Nota sugli stati barionici dell'ottetto a spin ½

Tralasciando la parte di colore, che e', come e' noto, completamente antisimmetrica, la funzione d'onda di un barione risulta caratterizzata da una completa simmetria per scambio di 2 quark qualsiasi. Lo stato di un barione generico a spin ½ si specifica fissandone il contenuto in quark, la funzione d'onda orbitale e la 3ª componente dello spin. Ora, i dati indicano che la parte orbitale e' uno stato *S*, completamente simmetrico per scambio di due quark qualsiasi; resta da definire la parte di spin*flavor. Quindi ci chiediamo quale sia lo stato di spin*flavor che corrisponde, p.es., a un protone (contenuto in quark *uud*) a spin in su ($s_z=+1/2$).

La condizione di simmetria per la funzione d'onda totale, unita all'ipotesi di onda *S* per il momento angolare orbitale, si traduce nel dover avere stati di spin*flavor complessivamente simmetrici: poiche' per 3 spin ½ in uno stato di spin totale ½ la funzione d'onda di spin e' necessariamente a simmetria mista, cosi' dovra' essere anche la parte di flavor.

a) Fissato lo spin totale a *1/2* , ci sono come visto a lezione 2 + 2 + 2 funzioni d'onda di spin, che hanno la caratteristica di essere antisimmetriche rispettivamente per scambio 1-2, per scambio 2-3 o per scambio 1-3; le indichiamo cosi':

$$\chi_{A12}^{(j)},\ \mathrm{j=1,2}$$
$$\chi_{A23}^{(j)},\ \mathrm{j=1,2}$$
$$\chi_{A13}^{(j)},\ \mathrm{j=1,2}$$

Una per ogni coppia, diciamo la prima, corrisponde al valore di $s_z=+1/2$ fissato. Quindi il protone potra' essere negli stati di spin

$$\chi = \begin{cases} \chi_{A12}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow \\ \chi_{A23}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ \chi_{A13}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \end{cases}$$

b) Ci sono come visto a lezione 8 + 8 + 8 funzioni d'onda di flavor, che hanno la caratteristica di essere antisimmetriche rispettivamente per scambio 1-2, per scambio 2-3 o per scambio 1-3, che possiamo indicare cosi'

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{A12}^{(i)},\ \ \text{i=1,..,8}\\
&\varphi_{A23}^{(i)},\ \ \text{i=1,..,8}\\
&\varphi_{A13}^{(i)},\ \ \text{i=1,..,8}
\end{aligned}
$$

Fissato il contenuto in quark a essere *uud*, una per ogni ottetto corrisponde a questo contenuto, diciamo la seconda. Quindi il nostro protone potra' stare negli stati di flavor:

$$
\varphi = \begin{cases}
\varphi_{A12}^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u \\[2ex]
\varphi_{A23}^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u(ud - du) \\[2ex]
\varphi_{A13}^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(uud - duu)
\end{cases}
$$

La funzione d'onda di spin*flavor potra' allora contenere tutti i termini:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{A12}^{(2)}\chi_{A12}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow \\
\varphi_{A23}^{(2)}\chi_{A23}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}u(ud - du)\frac{1}{\sqrt{2}}\uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\
\varphi_{A13}^{(2)}\chi_{A13}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(uud - duu)\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)
\end{aligned}
$$

Poiche' la funzione d'onda cercata deve essere simmetrica rispetto allo scambio di due quark *qualsiasi*, dobbiamo sommare tutti i termini.

[Se questo non risulta convincente, si consideri la simmetria della somma dei 3 termini: rispetto ad un dato scambio, es. 1-2, il I termine e' complessivamente simmetrico, come desiderato, mentre gli altri due non hanno, individualmente, simmetria definita. Pero' la somma del II e del III termine e' equivalente al I (v. testo: i 3 gruppi di funzioni d'onda non sono indipendenti), quindi il totale *e'* simmetrico. Infatti, si puo' verificare algebricamente che la cosa funziona proprio cosi' nell'esempio citato; alternativamente, basta riflettere un momento sull'equivalenza del prodotto di 2 permutazioni con la terza, ovvero

$$P(12) = P(23)P(13)$$

Comunque, verifica algebrica:

$$\varphi_{A23}^{(2)}\chi_{A23}^{(1)} + \varphi_{A13}^{(2)}\chi_{A13}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}u(ud - du)\frac{1}{\sqrt{2}}\uparrow(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) + \frac{1}{\sqrt{2}}(uud - duu)\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$$
$$= \frac{1}{2}(uud - udu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) + \frac{1}{2}(uud - duu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \underset{\text{scambio 1-2}}{\rightarrow}$$
$$\frac{1}{2}(uud - duu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + \frac{1}{2}(uud - udu)(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) = \varphi_{A23}^{(2)}\chi_{A23}^{(1)} + \varphi_{A13}^{(2)}\chi_{A13}^{(1)}$$

Se consideriamo invece lo scambio 2-3, abbiamo ancora un termine simmetrico – il secondo – e gli altri due individualmente a simmetria non definita, ma la cui somma e' simmetrica; cosi' anche per lo scambio 1-3].

Facendo dunque la somma:

$$\left|p, +1/2\right\rangle = N\begin{pmatrix} 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow + 2u\uparrow u\uparrow d\downarrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow \\ -u\downarrow d\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow \end{pmatrix}$$

N e' il fattore di normalizzazione: essendoci 6 termini di modulo 1 e 3 termini di modulo 2 si ha:

$$N = \frac{1}{\sqrt{6\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6+12}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$