Unita' naturali

Le leggi fisiche sono espresse come relazioni matematiche fra grandezze. Per poter stabilire relazioni di qualche tipo fra grandezze fisiche, occorre fissare per esse un sistema di unita' di misura. Nel fissare un sistema di unita' di misura occorre decidere quali grandezze si considerano fondamentali e quali derivate, il che richiede che siano anche fissate le dimensioni delle diverse grandezze fisiche: mentre questo punto puo' sembrare ovvio, in realta' esso mette in gioco alcune sottigliezze, derivanti dall'esistenza di costanti universali.

1. Geometria e cinematica

   a) Si consideri innanzi tutto il semplice caso di misure e relazioni metriche fra enti geometrici. Evidentemente, le sole grandezze fisiche in gioco sono lunghezze, aree, volumi, angoli etc: sembra del tutto naturale stabilire una sola dimensione fondamentale, quella della lunghezza, in termini della quale si possono definire tutte le altre. Ci si aspetta d'altra parte che sia totalmente arbitraria la scelta dell'unita' di misura delle lunghezze, e che, fissata questa, tutte le altre unita' di misura seguano. In alternativa, si potrebbe stabilire che la dimensione fondamentale sia quella della superficie, o quella del volume, e che le altre grandezze geometriche siano da essa derivate

   b) Se ora consideriamo unicamente misure e relazioni cinematiche, sappiamo naturalmente di avere bisogno in generale di 2 unita' di misura, una per ciascuna delle due dimensioni fisiche in gioco: *lunghezza* e *tempo*. Anche qui, siamo del tutto liberi di sceglierle secondo il nostro gusto e la nostra convenienza, e una volta scelte saranno fissate le unita' di tutte le grandezze derivate (area, velocita', accelerazione,...). E' anche del tutto evidente che l'aver scelto lunghezza e tempo come dimensioni fondamentali e' arbitrario e completamente equivalente ad altre scelte possibili, come *tempo e velocita'*, *lunghezza e velocita'*, *velocita' e accelerazione*, etc.: se per esempio si fissano come dimensioni fondamentali tempo e velocita', la dimensione della lunghezza sara' quella di una velocita' per un tempo, quella dell'accelerazione di una velocita' diviso un tempo, e cosi' via.

Se pero' ci viene detto che esiste, per una delle grandezze cinematiche, una costante universale – *c*, ossia la velocita' della luce nel vuoto, allora fra le tante scelte possibili ce ne e' una particolarmente interessante: quella cioe' in cui la

grandezza in questione ha valore numerico uguale a 1. In questo sistema di *unita' naturali* l'unita' di lunghezza viene fissata dall'unita' di tempo, o viceversa: siamo quindi vincolati ad usare, per lunghezza e tempo, unita' di misura fra loro legate, in modo che il loro rapporto sia uguale alla velocita' della luce nel vuoto.
Quel che e' piu' interessante, questa scelta porta di fatto ad eliminare la necessita' di *una* delle due dimensioni fisiche fondamentali, essendo possibile stabilire tutte le possibili relazioni fra grandezze fisiche in termini di una sola dimensione, p.es. il tempo. Si puo' notare che spesso questo e' quello che facciamo colloquialmente: quando diciamo che la citta' A dista dalla citta' B "2 ore di treno", sottintendiamo l'aver fissato uguale a 1 una velocita' universale (quella del treno), e usiamo una sola dimensione fisica, quella appunto dei tempi, che e' sufficiente a misurare anche le lunghezze. A volte invece, sempre nel linguaggio colloquiale, facciamo l'operazione inversa, e diciamo p.es. "Ieri in treno ho ascoltato musica nel walkman per 60 km", il che mostra che i tempi si possono misurare con le lunghezze, una volta fissata la velocita'.
Si osservi come questa possibilita' sia in realta' strettamente legata all'esistenza di una velocita' caratteristica, e *indipendente dal sistema di riferimento*: altrimenti osservatori in diversi riferimenti stabilirebbero relazioni diverse fra lunghezze e tempi! In effetti nell'esempio del passeggero che ascolta il walkman in treno, il passeggero stesso durante l'ascolto percorre una distanza nulla rispetto al treno… Si tratta quindi di uno sviluppo genuinamente relativistico.

