sinistra per β , e facendo scorrere β da sinistra a destra nel II membro:

$$i \beta \frac{\partial \psi'}{\partial t} = (\beta \boldsymbol{\alpha} \cdot (-\mathbf{p}) + \beta \beta m) \psi'$$

$$i \frac{\partial (\beta \psi')}{\partial t} = \left(\underset{=-\beta \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha} \beta} \cdot \mathbf{p} + \beta \beta m \right) \psi'$$

$$i \frac{\partial (\beta \psi')}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) (\beta \psi')$$

Si vede dunque che

$$\beta \psi' = \psi \xrightarrow{\beta^2=1} \psi' = \beta \psi$$

Se prendiamo le soluzioni nel sistema di quiete della particella, avremo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ energia positiva}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ energia negativa}$$

Ricordando che

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si vede che tutte e 4 le soluzioni sono autostati della parita', quelle con $E > 0$ con parita' opposta a quelle con $E < 0$.

Fasi arbitrarie; parita' immaginaria

In senso lato, tutte le parità intrinseche sono arbitrarie: lo stato con una particella, qualunque essa sia, si ottiene con l'operatore di creazione applicato allo stato di vuoto. Tuttavia, *assumendo per convenzione* che la parità intrinseca dello stato di vuoto sia +va, la parità di alcuni tipi di particelle (quelli visti prima, che hanno i numeri quantici additivi uguali a quelli del vuoto) è definibile senza ambiguità. Viceversa, la parità dei fermioni non è definibile in modo assoluto, come conseguenza del fatto che essi vengono creati e distrutti sempre a coppie. Inoltre, se per due fermioni diversi non ci sono processi di creazione/distruzione che li colleghino conservando la parità, è impossibile definire la parità relativa; questo è un punto molto importante, alla luce delle regole di selezione derivanti da varie leggi di conservazione conosciute (carica elettrica, numero barionico, numeri leptonici, flavor nelle interazioni forti ed elettromagnetiche, ...): per esempio, non ci sono processi elementari forti o elettromagnetici che colleghino uno stato a un quark s a uno stato a un quark u , quindi la loro fase (e a maggior ragione la loro parità) relativa è arbitraria (regola di superselezione). Quindi, si prende per convenzione come +va la parità di tutti i fermioni (leptoni e quarks) e come -va la parità di tutti gli antifermioni (antileptoni e antiquarks). C'è un fatto curioso a proposito dei fermioni: come si è visto, il quadrato dell'operatore parità deve essere equivalente all'identità. Se ora consideriamo una coppia fermione/antifermione nel suo CM, l'operazione P corrisponde ad una rotazione di π intorno al CM, e P^2 ad una rotazione di 2π ; ma è noto che, per un fermione, una rotazione di 2π cambia il segno della funzione d'onda (a causa dello spin semiintero). Quindi occorrono 2 rotazioni di 2π per riavere la funzione d'onda originale con il segno giusto. Le due rotazioni corrispondono, per il ns sistema, all'operazione P^4 : quindi abbiamo

$$U_p^4 = 1 \rightarrow \eta_p^4 = 1 \rightarrow \eta_p^2 = \pm 1 \rightarrow \eta_p = \pm i, \pm 1$$

È quindi possibile assegnare a un fermione una parità immaginaria, fermo restando che l'antifermione corrispondente ha parità relativa -1. Questa assegnazione è usata nella descrizione dei neutrini di Majorana, particelle ipotetiche che, pur essendo fermioni, sarebbero autostati di C (coniugazione di carica): se esistessero, potrebbero avere un ruolo interessante nella descrizione delle masse dei neutrini

(iii) Stati particella/antiparticella; stati di 2 fotoni

Nel caso di una coppia fermione/antifermione, si considerino gli autostati del momento angolare orbitale nel CM: ad essi potremo ora assegnare la parità:

$$\eta_p^{\bar{f}f} = \underset{\text{intrinseca orbitale}}{(-1)} (-1)^l = (-1)^{l+1}$$

Nel caso di una coppia bosone/antibosone, nella stessa situazione avremo:

$$\eta_p^{\bar{b}b} = \underset{\text{intrinseca orbitale}}{(\eta_p)^2} (-1)^l = (-1)^l$$

Nel caso di una coppia di fotoni di uguale energia, l'espressione *centro di massa* e' un po' audace, tuttavia viene comunemente usata: si tratta del riferimento in cui i fotoni viaggiano collineari in direzioni opposte. Conviene utilizzare gli stati di particella singola a elicità definita, visti prima: cerchiamo l'effetto dell'operazione parità su questi stati, ricordando che l'elicità cambia segno per riflessione:

$$\begin{aligned} U_p | \mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, R \rangle &= | -\mathbf{k}, L; \mathbf{k}, L \rangle \\ U_p | \mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, L \rangle &= | -\mathbf{k}, R; \mathbf{k}, R \rangle \\ U_p | \mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L \rangle &= | -\mathbf{k}, L; \mathbf{k}, R \rangle \equiv | \mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L \rangle \\ U_p | \mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R \rangle &= | -\mathbf{k}, R; \mathbf{k}, L \rangle \equiv | \mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R \rangle \end{aligned}$$

dove le ultime due uguaglianze vengono dall'indistinguibilità dei due fotoni (particelle identiche). Quindi

- $| \mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, L \rangle, | \mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, R \rangle$ sono autostati di U_p , con autovalore $+1$; per essi $J_z = \pm 2$
- le combinazioni lineari $| \mathbf{k}, R; -\mathbf{k}, R \rangle \pm | \mathbf{k}, L; -\mathbf{k}, L \rangle$ sono autostati di U_p , con autovalori ± 1 ; per essi $J_z = 0$

Ci sono interessanti applicazioni di questi risultati alla fisica delle particelle, che saranno discusse dopo la coniugazione di carica.

(iv) Conservazione e violazione di P

Occorre naturalmente chiedersi se la parità e' davvero una quantità conservata o no, esattamente come per ogni altra osservabile [In effetti, dire che sia proprio naturale chiederselo e' antistorico: ci sono voluti decenni, e una serie di risultati sperimentali stupefacenti, perche' la domanda venisse infine formulata nel 1956; fino ad allora, la conservazione della parità veniva data per scontata,

e sottintesa]. Se ci rifacciamo ad esempi piu' standard, ci viene in mente il caso dell'impulso: quantita' conservata per un sistema se H e' invariante per traslazioni. Analogamente, P e' una quantita' conservata per un sistema se H e' invariante per riflessioni. Ora, ci aspettiamo che H , per qualunque sistema *isolato*, sia invariante per traslazioni, quindi che il suo impulso sia conservato: caso mai, la difficolta' puo' stare nello stabilire che il sistema sia davvero isolato. Quindi, la legge della conservazione dell'impulso e' molto generale e basata sulla proprieta' di omogeneita' dello spazio. Come vanno le cose per H riguardo alle riflessioni? Qui sta la sorpresa: c'e' una componente di H , quella legata all'interazione debole, che non e' invariante per riflessione: conseguentemente, la parita' non e' conservata nei processi deboli. In qualche modo, questo, che e' un fatto sperimentale, ci dice che, *per le interazioni deboli*, lo spazio fisico e' dotato di un 'senso di avvvitamento' preferito, fatto certamente controintuitivo.

