

Esempi di uso della cinematica

La cinematica relativistica si usa in tutte le fasi di un esperimento: qui si vuol dare qualche esempio di come le leggi di conservazione permettano di trarre informazioni dai dati sperimentali.

1. Fit cinematico

Nello studio di una reazione, normalmente il 4-vettore dello stato iniziale *e'* noto con alta precisione, di solito nel sistema del LAB. Poiche' in reazioni ad alta energia uno stesso stato iniziale conduce a molti diversi stati finali, costituiti da un diverso numero di particelle di tipo differente, in pratica lo stato finale di un dato evento registrato *e'* invece di solito conosciuto meno bene: per esempio, vengono misurati gli impulsi di tutte o parte delle particelle cariche (si intende qui le 3 componenti cartesiane, o altre quantita' equivalenti), mentre non si conoscono le masse corrispondenti (tranne nei casi in cui si disponga di un sistema di identificazione); oppure i neutri (fotoni) sono misurati solo in una parte limitata dell'accettazione geometrica; o ancora, l'evento contiene vertici secondari di decadimento, che non si associano facilmente nella ricostruzione. La varieta' di situazioni sperimentali che possono presentarsi *e'* molto grande, ma in ogni caso l'uso delle leggi di conservazione di solito consente di convalidare con un certo grado di fiducia una particolare *ipotesi cinematica*: con questo si intende che *e'* possibile selezionare gli eventi raccolti assegnando a ciascuno di essi l'ipotesi piu' verosimile sulla reazione che *e'* effettivamente avvenuta, scelta in base a considerazioni statistiche sulla compatibilita' dell'ipotesi stessa con le leggi di conservazione di energia e impulso. Conviene accennare brevemente alla procedura di ricostruzione cinematica di un evento, che, con molte varianti, *e'* tipica del software off-line di tutti gli esperimenti. La procedura si svolge in alcuni passi distinti, che nel caso piu' semplice possono essere descritti nel modo seguente:

a. Pattern recognition

Questa fase consiste nell'utilizzo delle informazioni provenienti dai rivelatori per la determinazione dei punti spaziali in cui la traiettoria di ogni traccia ha intersecato linee e piani che hanno posizione conosciuta nel rivelatore,

b. Ricostruzione geometrica

Lo scopo primario di questa fase *e'* l'associazione dei punti spaziali a formare tracce (l'immagine delle traiettorie delle particelle cariche o neutre). In questo modo si determina innanzi tutto il numero di tracce (cariche *e/o* neutre) presenti nell'evento, poi la posizione del vertice primario e di eventuali vertici secondari, caratteristici del

decadimento debole di particelle con stranezza, charm, etc., e infine anche l'impulso o l'energia associata a ogni traccia, p.es. attraverso la misura del raggio di curvatura di una traccia carica in un campo magnetico o la ricostruzione dello sciame elettromagnetico generato da un fotone in un calorimetro. In una forma o nell'altra, occorre infine determinare la natura di ogni particella che ha lasciato una traccia nel rivelatore (o almeno, di un certo numero di esse). In taluni casi esistono nell'esperimento parti del rivelatore che sono in grado di dare informazioni specifiche su questo punto, come contatori Cerenkov, misuratori di ionizzazione etc; tuttavia, nella maggior parte dei casi l'identificazione di ogni particella osservata nel rivelatore non e' direttamente possibile.

c. Fit cinematico

Come si e' detto, non tutte le tracce o i vertici dell'evento risultano sempre ricostruibili in questo modo, e per molte delle tracce l'identificazione in massa risulta ambigua; a volte e' possibile acquisire informazione su cio' che non si e' misurato verificando la conservazione del 4-impulso a ogni vertice, effettuando quindi quel che si chiama un fit cinematico. Fare un fit cinematico consiste nel valutare la probabilita' statistica di un'ipotesi cinematica, in cui si assegnano appunto valori ipotetici alle quantita' cinematiche non note, e si costruisce un χ^2 per ogni ipotesi. Confrontando poi i χ^2 di ipotesi diverse si puo' scegliere quella con la massima probabilita' .