In conclusione, il numero di dimensioni fisiche indipendenti, in un sistema di unita' di misura, non e' fissato da qualche principio, ma, oltre che dalla convenienza, dal numero di costanti universali presenti: se non ci sono costanti universali, come nella meccanica classica, il numero di dimensioni necessarie e sufficienti e' di 3, come nel sistema cgs o MKS. Ogni costante universale successivamente introdotta elimina la necessita' di una delle dimensioni indipendenti, per cui p.es. l'esistenza di c elimina la necessita' di dimensioni indipendenti per lunghezze e tempi, e l'esistenza di h quella di dimensioni indipendenti per energie e frequenze. Naturalmente, l'eliminazione della necessita' non e' la necessita' dell'eliminazione: malgrado sia possibile farlo, a volte non conviene usare sistemi di unita' con un numero ridotto di dimensioni. Per fare misure pratiche conviene di solito avere molte dimensioni indipendenti, perche' questo si adatta meglio alla varieta' di metodi sperimentali effettivamente in uso; per fare calcoli teorici, viceversa, conviene di solito ridurre al minimo il numero di dimensioni indipendenti, ottenendo cosi' la massima semplificazione delle formule.

2. Unita' naturali

Nel caso della fisica delle particelle, e' possibile e comodo, per le ragioni gia' viste, usare innanzi tutto un sistema di unita' di misura basato su *Azione, Energia, Velocita'*, invece che su *Lunghezza, Massa, Tempo*. Ricordando le dimensioni di azione, energia e velocita':

$$[azione] = ml^2t^{-1}$$
$$[energia] = ml^2t^{-2}$$
$$[velocita'] = lt^{-1}$$

possiamo esprimere la dimensione di ogni grandezza G nel sistema Gaussiano e in quello delle unita' naturali:

$$[G] = m^a l^b t^c\Big|_{Gaussiano} = Energia^{\alpha} azione^{\beta} velocita'^{\gamma}\Big|_{U.N.}$$
$$\alpha = a - b - c$$
$$\beta = b + c$$
$$\gamma = b - 2a$$

In questo modo, usando le leggi fisiche note, le dimensioni di tutte le grandezze derivate vengono espresse come potenze delle dimensioni delle 3 nuove grandezze fondamentali. Ecco alcuni esempi:

$$[massa] = [E]\left[v^{-2}\right]$$
$$[tempo] = [A]\left[E^{-1}\right]$$
$$[lunghezza] = [A]\left[E^{-1}\right][v]$$
$$[impulso] = [E]\left[v^{-1}\right]$$

Se ora scegliamo delle unita' di misura, per le grandezze fondamentali, in cui $\hbar = c = 1$. abbiamo come risultato che scompare anche la necessita' di considerare 3 dimensioni fondamentali diverse (v. esempio del treno citato prima) , e che le dimensioni di tutte le grandezze sono espresse in termini di potenze di un'unica dimensione fisica, l'energia. Si noti come la scelta di usare quella dell'energia come unica dimensione fondamentale non sia, come al solito, obbligatoria: si potrebbe usare la lunghezza, o il tempo, o… . La scelta dell'energia e' dettata dalla praticita': nella fisica della particelle l'energia e' la grandezza fisica piu' direttamente misurabile (e misurata) negli esperimenti, molto piu' di quanto lo siano lunghezze e tempi, le cui scale a livello subnucleare spesso sono irraggiungibili con misure dirette.

Vediamo dunque che questa possibile scelta, che riduce ad uno il numero di dimensioni fisiche fondamentali, e' legata all'esistenza di due costanti universali *dimensionate*, ***c*** ed ***h***, che si presentano come equivalenti a meri fattori di conversione (fra lunghezze e tempi, ed energie e frequenze). Si riporta di seguito una tabella abbastanza estesa di dimensioni di varie grandezze fisiche in unita' naturali, insieme ai relativi fattori di conversione

3. Dinamica

Quando si prendono in considerazione le diverse interazioni fondamentali (gravitazione, elettromagnetismo, interazioni forti, interazioni deboli) entrano in gioco le dimensioni delle cariche, sorgenti delle forze, o meglio dei campi fisici che partecipano alle interazioni.
Come e' noto, il Sistema Internazionale assegna una dimensione a se' alla carica elettrica (o meglio, alla corrente elettrica), considerata come una nuova grandezza fondamentale; il principio di equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale, che e' all'origine un dato sperimentale, rende superflua la definizione di una grandezza fondamentale separata per la massa gravitazionale. Questa scelta pero' non e' assolutamente necessaria: p.es., nel sistema gaussiano la carica elettrica e' considerata una grandezza derivata e non fondamentale, attraverso la legge fisica (di Coulomb):

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, F = ma$$

scritta *senza* costanti moltiplicative. Si trova cosi' che le diverse grandezze elettriche hanno dimensioni bizzarre, ma che non danno particolare fastidio:

$$\begin{aligned}
&[carica] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-1} \\
&[campo\ magnetico] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-2} \\
&[resistenza] = l^{-1} t
\end{aligned}$$

etc.
E' anche possibile utilizzare la legge newtoniana della gravitazione per eliminare la dimensione fisica della grandezza massa: specificamente, usando come prima:

$$F = \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

si trova per la massa $[massa] = l^3 t^{-2}$. Si noti che questa procedura presuppone, tuttavia, il principio di equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale.