Formalmente, la condizione di invarianza per parita' dell'eq. di Schrodinger per un sistema si riconduce all'invarianza dell'hamiltoniano, in totale analogia al caso classico:

H invariante per parita' \rightarrow Eq. di S. invariante

In meccanica quantistica, l'invarianza di H e' equivalente alla commutativita' con U_p :

$$H \text{ invariante per parita'} \leftrightarrow [H, U_p] = 0$$

In teoria dei campi, l'invarianza delle equazioni di campo si riconduce all'invarianza della lagrangiana, proprieta' che sussiste o no a seconda della forma della lagrangiana stessa

Esempio di lagrangiana invariante per parita': interazione elettrone - fotone

$$L_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

L'invarianza segue dalle proprieta' di trasformazione per parita' delle matrici di Dirac e del 4-potenziale elettromagnetico A_μ

Esempio di lagrangiana non invariante per parita': interazione leptone - W (solo I generazione per semplicita')

$$L_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\nu_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu + \text{hermitiano coniugato}$$

La non invarianza segue dalle proprietà di trasformazione per parità di γ_5 e del 4-potenziale debole W_μ

Una conseguenza interessante della invarianza per parità è la non esistenza di momenti di dipolo elettrico elementari: infatti, se esistessero darebbero luogo ad un'interazione con un campo elettrico esterno:

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -a\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$$

che non sarebbe invariante per parità. Questo sarebbe ovviamente in contraddizione con il fatto che lo stato fondamentale della particella è a parità definita. Il fatto che si assuma che \mathbf{d} sia allineato con $\boldsymbol{\sigma}$ viene da questo: se non lo fosse, la particella avrebbe un ulteriore grado di libertà interno, analogo allo spin, del quale per altro non c'è alcuna traccia.

Ci si può chiedere come questo risultato si confronti con l'esistenza, ben nota, di momenti di dipolo elettrico a livello molecolare (p.es. la molecola d'acqua è polare): ma gli stati stazionari delle molecole polari sono stati *degeneri*, a parità non definita

6.8 Simmetrie discrete: coniugazione di carica

Esiste un'altra operazione di simmetria discreta, che però non riguarda cambiamenti del sistema di riferimento: si potrebbe dire che tale operazione corrisponde ad una inversione del verso positivo dell'"asse" della carica elettrica, nonché di quello dei numeri barionico e leptonico, della stranezza etc:

$$C: q \rightarrow -q$$

$$B \rightarrow -B$$

$$S \rightarrow -S$$

.....

In questo senso, la simmetria corrispondente all'operazione C (nei casi in cui è verificata) è definibile come un altro principio di relatività: "non esiste un «sistema di riferimento assoluto» per il segno delle cariche (in senso allargato); scambiare negativo con positivo non porta conseguenze misurabili".

Anche per questa operazione possiamo definire un operatore unitario nello spazio degli stati, come per la parità:

$$U_C |\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle$$

L'operatore U_C , al pari di U_P , ha la proprietà fondamentale: $U_C^2 = 1$. Essendo U_C unitario, questo vuol dire che, come per U_P :

$$U_C^2 = U_C U_C^\dagger \rightarrow U_C = U_C^\dagger \rightarrow U_C \text{ hermitiano}$$

Quindi U_C è un'osservabile e ha autovalori reali; se lo applichiamo ad un suo autostato

$$U_C |\alpha\rangle = \eta_C |\alpha\rangle, U_C (U_C |\alpha\rangle) = \eta_C^2 |\alpha\rangle \rightarrow \eta_C = \pm 1$$

La quantità η_C si chiama *parità di carica*.

Si osservi che gli stati con carica (in senso allargato) non nulla *non* sono autostati di C , visto che vengono cambiati in stati con carica opposta. Di fatto, un autostato di C deve avere tutti i numeri quantici additivi uguali a zero (= numeri quantici del vuoto). Anche U_C , al pari di U_P , è elemento di un gruppo discreto a 2 elementi, e dà luogo quindi ad un numero quantico *moltiplicativo*. Anche per C , se $[H, C] = 0$ η_C è una costante del moto, e in assenza di degenerazione ha valore definito per gli stati stazionari.

6.8.1 Applicazioni

a) Parità di carica del fotone

La densità di energia associata ad un sistema di cariche interagenti con il campo elettromagnetico è data, in notazione covariante, da: $j^\mu A_\mu$, in termini della 4-corrente e del 4-potenziale. Poiché le interazioni e.m. sono invarianti per C , le proprietà di trasformazione di \mathbf{j} e \mathbf{A} rispetto a C devono essere uguali; poiché

$$j_\mu = (\rho, \mathbf{j}) \xrightarrow{C} (-\rho, -\mathbf{j}) = -j_\mu$$

allora anche

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \xrightarrow{C} -A_\mu = -(\varphi, \mathbf{A})$$

Quindi la parità di carica del fotone è negativa. Per un sistema di n fotoni, si ha:

$$U_C |n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle$$

Siccome le interazioni e.m. conservano C , uno stato iniziale con n fotoni non puo' evolvere in uno stato finale con m fotoni, se $m \neq n$

b) Stati fermione/antifermione, etc

Per stati contenenti coppie bosone/antibosone, l'operazione C coincide con l'operazione P : entrambe scambiano di posto la particella con l'antiparticella. Il risultato quindi e':

$$U_C |b\bar{b}\rangle = U_P |b\bar{b}\rangle = (-1)^l |b\bar{b}\rangle \rightarrow \eta_C = (-1)^l$$

Per stati contenenti coppie fermione/antifermione, le cose sono leggermente piu' complicate: questo perche' P e C non sono equivalenti. Infatti:

$$U_P |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+1} |\bar{f}f\rangle$$

$$U_C |f\bar{f}\rangle = (-1)^{l+s} |\bar{f}f\rangle$$

Infatti, si consideri l'operazione C applicata al sistema descritto nel suo CM: essa e' equivalente all'azione combinata dell'operazione P e di quella dell'operazione S (scambio degli spin - ossia delle loro proiezioni lungo z). L'autovalore dell'operatore U_S e' $(-1)^{s+1}$, perche' la funzione d'onda di spin cambia segno per $s=0$, e non cambia segno per $s=1$:

$$U_S |\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow\rangle = -|\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\rangle$$

$$U_S |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle$$

$$U_S |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, U_S |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