Un esempio e' probabilmente piu' chiaro di ogni descrizione astratta:

Si consideri lo studio della reazione ad energia elevata

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$$

quel che abbiamo a disposizione e' solo un campione di 50000 eventi a 4 tracce cariche, in ognuno dei quali 3 delle tracce sono misurate essere positive e 1 negativa; l'esperimento non e' sensibile alla presenza di neutri. Questo campione quindi conterra' eventi del tipo cercato, insieme ad altri tipi di eventi che mimano quelli cercati, come per esempio:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

$$p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

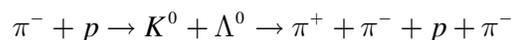
$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0$$

etc

Si pone dunque il problema di separare (filtrare) gli eventi cercati dal campione indifferenziato: per questo scopo si puo' testare per ogni evento del campione l'ipotesi cinematica per lo stato finale cercato, richiedendo la conservazione del 4-impulso

totale: ossia, verificando la compatibilita' di impulsi e direzioni misurate con la conservazione del 4-impulso totale, nell'ipotesi che le tracce abbiano le masse assegnate. Si procede per questo ad assegnare la massa m_1 alla traccia 1, la massa m_2 alla traccia 2 etc, e si costruisce il χ^2 dell'ipotesi facendo la differenza fra le 3 componenti dell'impulso totale misurato nello stato finale e le 3 componenti dell'impulso del fascio incidente, insieme a quella fra l'energia totale osservata nello stato finale (che dipende dall'ipotesi di massa) e quella del fascio incidente; nella costruzione del χ^2 , come e' ovvio, la conoscenza degli errori di misura e' essenziale.

Si osservi come la possibilita' di eseguire un fit richieda che il numero totale delle equazioni di vincolo (N_c) sia maggiore del numero di quantita' sconosciute (N_u): nell'esempio che stiamo considerando, non ci sono quantita' sconosciute nella misura ($N_u=0$), per gli eventi che cerchiamo, quindi $N_c-N_u=4-0=4$; diciamo che il fit e' a 4 vincoli, o $4C$. Per tutti gli eventi nei quali l'ipotesi di massa e' sbagliata, o per i quali e' stata perduta qualche particella nello stato finale, come un π^0 nell'esempio citato, la conservazione del 4-impulso risultera' non ben soddisfatta, e il χ^2 elevato. Sempre considerando l'esempio citato, se eseguiamo un fit all'ipotesi cinematica in cui lo stato finale contiene un π^0 non rivelato, il numero di quantita' sconosciute diventa $N_u=3$ (appunto, le 3 componenti dell'impulso del π^0), e il fit e' a $1C$. La capacita' discriminatoria di un fit a $4C$ e di uno a $1C$ e' estremamente diversa: la probabilita' di fluttuazioni statistiche nel χ^2 e' molto piu' alta nel secondo caso! Nel caso di reazioni contenenti decadimenti in cascata, il numero di vincoli puo' anche essere superiore a 4: p.es., nella reazione



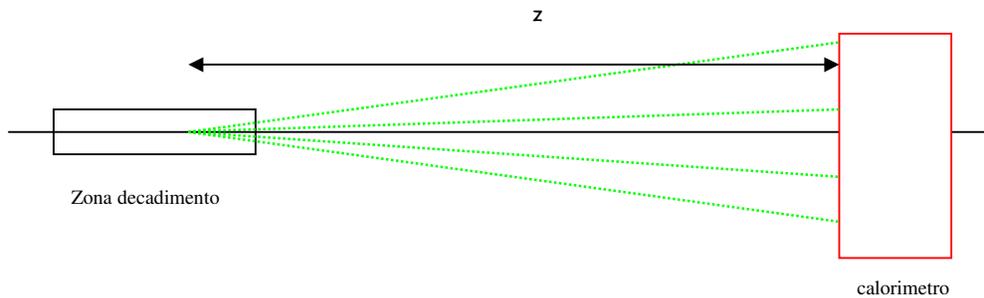
ci sono, supponendo di misurare tutti gli impulsi dei carichi nello stato finale, 12 quantita' misurate, mentre non si conoscono gli impulsi del K^0 e della Λ^0 (6 quantita' sconosciute): con 12 equazioni di vincolo (conservazione del 4-impulso totale al vertice primario, conservazione del 4-impulso a ognuno dei 2 vertici secondari) il fit e' a $6C$.