Quindi nella fisica pre-relativistica e pre-quantistica e' possibile, usando la legge di Newton e quella di Coulomb, ridurre a due il numero di dimensioni fondamentali, p.es. lunghezza e tempo.
Non sono, per altro, in uso comune sistemi di unita' di misura nei quali siano prese in considerazione grandezze fondamentali specifiche (analoghe alla carica elettrica) legate alle interazioni deboli o forti: questo mostra come la scelta di considerare invece fondamentale la carica elettrica non sia obbligatoria, ma solo dettata da opportunita', legata al numero sterminato di usi pratici del campo elettromagnetico nel suo aspetto macroscopico.

4. Costanti universali adimensionali

Le costanti universali dimensionate come *c* ed *h* sono dunque da considerarsi come fattori di conversione fra dimensioni diverse, e la loro esistenza porta alla possibilita' di ridurre il numero di dimensioni fisiche indipendenti. In fisica delle particelle si studiano le interazioni (forze) fondamentali della natura, ognuna delle quali ha certamente struttura e proprieta' diverse dalle altre. Come e' probabilmente noto, e' possibile definire, per tutte le interazioni fondamentali (elettro-debole, gravitazionale e forte) una costante adimensionale, costruita, nel sistema di unita' gaussiano come

$$\alpha_i = \frac{g_i^2}{\hbar c}$$

Essa puo' essere interpretata come il rapporto fra il quadrato del valore elementare di "carica" considerata (unita' di carica elettrica/debole, di massa, di carica di colore, rispettivamente) e l'unita' naturale del prodotto *Energia x Distanza.* Nel formalismo della teoria quantistica dei campi la costante prende il significato di misura dell'accoppiamento fra il campo legato all'interazione e le cariche che interagiscono tramite il campo stesso. Essendo prive di dimensione, queste costanti hanno lo stesso valore in tutti i sistemi di unita' di misura, e si presentano quindi come autentiche costanti universali (rimane tuttavia una possibile piccola ambiguita', legata alla possibilita' di usare o no costanti razionalizzate, ossia con o senza fattori 4π: come si ricordera', questo fattore puo' essere inserito appunto nella costante, oppure nella legge della forza – o nella lagrangiana, se si preferisce). L'esistenza di queste costanti adimensionali fissa quindi la dimensione fisica delle cariche in ogni sistema di unita' di misura; nel sistema di unita' naturali, in cui la quantita' $\hbar c$ e' priva di dimensioni
[Infatti:

$$[\hbar c] = [E][T][L][T^{-1}] = [E][L] \underbrace{\Rightarrow}_{unita'\,naturali} [E][E^{-1}] \Rightarrow \text{adimensionale}\ ]$$

anche le cariche (elettriche, deboli e forti) sono tutte prive di dimensioni.
Le espressioni esplicite per le costanti di accoppiamento adimensionali sono date di seguito.

Interazione elettromagnetica, Interazione debole

Nella visione moderna, codificata nel Modello Standard, l'interazione debole e quella elettromagnetica sono 'teorie efficaci': approssimazioni di bassa energia di una teoria unificata, la cosiddetta *interazione elettrodebole*. In questa teoria compaiono in realta' diverse costanti fenomenologiche (un conteggio incompleto porta a 18 o 19…), fra le quali anche quelle che determinano le diverse intensita' con cui si manifesta l'interazione stessa, nelle sue svariate modalita'. Risulterebbe quindi fuorviante citare 'la' costante di accoppiamento per questa interazione; a titolo di indicazione, si riportano le costanti di accoppiamento per le interazioni efficaci di bassa energia, elettromagnetica e corrente-corrente (carica):

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$\alpha_w = \frac{G_F m_p^2}{\hbar c} \approx 1.02\ 10^{-5}, \text{con } m_p \text{ uguale alla massa del protone}$$

Va ricordato che il valore di queste 'costanti' in realta' varia al variare dell'energia di interazione.

Interazione gravitazionale

$$\alpha_g = \frac{G_N m_p^2}{\hbar c} \approx 10^{-39} \quad \text{per } m_p \text{ uguale alla massa del protone}$$

Si noti che la 'costante di accoppiamento', pur avendo valori assai diversi a seconda della scala di massa considerata, risulta comunque piu' piccola di tutte le altre per molti ordini di grandezza

Interazione forte

$$\alpha = \frac{g^2}{\hbar c} \approx 0.1 \text{ ad energie } \gg m_p$$

Questa 'costante di accoppiamento' in realta' dipende notevolmente dalla scala di energia di interazione.