Allora: $\eta_C = (-1)^{l+1} (-1)^{s+1} = (-1)^{l+s}$

c) Particelle realmente neutre

I mesoni neutri con valore zero di stranezza, charm, etc ($\pi^0, \eta, \rho^0, \omega, \phi, J/\psi, \dots$) sono autostati di U_C , con parita' di carica $+1$ o -1 . Si noti che particelle elettricamente neutre come il neutrone o il K^0 non sono autostati di C , perche' non hanno tutti i numeri quantici del vuoto (il

neutrone ha $B=1$, il K^0 ha $S=+1$. Per tutte le altre particelle, C non commuta con Q , Y etc. Per trovare la parita' di carica di questi stati:

i. π^0, η

Il pione neutro e il mesone η decadono elettromagneticamente in 2 γ . Basandosi su questa proprieta', e assumendo che l'interazione e.m. conservi C , possiamo dire:

$$\eta_C = (-1)^2 = +1 \text{ per } \pi^0, \eta$$

ii. $\omega, \phi, J/\psi, \dots$

E' interessante osservare come questi stati (particelle vettoriali, cioe' a spin 1) non possano decadere in 2 γ . Infatti, c'e' un famoso argomento dovuto a Landau e Yang che lo prova

Consideriamo uno stato a spin 1 che decade in 2 fotoni. Lo stato finale deve

contenere i versori polarizzazione dei 2 fotoni, ciascuno una sola volta (v. sviluppo del campo e.m. in operatori di creazione e distruzione)

essere simmetrico rispetto allo scambio $1 \leftrightarrow 2$ fra i 2 fotoni (part. identiche)

assicurare che $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$, in cui \mathbf{k} e' l'impulso relativo dei 2 fotoni nel loro CM (trasversalita' del campo e.m.)

Con i 3 vettori $\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ dobbiamo costruire una quantita' vettoriale/pseudovettoriale (perche' il mom.angolare si conserva, quindi la funzione d'onda dello stato finale deve avere carattere vettoriale come quella dello stato iniziale). Le sole quantita' vettoriali indipendenti che si possono costruire con i 3 vettori sono:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \\ &(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{k} \\ &\mathbf{k} \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Nessuna delle 3 soddisfa tutti i requisiti

La I e' antisimmetrica per scambio $1 \leftrightarrow 2$

La II anche, visto che $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ per scambio $1 \leftrightarrow 2$

La III e' $\mathbf{e}_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1)$, quindi e' 0

Quindi una particella vettoriale non puo' decadere in 2 fotoni

d) Positronio

E' lo stato legato, analogo all'atomo di idrogeno, di un elettrone e un positrone. Le due particelle si annichilano rapidamente, e lo stato decade in 2 o 3 fotoni. E' interessante ricavare le regole di selezione dei decadimenti:

$$C : (-1)^{l+s} \rightarrow \text{per uno stato } S \begin{cases} \eta_C = +1 \text{ singoletto} \\ \eta_C = -1 \text{ tripletto} \end{cases}$$

$$\text{Per } n \text{ fotoni } \eta_C = (-1)^l \rightarrow \begin{cases} 2 \text{ fotoni } \eta_C = +1 \\ 3 \text{ fotoni } \eta_C = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{singoletto} \rightarrow 2 \text{ fotoni} \\ \text{tripletto} \rightarrow 3 \text{ fotoni} \end{cases}$$

e) Mesoni e modello a quark

Sotto il profilo delle simmetrie P e C , i mesoni nel modello a quark assomigliano al positronio, essendo stati legati quark/antiquark. I numeri quantici attesi per i mesoni sono quindi (ogni casella mostra J, η_P, η_C , essendo sottointeso che C e' definita solo per particelle realmente neutre)

L	$S=0$	$S=1$
0	0 ⁻⁺	1 ⁻⁻
1	1 ^{*-}	0 ⁺⁺ 1 ⁺⁺ 2 ⁺⁺
2	2 ⁻⁺	1 ⁻⁻ 2 ⁻⁻ 3 ⁻⁻

I numeri quantici di queste sequenze sono detti *parita' (spaziale e di carica) naturali*. Si noti che le regole di selezione del positronio si applicano anche ai mesoni, quindi risultano vietati p.es. i decadimenti $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \eta \rightarrow \gamma\gamma$, nonche' i decadimenti di stati vettoriali in $\gamma\gamma$, etc

f) Decadimenti forti ed elettromagnetici in 2 pioni e affini

Le regole di selezione di P e C possono essere ricavate dai numeri quantici permessi per stati di 2 particelle scalari o pseudoscalari ($\pi\pi, KK, \dots$): $\eta_P = \eta_C = (-1)^J$

J	PC=++	PC=+-, -+, --
0	OK	KO
1	KO	KO, KO, OK
2	OK	KO

Si noti che per uno stato I^- (es. mesone ρ^0 in $\pi\pi$, o mesone ϕ in KK) e' proibito il decadimento in 2 particelle scalari identiche, perche' la funzione d'onda (che ha solo parte spaziale) sarebbe antisimmetrica (J=1) per scambio delle 2, e questo violerebbe la statistica di Bose.

6.8.2 Conservazione e violazione di C

Come per la parita', ci si chiede se le interazioni conservino la parita' di carica: e la risposta e' dello stesso tipo, ossia che questo avviene, tranne che per l'interazione debole. Quindi, possiamo dire che la componente di H relativa all'interazione debole *non e' invariante* rispetto a C

6.9 Time reversal

La simmetria rispetto a inversione del tempo (che dovrebbe essere in realta' chiamata simmetria rispetto a *inversione del moto*) riguarda processi fra particelle elementari, e non e', ovviamente, applicabile a sistemi macroscopici, la cui evoluzione temporale procede in modo irreversibile; come e' noto, l'apparente contraddizione fra reversibilita' microscopica e irreversibilita' macroscopica fu posta in luce verso la fine dell' '800, e spiegata su basi statistiche da Boltzmann. La simmetria (o l'asimmetria) dei processi elementari rispetto a inversione temporale deve quindi essere intesa alla stessa stregua di quello rispetto a inversione spaziale: ne' piu' ne' meno che il cambiamento di segno della coordinata temporale degli eventi.

Anche a livello microscopico si e' osservata una piccola violazione della simmetria in alcuni processi deboli, osservazione che ha dato luogo a un intenso sforzo teorico e sperimentale teso a chiarirne il meccanismo; mentre il modello standard e' in grado di dare una descrizione relativamente semplice del fenomeno, esso rimane in gran parte non realmente compreso.

6.9.1 Invarianza per inversione temporale in fisica classica

Anche per l' inversione temporale si puo' invocare un " principio di relativita' " (per le interazioni per cui e' verificato), come per l'inversione delle altre coordinate: sistemi di riferimento nei quali la coordinata temporale degli eventi scorre nei due possibili sensi sono equivalenti per la descrizione dei sistemi fisici.

La descrizione piu' semplice dell'invarianza per time reversal e' quella in cui si immagina di filmare un processo, e poi di proiettare il film all'indietro: se il processo proiettato e' un possibile processo fisico si verifica la simmetria rispetto a inversione temporale. P.es., il film di un sasso che cade viene riproiettato come quello di un sasso lanciato verso l'alto; quest'ultimo e' un possibile processo fisico, quindi diciamo che l'interazione gravitazionale e' invariante per time reversal. Possiamo quindi, come per la parita', definire in astratto una nuova operazione di simmetria:

$$T : t \rightarrow t' = -t$$

Così troviamo le proprietà di trasformazione rispetto a time reversal delle diverse grandezze meccaniche ed elettriche, richiedendo, come proprietà base, che le equazioni di Newton, o di Maxwell, restino invariate in forma rispetto alla trasformazione.

Le grandezze meccaniche si trasformano allora come segue:

$$t \rightarrow -t :$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{d(-t)} = -\mathbf{v}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{L}$$

$$E \rightarrow E$$

Le grandezze elettromagnetiche seguono le leggi di trasformazione:

$$\rho \rightarrow \rho$$

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{j}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \quad \text{legato alle cariche}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A} \quad \text{legato alle correnti}$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \quad \text{legato alle cariche, e a } \partial\mathbf{B}/\partial t$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B} \quad \text{legato alle correnti, e a } \partial\mathbf{E}/\partial t$$

Si osservi come non tutte le equazioni della fisica classica siano invarianti per time reversal: le equazioni che coinvolgono processi dissipativi (in sistemi a molti gradi di liberta', quindi) non sono invarianti per time reversal. Un tipico esempio di equazione che descrive un processo irreversibile e' la legge di Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Se si ammette che la conduttivita' sia una costante invariante per time reversal (come e' naturale), allora la legge di Ohm, come si vede immediatamente, non e' invariante; questo e' coerente con la nostra comprensione di questa legge come non legata a processi fondamentali.

6.9.2 Time reversal in meccanica quantistica

Dobbiamo, in analogia con i casi precedenti, trovare un operatore nello spazio degli stati. Le cose tuttavia sono un po' piu' complicate: supponiamo che l'operazione di time reversal coincida, per gli stati, con la semplice sostituzione $t \rightarrow -t$, senza altre modifiche. Allora si trova che:

- L'eq. di Schrodinger non e' invariante per inversione del tempo: infatti

$$H|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} \rightarrow H|\psi(-t)\rangle = -i\frac{\partial|\psi(-t)\rangle}{\partial t}$$

Per risolvere il problema, si definisce (Wigner) l'operatore di time reversal come

$$\left. \begin{array}{l} T : t \rightarrow -t \\ K : i \rightarrow -i \end{array} \right\}, U_T = KT$$

Si puo' notare che $K^2 = 1, K^{-1} = K$.

In conclusione, l'azione dell'operatore di TR su uno stato e':

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi^T(t)\rangle = |\psi^*(-t)\rangle$$

A titolo di esempio, prendiamo la solita onda piana:

$$e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)} \rightarrow e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-E(-t))} = e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

Come atteso, lo stato time-reversed si ottiene invertendo l'impulso.

- Consideriamo ora il caso di una particella a spin $\frac{1}{2}$, descritta da una funzione d'onda a 2 componenti: poiché abbiamo visto che le componenti del momento angolare cambiano segno sotto time reversal, ci aspettiamo che questa trasformazione scambi di ruolo la componente a spin-up e quella a spin-down nella funzione d'onda. Quindi dobbiamo estendere la definizione di operatore di TR per il caso di particelle a spin $\frac{1}{2}$: in pratica

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_+^*(-t) \\ \psi_-^*(-t) \end{pmatrix}$$

dove M è una matrice unitaria 2×2 , da determinare richiedendo che, conformemente alla regola dei momenti angolare, l'operatore di spin (matrici di Pauli):

$$\langle \psi^T(t) | \boldsymbol{\sigma} | \psi^T(t) \rangle = - \langle \psi(-t) | \boldsymbol{\sigma} | \psi(-t) \rangle$$

Si può mostrare che M deve soddisfare

$$M^{-1} \boldsymbol{\sigma} M = -\boldsymbol{\sigma}^*$$

e che una possibile scelta di M è:

$$M = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi per una particella a spin $\frac{1}{2}$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_+^T(t) \\ \psi_-^T(t) \end{pmatrix} = -i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_+^*(-t) \\ \psi_-^*(-t) \end{pmatrix}$$

Un ragionamento analogo si può fare per una particella a spin qualunque, e per stati descritti dall'eq. di Dirac (v. corsi di teoria dei campi)

Se ci chiediamo quali siano le relazioni di commutazione fra operatore di time reversal e osservabili, possiamo semplicemente usare le proprietà di trasformazione delle analoghe quantità classiche.

6.9.3 Azione sugli elementi di matrice

L'operatore U_T non e' un operatore unitario, ne' hermitiano; infatti

$$U_T(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a^*U_T|\psi_1\rangle + b^*U_T|\psi_2\rangle$$

che non e' quel che ci si attende da un operatore unitario; si dice che U_T e' *anti-unitario e antihermitiano*.

Si osservi che l'operazione di coniugazione complessa, malgrado l'apparenza, *non e'* un'operazione lineare: infatti

$$K : \alpha z \rightarrow (\alpha z)^* = \alpha^* z^*$$

Prova:

$$\alpha = ae^{i\varphi}, z = \rho e^{i\psi} \rightarrow \alpha^* = ae^{-i\varphi}, z^* = \rho e^{-i\psi}$$

$$\alpha z = ae^{i\varphi} \rho e^{i\psi} = a\rho e^{i(\varphi+\psi)} \rightarrow (\alpha z)^* = a\rho e^{-i(\varphi+\psi)} = \alpha^* z^*$$

Ma:

$$\alpha^* z^* \neq \alpha z^* \rightarrow \text{Non lineare se } \alpha \neq \alpha^* !!$$

Infatti, per un operatore lineare deve essere:

$$A : (\alpha z) \rightarrow A(\alpha z) = \alpha A(z)$$

Come tale, pur preservando la norma, non ha autovalori reali, e quindi non da' luogo a un numero quantico conservato (come la parita' e la coniugazione di carica). E' interessante trovare l'azione di U_T sugli elementi di matrice : a questo scopo, possiamo considerare il prodotto scalare fra due stati, e verificare come si trasforma rispetto a U_T :