5. Nota sulle dimensioni della costante di Fermi in unita' naturali

Per l'interazione corrente-corrente, che, come accennato sopra, e' un' approssimazione della interazione elettrodebole valida per energie basse, osserviamo prima di tutto che, dalla forma delle rispettive densita' di lagrangiana:

- Per una campo bosonico

$$[\varphi] = [E]$$

- Per un campo fermionico

$$[\psi] = \left[E^{3/2}\right]$$

La densita' di hamiltoniano di Fermi e' dato da

$$H_F \propto G_F \, j^\mu J_\mu$$

in cui le correnti sono espressioni bilineari nei campi fermionici coinvolti. Allora:

$$[G_F] = [E]\left[E^{-3}\right]\left[E^{-3/2}\right]\left[E^{-3/2}\right]\left[E^{-3/2}\right]\left[E^{-3/2}\right] = \left[E^{-2}\right]$$

(Tabella da I.Schnell, Universita' di Brea)

Conversion Table for natural and MKSA Units

Natural units defined by: $\hbar = c = 1$ (and $4\pi\varepsilon_0 = 1$). Remaining unit is choosen to be Energy (eV).

Quantity	Symbol	natural units	MKSA
Length	ℓ	1/eV	$1.9732705 \cdot 10^{-7}$ m $\approx 0.2\ \mu$m
Mass	m	1 eV	$1.7826627 \cdot 10^{-36}$ kg
Time	t	1/eV	$6.5821220 \cdot 10^{-16}$ s $\approx .66$ fs
Frequency	ν	1 eV	$1.5192669 \cdot 10^{15}$ Hz
Speed	v	1	$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
Momentum	p	1 eV	$5.3442883 \cdot 10^{-28}$ kg·m/s
Force	F	1 eV^2	$8.1194003 \cdot 10^{-13}$ N
Power	P	1 eV^2	0.24341350 mW
Energy	E	1 eV	$1.6021773 \cdot 10^{-19}$ J
Charge	q	1	$1.8755468 \cdot 10^{-18}$ C
Charge density	ρ	1 eV^3	244.10013 C/m^3
Current	I	1 eV	2.8494561 mA
Current density	J	1 eV^3	$7.3179379 \cdot 10^{10}$ A/m^2
Electric field	E	1 eV^2	432.90844 V/mm
Potential	Φ	1 eV	85.424546 mV
Polarization	P	1 eV^2	$4.8167560 \cdot 10^{-5}$ C/m^2
Conductivity	σ	1 eV	$1.6904124 \cdot 10^{5}$ S/m
Resistance	R	1	29.979246 Ω
Capacitance	C	1/eV	$2.1955596 \cdot 10^{-17}$ F
Magnetic flux	ϕ	1	$5.6227478 \cdot 10^{-17}$ Wb
Magnetic induction	B	1 eV^2	1.4440271 mT
Magnetization	M	1 eV^2	$1.4440271 \cdot 10^{4}$ A/m
Inductance	L	1/eV	$1.9732705 \cdot 10^{-14}$ H
some constants:			
Planck's quantum	$\hbar$	1	$1.05457266 \cdot 10^{-34}$ J·s
$h = 2\pi\hbar$	h	2π	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$ J·s
Charge of electron	e	$8.5424546 \cdot 10^{-2}$	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C
Bohr radius, $\hbar^2/me^2$	a_0	$2.6817268 \cdot 10^{-4}$/eV	$5.29177249 \cdot 10^{-11}$ m
Energy 1 electron Volt	eV	1 eV	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$ J
Rydberg energy, $e^2/2a_0$	E_{Ryd}	13.605698 eV	$2.1798741 \cdot 10^{-18}$ J
Hartree energy, e^2/a_0	E_{h}	27.211396 eV	$4.3597482 \cdot 10^{-18}$ J
Speed of light	c	1	$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
Permeability of vacuum	μ_0	4π	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Permittivity of vacuum	ε_0	$1/4\pi$	$8.854187817 \cdot 10^{-12}$ F/m
Bohr magneton	μ_B	$8.3585815 \cdot 10^{-8}$/eV	$9.2740154 \cdot 10^{-24}$ J/T
Mass of electron	m_e	510.99906 keV	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Mass of proton	m_p	938.27234 MeV	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$ kg
Mass of neutron	m_n	939.56563 MeV	$1.6749286 \cdot 10^{-27}$ kg
Gravitation constant	G	$6.70711 \cdot 10^{-57}$/eV^2	$6.67259 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2