$\{|i\rangle, i=1, \dots\}$ insieme di stati base

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\rightarrow \langle U_T i | U_T j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{norma conservata da } U_T$$

$$|\psi_1\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \psi_1 \rangle \rightarrow |U_T \psi_1\rangle = \sum_i |U_T i\rangle \langle i | \psi_1 \rangle^*$$

$$\langle \psi_2 | = \sum_j \langle \psi_2 | j \rangle \langle j | \rightarrow \langle U_T \psi_2 | = \sum_j \langle \psi_2 | j \rangle^* \langle U_T j |$$

$$\rightarrow \langle U_T \psi_2 | U_T \psi_1 \rangle = \sum_j \langle \psi_2 | j \rangle^* \langle U_T j | \sum_i |U_T i\rangle \langle i | \psi_1 \rangle^*$$

$$= \sum_{i,j} \langle \psi_2 | j \rangle^* \underbrace{\langle U_T j | U_T i \rangle}_{\delta_{ij}} \langle i | \psi_1 \rangle^* = \sum_i \langle \psi_2 | i \rangle^* \langle i | \psi_1 \rangle^*$$

$$= \sum_i \langle i | \psi_2 \rangle \langle \psi_1 | i \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

Quindi U_T scambia gli stati nel prodotto scalare; se essi sono gli stati iniziale e finale di un processo, questo impone l'uguaglianza degli elementi di matrice di transizione fra i due processi, diretto e inverso, se H commuta con U_T , condizione verificata per le interazioni forti ed elettromagnetiche, ma non per quelle deboli. Non va dimenticato che gli elementi di matrice che devono risultare uguali se il TR e' una buona simmetria collegano stati iniziale e finale scambiati con valori di impulso e componente dello spin rovesciati (v. qui sotto)!

6.9.4 Applicazione del time reversal in fisica delle particelle

- 1) In assenza di numeri quantici conservati, l'applicazione piu' interessante della simmetria (o violazione) di time reversal in fisica delle particelle viene dal *teorema di reciprocita'* e *principio del bilancio dettagliato*, che si puo' comprendere nel seguente modo:

Teorema di reciprocita'

Se la matrice S e' invariante per time reversal, si puo' dimostrare che vale la relazione fra ampiezze di transizione, in una reazione a 2 corpi,;

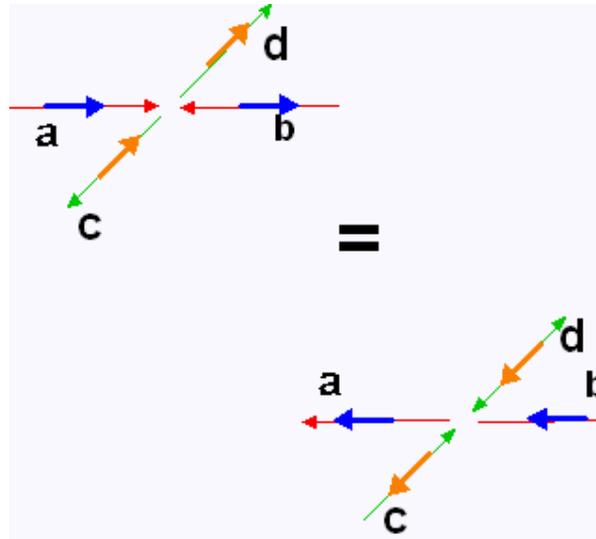
$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

$$\langle \mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f | S | \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i \rangle = \frac{\langle -\mathbf{p}_i, -\mathbf{s}_i | S | -\mathbf{p}_f, -\mathbf{s}_f \rangle}{T | \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i \rangle} \frac{1}{T \langle \mathbf{p}_f, \mathbf{s}_f |}$$

dove i simboli indicano collettivamente gli impulsi e gli spin iniziali e finali. Si noti che, come visto prima, l'operatore di time reversal:

- inverte impulsi e spin
- scambia stato iniziale e stato finale

Per una reazione a 2 corpi la cosa si puo' visualizzare p.es. nel seguente modo:



Teorema del bilancio dettagliato

Facendo le opportune medie sugli spin iniziali e finali, e tenendo conto dei rispettivi fattori di spazio delle fasi, segue la relazione fondamentale fra sezioni d'urto differenziali:

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega} = \left(\frac{p_f}{p_i} \right)^2 \frac{(2s_3 + 1)(2s_4 + 1)}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)}$$

- 2) Un' interazione e' invariante per TR se H non contiene coefficienti complessi e se contiene solo operatori invarianti per TR (2 condizioni indipendenti). Esempi ovvii di operatori non TR-invarianti sono:

$$\sigma \cdot \mathbf{p}, \sigma \cdot \mathbf{r}, \sigma \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$$

Quindi p.es. la polarizzazione trasversale, che e' appunto il valore medio di $\sigma \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$, non e' invariante per TR. Attenzione pero' a non estrapolare questa conclusione: nel caso delle interazioni forti, sono sempre presenti le interazioni nello stato finale, che modificano il risultato dell'interazione primaria. Questo spiega perche' in effetti si osservino polarizzazioni trasversali considerevoli nella maggior parte dei processi forti. Viceversa, in un decadimento come $K \rightarrow \pi + \mu + \nu$ che procede tramite l'interazione debole, non c'è interazione nello stato finale, e si

puo' cercare una polarizzazione trasversale del μ (valor medio dell'operatore $\sigma_{\mu} \cdot (\mathbf{p}_{\pi} \times \mathbf{p}_{\mu})$, non TR-invariante) come segnale di violazione di T

- 3) L'invarianza delle interazioni per time reversal proibisce l'esistenza di momenti di dipolo elettrico a livello elementare (p.es., per leptoni e quark). Infatti, se un tale momento di dipolo esistesse, esso interagirebbe con un campo elettrico esterno tramite l'hamiltoniano:

$$H_{dip} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$$

dovendo essere \mathbf{d} allineato con $\boldsymbol{\sigma}$ (v. discussione a proposito della parita'). Ora, H_{dip} viola appunto il time reversal

Si puo' osservare come l'esistenza di dipoli elettrici elementari sia quindi doppiamente proibita, sia dalla parita' sia dal time reversal: poiche' tutte e due queste simmetrie sono in realta' violate nelle interazioni deboli, non si puo' escludere che i dipoli elettrici elementari in effetti esistano. C'e' una notevole attivita' sperimentale tesa a mettere in luce la presenza di dipoli elementari, soprattutto per il neutrone

6.10 Teorema CPT e conseguenze

Qualunque interazione che rispetti i principi generali della *microcausalita'* (per cui gli effetti dell'interazioni si sentono nel futuro, ma non nel passato), e della *relazione spin-statistica* (per cui le particelle a spin semiintero seguono la statistica di Fermi e quelle a spin intero quella di Bose) e' invariante rispetto all'operazione combinata CPT. Questo vuole anche dire che se una delle simmetrie e' violata, almeno un'altra deve esserlo. Questo risultato, che si dimostra, anche se non molto facilmente, in teoria dei campi, da un lato pone un vincolo rigido alla forma di qualsiasi interazione; dall'altro ha anche alcune altre conseguenze molto importanti: si puo' infatti far vedere che dalla sua validita' seguono la eguaglianza rigorosa di masse a riposo e vite medie per ogni coppia particella/antiparticella.

6.11 Altre leggi di conservazione

Oltre a quelle "spazio-temporali" e alla coniugazione di carica, ci sono altre simmetrie delle interazioni fondamentali le cui associate leggi di conservazione hanno rilevanza: si tratta della conservazione della *carica elettrica*, del *numero barionico*, dei *3 numeri leptonici* (elettronico, muonico, tauonico), e del *tipo di quark*. (flavor: quindi isospin, stranezza, charm, beauty, top)

Non tutte queste leggi di conservazione sono sullo stesso piano: se consideriamo carica elettrica e numero barionico, entrambi assolutamente conservati per quel che ne sappiamo, osserviamo che, mentre la prima è sorgente di un campo (appunto, il campo elettromagnetico), non c'è evidenza di un qualche campo associato al secondo, così come ai 3 numeri leptonici. Per questi ultimi, fra l'altro, c'è una evidenza sempre più convincente che le rispettive leggi di conservazione non siano assolutamente rispettate, ma vengano violate, almeno nel fenomeno delle oscillazioni dei neutrini. Per quanto riguarda la conservazione del flavor, essa è rispettata dalle interazioni forti ed elettromagnetiche, mentre è violata dalle interazioni deboli.

Riassunto principali leggi di conservazione

Quantita' conservata	Interazione		
	forte	e.m.	debole
4-impulso	OK	OK	OK
Carica	OK	OK	OK
Mom.ang, moto CM	OK	OK	OK
Numero barionico	OK	OK	OK
N numeri leptonici(3)	OK	OK	OK
Parita'	OK	OK	KO
Parita' di carica	OK	OK	KO
(Time reversal)	OK	OK	KO
CP	OK	OK	KO
(CPT)	OK	OK	OK
Flavor	OK	OK	KO

NB Time reversal e CPT sono proprietà di invarianza alle quali non corrispondono leggi di conservazione, perché i corrispondenti operatori non sono unitari

6.4 Simmetrie e gruppi: nomenclatura

A causa del diverso apparato formale usato in meccanica quantistica per la descrizione degli stati di un sistema (spazio vettoriale lineare (Hilbert) vs. spazio delle fasi in meccanica classica), risulta alquanto vantaggioso utilizzare le tecniche della teoria dei gruppi, soprattutto delle loro rappresentazioni a mezzo di matrici, per descrivere le proprietà di simmetria dei sistemi fisici.

1. Un gruppo G è un insieme di elementi $\{A\}$, per i quali sia definita un'operazione $*$ ("moltiplicazione" in senso astratto), tali che:

(i) Il prodotto di 2 elementi qualsiasi è ancora un elemento
 $A, B \in G \rightarrow A * B \in G$

(ii) Esiste un elemento particolare e ("unita") tale che
 $\forall A \in G \quad e * A = A * e = A$

(iii) Per ogni elemento A di G esiste un altro elemento A^{-1} ("inverso"), in G , tale che

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = e$$

Esempio 1

Insieme: Traslazioni lungo una retta

Operazione: combinazione di traslazioni collineari

Allora:

$$T(a) * T(b) = T(a+b) \in G$$

$$T^{-1}(a) = T(-a) \in G$$

$$e = T(0)$$

Controesempio

Insieme: Traslazioni lungo un segmento $[-c, c]$

Operazione: come sopra

Allora:

$$T(a) * T(b) = T(a+b) \notin G \text{ se } |a+b| > c$$

Esempio 2

Insieme: Rotazioni attorno ad un asse fisso

Operazione: Combinazione di rotazioni coassiali

2. Un gruppo si dice *abeliano* se due qualsiasi operazioni commutano; *non abeliano* in caso contrario

Esempio 3:

Il gruppo delle rotazioni attorno ad un asse fisso è abeliano

$$R(\alpha) * R(\beta) = R(\beta) * R(\alpha)$$

Controesempio

Il gruppo delle rotazioni nello spazio attorno a un punto fisso è non abeliano

3. Un gruppo si dice *finito* o *infinito* a seconda del numero dei suoi elementi

4. Un gruppo, finito o infinito, si dice *discreto* se l'insieme dei suoi elementi può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi; si dice *continuo* se invece può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei numeri reali. Gli elementi di un gruppo continuo dipendono da uno o più parametri (reali), il cui numero è l'*ordine* del gruppo. Possiamo scrivere simbolicamente:

$$G = \{g : g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)\} \text{ gruppo continuo di ordine } N$$

Esempio:

Una rotazione generica dipende in modo continuo da 3 angoli; scegliendoli come gli angoli di Eulero si scrive simbolicamente:

$$R = R(\alpha, \beta, \gamma)$$

Gruppi di Lie

In fisica delle particelle ci sono molti diversi esempi di gruppi, che hanno notevole importanza per la classificazione degli stati, l'esistenza di leggi di conservazione e regole di selezione, e soprattutto in quanto rappresentativi di *simmetrie fondamentali* dei sistemi fisici. Fra questi, rivestono particolare interesse i *gruppi di Lie*, che sono gruppi continui particolari d'ordine finito. Un gruppo di Lie è un gruppo continuo in cui, nella legge di composizione generica:

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma(\alpha, \beta))$$

il *vettore dei parametri* γ per l'operazione prodotto è una funzione analitica dei vettori α e β delle operazioni fattori. La richiesta di analiticità (Lie) consente di ricondurre le proprietà di tutti gli elementi del gruppo a quelle degli elementi infinitamente vicini all'elemento identità. Nelle applicazioni fisiche, i gruppi di Lie sono invariabilmente dei gruppi di *trasformazioni di coordinate*, intendendo il termine coordinata nel senso più vasto a includere, oltre alle normali coordinate spazio-temporali di un sistema fisico, anche le sue coordinate interne (struttura di Lorentz degli operatori di campo, coordinate interne come le varie 'cariche' elettrica, barionica, etc). Consideriamo la trasformazione di coordinate

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

e conveniamo di identificare con $a=0$ la trasformazione identica:

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N; \mathbf{0}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Nell'ipotesi di analiticit , le $f_i(\alpha)$ sono sviluppabili in serie di potenze di α p.es. nell'intorno di $\alpha = \mathbf{0}$, quindi:

$$dx_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j$$

Ora, una qualunque funzione $F(\mathbf{x})$ delle coordinate cambiera', in seguito alla trasformazione considerata, della quantita':

$$F \rightarrow F + dF$$

$$dF = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r d\alpha_j \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F$$

$$F + dF = F \left[1 + \sum_{j=1}^r d\alpha_j \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right]$$

Consideriamo la quantita' (operatore)

$$X_j = i \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

che, come si vede, e' indipendente dalla natura della grandezza F , e nella cui definizione il fattore i e' convenzionale: essa si chiama il j -esimo *generatore* (oppure *operatore infinitesimo*) della trasformazione. Per un gruppo di Lie il numero dei generatori (operatori infinitesimi) e' evidentemente uguale all'ordine del gruppo. Le operazioni finite (non infinitesime) si ottengono esponenziando i generatori, il che corrisponde a iterare le operazioni infinitesime:

$$X_j = i \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$\rightarrow F + dF = \left[1 - i \sum_{j=1}^r X_j d\alpha_j \right] F$$

$$\rightarrow F + \Delta F = e^{-i\mathbf{X}\cdot\mathbf{a}} F \equiv U(\mathbf{a}) F$$

L'operatore finito U e' unitario quando gli \mathbf{X} sono hermitiani.

L'insieme dei generatori costituisce quella che si chiama *l'algebra di Lie del gruppo* (ossia, una struttura algebrica legata a quella del gruppo).

Un risultato importantissimo sui gruppi di Lie e' che il commutatore di 2 generatori qualsiasi e' sempre una combinazione lineare di tutti i generatori del gruppo:

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_{\nu=1}^r c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu$$

dove le quantita' (costanti complesse) $c_{\lambda\mu}^\nu$ sono le *costanti di struttura* (una specie di DNA) del gruppo.

Il (max. numero di generatori che commutano fra loro) e' il *rango* del gruppo.

Se si possono costruire funzioni dei generatori che commutano con tutti gli elementi del gruppo, queste si chiamano *operatori di Casimir* del gruppo; si puo' dimostrare che il loro numero e' uguale al rango del gruppo, e che ognuno e' un multiplo dell'operatore identita' (lemma di Schur)

6.5 Simmetrie e gruppi: rappresentazioni

Una rappresentazione (lineare) di un gruppo e' un insieme di matrici $n \times n$, in corrispondenza con gli elementi del gruppo, che godono delle stesse proprieta' del gruppo: chiusura rispetto alla moltiplicazione (fra matrici), rispettando la corrispondenza elemento/matrice; esistenza di un inverso per ogni elemento; esistenza di un elemento unita'. Per un dato gruppo ci possono essere diverse rappresentazioni (anche in numero infinito), ognuna con una diversa dimensione n .

Nota

Si possono considerare le rappresentazioni di un gruppo costituito da matrici: si tratta di insiemi di matrici diverse da quelle che costituiscono il gruppo. D'altra parte, il gruppo originale e' di fatto una rappresentazione di se stesso!

La chiave per comprendere l'utilita' dei metodi della teoria dei gruppi nello studio delle simmetrie di un sistema quantistico sta proprio nel concetto di rappresentazione: le matrici della rappresentazione possono, come al solito, essere pensate come operatori lineari che agiscono entro qualche spazio vettoriale (reale o complesso). Ora, lo spazio degli stati di un sistema quantistico e' proprio uno spazio vettoriale, quindi se si possono trovare rappresentazioni unitarie di un dato gruppo di simmetria nello spazio degli stati, le operazioni di simmetria descritte dal gruppo sono in corrispondenza con operatori unitari nello spazio degli stati. La proprieta' di unitarieta' viene dalla richiesta, per un sistema quantistico, che le operazioni di simmetria lascino

invarianti norme e prodotti scalari fra gli stati. Data la relazione vista prima fra le operazioni finite e i generatori, si vede subito che quando la rappresentazione è unitaria i generatori sono hermitiani, e quindi corrispondono a osservabili (grandezze fisiche) del sistema. Per vedere concretamente in che cosa questo si traduce, consideriamo un sistema fisico descritto dall'hamiltoniano H , e supponiamo che S sia un gruppo di simmetria di H : allora, per ogni operatore unitario U_S che faccia parte di una rappresentazione di S si avrà per definizione:

$$H' = U_S^{-1} H U_S = H \rightarrow [H, U_S] = 0$$

Ora, gli autostati di H soddisferanno:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \rightarrow H U_S |\psi\rangle = U_S H |\psi\rangle = E U_S |\psi\rangle$$

quindi $U_S|\psi\rangle$ è un autostato di H : quindi il livello E è degenere (ossia, ad esso appartengono diversi stati indipendenti). La degenerazione del livello dipende da S ed H . Se la degenerazione è n , si dice che gli stati del sistema con energia E costituiscono un *multipletto* di ordine n . Poiché si può sempre scrivere

$$U_S |\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^n U_S^{ij} |\psi_j\rangle, \quad j=1, \dots, n$$

allora possiamo identificare la matrice U_S^{ij} con una rappresentazione (di ordine n) del gruppo di simmetria S . Se ora consideriamo l'insieme degli operatori di Casimir del gruppo S , risulta evidente che, commutando con tutti i generatori del gruppo di simmetria del sistema, commutano anche con l'hamiltoniano: quindi sono altrettante costanti del moto.

Una rappresentazione a dimensione n in genere può essere scomposta in rappresentazioni a dimensione più piccola: in questo caso la rappresentazione si dice *riducibile*. Se questo non è possibile, la rappresentazione è detta *irriducibile*. Ogni rappresentazione riducibile può essere scomposta nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili. La ricerca delle rappresentazioni unitarie irriducibili di un dato gruppo di trasformazioni di simmetria costituisce evidentemente il nocciolo dell'applicazione di quel gruppo alla fisica.

Definizione di due rappresentazioni irriducibili importanti:

Rappresentazione *fondamentale*:

quella con $\dim = \text{dimensione minima} > 1$

Rappresentazione *regolare* (o *aggiunta*):

quella con $dim = n$. dei parametri

Riassumendo, vale il seguente risultato:

Se S e' un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema fisico descritto dall'hamiltoniano H , gli autostati del sistema si raggruppano in multipletti, ciascuno dei quali costituisce la base di una rappresentazione irriducibile di S

6.6 Esempio: gruppo delle rotazioni

Il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ e' un gruppo di Lie a 3 parametri (perche' per definire la rotazione ci vogliono 3 angoli: si possono visualizzare come gli angoli di Eulero - v. moto del corpo rigido, oppure dicendo che 2 servono a indicare la direzione dell'asse di rotazione, e 1 l'angolo di cui si ruota attorno all'asse). In generale, l'operazione di simmetria sulle coordinate cartesiane e' definita da:

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$$

$$R \text{ matrice ortogonale} \rightarrow RR^T = I$$

$$\rightarrow \det(RR^T) = 1 \rightarrow \det(R) = \det(R^T) = \pm 1$$

Il gruppo $SO(3)$ e' quindi definibile come il gruppo delle matrici reali ortogonali 3×3 per le quali $\det = +1$ (escluse quindi le riflessioni degli assi). Sviluppando la matrice generica nell'intorno di I si ha, al prim'ordine:

$$\begin{cases} R \rightarrow I + \delta R \\ R^T \rightarrow (I + \delta R)^T \end{cases} \rightarrow (I + \delta R)(I + \delta R)^T = I \rightarrow \delta R = -\delta R^T$$

Quindi la matrice generica e' antisimmetrica; poiche' dipende da 3 parametri reali si potra' scrivere in tutta generalita' come:

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} dx_1 = -\varepsilon_2 x_3 + \varepsilon_3 x_2 \\ dx_2 = -\varepsilon_3 x_1 + \varepsilon_1 x_3 \\ dx_3 = -\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 x_1 \end{cases}$$

Identificando gli ε_i con gli incrementi infinitesimi $d\alpha_i$, abbiamo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} = -x_3, \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} = x_2$$

.....

.....

da cui otteniamo i generatori:

$$\begin{cases} X_1 = i \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ X_2 = i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ X_3 = i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{cases}$$

Operazione finita:

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = e^{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{X}}$$

$SO(3)$ ha quindi 3 generatori, che si identificano immediatamente con le componenti cartesiane del momento angolare del sistema. Le relazioni di commutazione dell'algebra di Lie di $SO(3)$ sono quindi quelle del momento angolare:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k = c_{ij}^k J_k$$

con il che abbiamo anche identificato le costanti di struttura. Nessuno dei generatori commuta con gli altri 2, quindi il rango del gruppo $SO(3)$ e' 1; c'e' quindi un solo operatore di Casimir, che ora si identifica immediatamente con il quadrato del momento angolare $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$

La ricerca delle rapp. unitarie irr. di $SO(3)$ porta a identificarle in base al valore dell'operatore di Casimir; come e' noto dalla teoria del momento angolare, le dimensioni delle rapp. irr. sono $1, 2, 3, 4, \dots$, e ognuna corrisponde a un valore di $(2j+1)$, con j della serie $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

Un breve accenno a come si arriva a questo risultato:
Si definiscono gli operatori a scaletta

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$$

Quindi:

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2$$

Dalle relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned}[J_+, J_-] &= 2J_3 \\ [J_\pm, J_3] &= \mp J_\pm\end{aligned}$$

Poiche' \mathbf{J}^2 e J_3 commutano, possiamo considerare gli autostati comuni ai due e i rispettivi autovalori:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 |\lambda, m\rangle &= \lambda |\lambda, m\rangle \\ J_3 |\lambda, m\rangle &= m |\lambda, m\rangle\end{aligned}$$

Ora consideriamo l'azione degli operatori a scaletta sugli autostati di \mathbf{J}^2 e J_3 :

$$\begin{aligned}J_\pm |\lambda, m\rangle &= \mp [J_\pm, J_3] |\lambda, m\rangle = \mp J_\pm J_3 |\lambda, m\rangle \pm J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ &= \mp J_\pm m |\lambda, m\rangle \pm J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ &\rightarrow J_\pm |\lambda, m\rangle \pm m J_\pm |\lambda, m\rangle = J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ &\rightarrow (m \pm 1) J_\pm |\lambda, m\rangle = J_3 J_\pm |\lambda, m\rangle \\ &\rightarrow J_\pm |\lambda, m\rangle \text{ e' autostato di } J_3 \text{ con autovalore } m \pm 1\end{aligned}$$

Allora deve essere

$$J_\pm |\lambda, m\rangle = C_\pm(\lambda, m) |\lambda, m \pm 1\rangle$$

Poiche' $\mathbf{J}^2 - J_3^2 = J_1^2 + J_2^2 \geq 0$, allora $\lambda - m^2 \geq 0$, quindi i possibili valori di m sono limitati per ogni dato λ .

Sia j il max. valore di m :

$$\begin{aligned}J_+ |\lambda, j\rangle &= 0 = J_- J_+ |\lambda, j\rangle \\ &\rightarrow (\mathbf{J}^2 - J_3^2 - J_3) |\lambda, j\rangle = (\lambda - j^2 - j) |\lambda, j\rangle = 0 \\ &\rightarrow \lambda = j(j+1)\end{aligned}$$

Sia j' il min. valore di m : ripetendo il ragionamento

$$\rightarrow \lambda = j'(j'-1)$$

Quindi

$$j(j+1) = j'(j'-1)$$

$$\rightarrow j' = -j$$

visto che l'altra soluzione $j'=j+1$ e' in contraddizione con l'ipotesi che $j=m_{max}$. Dunque $j-j'=2j$ deve essere un numero intero, visto che J_+, J_- incrementano o decrementano i valori di m fra $-j$ e $+j$ di una unita' per volta: quindi j deve essere intero o semi-intero

Gli operatori di Casimir corrispondenti hanno l'espressione $j(j+1)I$. Ogni rapp. irr. definisce cosi' un multipletto di molteplicita' $2j+1$, in cui i diversi stati sono identificati dal valore m di una delle componenti di j . Quindi l'insieme delle infinite rappresentazioni unitarie del gruppo delle rotazioni in 3D corrisponde all'insieme dei possibili operatori momento angolare per un dato sistema fisico: per ogni rappresentazione c'e' un insieme di 3 matrici, che, nello spazio degli stati, corrisponde agli operatori componenti cartesiane del momento angolare del sistema. Se il momento angolare puo' essere scomposto nella somma vettoriale di due o piu' contributi (es. tipico, mom. orbitale e spin), la rappresentazione e' riducibile, e le matrici rappresentative si scompongono nella *somma diretta* di matrici corrispondenti a rapp. irriducibili. Per esempio, un sistema in cui il momento angolare totale risulti dal contributo orbitale $l=1$ e da quello di spin $s=1/2$ potra' trovarsi in uno stato appartenente alla rappresentazione prodotto

$$\underline{3} \otimes \underline{2}$$

$=2*1+1$ $=2*1/2+1$

Questa rappresentazione e' riducibile, e si scompone nella somma diretta di 2 rapp. irriducibili

$$\underline{3} \otimes \underline{2} = \underline{2} \oplus \underline{4}$$

$=2*3/2+1$

Questo e' vero per ogni gruppo di Lie. Le regole per la scomposizione dipendono da come e' fatta l'algebra di Lie del gruppo (ossia, dalle costanti di struttura).

Altri esempi di gruppi di Lie saranno discussi in connessione con i concetti di isospin, simmetria unitaria etc.