Come si ricordera', la distribuzione della probabilita' di χ^2 e' uniforme, fra 0 e 1, per un campione contenente errori puramente statistici: quindi, la presenza nel campione di famiglie di eventi per i quali l'ipotesi cinematica fallisce si rivela come alterazione della distribuzione uniforme della probabilita' di χ^2 . In pratica, eventi con χ^2 elevato indicano una cattiva ricostruzione cinematica e vengono scartati. Le quantita' cinematiche ottenute dal fit per gli eventi rimasti dopo la selezione risultano inoltre meglio conosciute di quelle originali

2. Un esempio di uso della cinematica

Si consideri la seguente situazione sperimentale: un fascio contiene mesoni K^0 di alta energia (tipicamente 100 GeV) che decadono in coppie di π^0 , risultando infine uno stato finale con 4 fotoni. Per ottenere la misura della vita media, si vuole misurare la

coordinata del vertice di decadimento del K^0 dalla misura di posizione trasversale ed energia dei 4 fotoni, realizzata con un calorimetro elettromagnetico molto distante dalla zona di decadimento.



Supponendo di avere selezionato eventi con 4 fotoni misurati, osserviamo che l'impulso del K^0 è diretto lungo l'asse z : quindi la somma delle componenti trasversali degli impulsi dei fotoni deve dare zero. Allora, imponendo che la massa invariante dei 4 fotoni sia quella del K^0 :

$$M^2(4\gamma) = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i \right)^2 = m_{K^0}^2$$

Scomponendo gli impulsi nelle componenti trasversale e longitudinale si ha:

$$m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i^\perp + \sum_{i=1}^4 p_i^\parallel \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^4 p_i^\perp = 0 \rightarrow m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i^\parallel \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \cos \theta_i \right)^2$$

Dei fotoni sono note le energie=moduli degli impulsi, e i punti di impatto sul calorimetro; inoltre, si può assumere che gli angoli dei fotoni siano piccoli, e che tutti i K^0 decadano sull'asse del fascio (ossia, che il diametro del fascio sia piccolo). Allora:

$$\cos \theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$$

$$\theta_i \simeq \frac{r_i}{z}$$

r_i distanza radiale asse/punto di impatto sul calorimetro

z distanza longitudinale vertice di decadimento/calorimetro

Quindi:

$$m_{K^0}^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \left(1 - \frac{\theta_i^2}{2} \right) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i - \sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2$$

Sviluppando il quadrato del binomio:

$$\left(\sum_{i=1}^4 p_i - \sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} m_{K^0}^2 &= \left(\sum_{i=1}^4 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \approx 2 \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^4 p_i \frac{\theta_i^2}{2} \right) \\ &= E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i \theta_i^2 \approx E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i \frac{r_i^2}{z^2} = \frac{E_{tot}}{z^2} \sum_{i=1}^4 p_i r_i^2 \end{aligned}$$

da cui infine:

$$z = \frac{1}{m_{K^0}} \sqrt{E_{tot} \sum_{i=1}^4 p_i r_i^2}$$

Evidentemente, la presenza di eventi a 4 fotoni non provenienti dal decadimento del K^0 in $2 \pi^0$ puo' alterare la misura di z , si osservi pero' che e' possibile verificare che la massa invariante di due coppie di fotoni sia quella del π^0 :

$$\begin{aligned} m_{ij}^2 &= (E_i + E_j, \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)^2 \\ &= E_i^2 + E_j^2 + 2E_i E_j - |\mathbf{p}_i|^2 - |\mathbf{p}_j|^2 - 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \\ &= 2|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| (1 - \cos \theta_{ij}) \approx 2|\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \frac{\theta_{ij}^2}{2} = |\mathbf{p}_i| |\mathbf{p}_j| \theta_{ij}^2 = m_{\pi^0}^2 \end{aligned}$$

La richiesta che i 4 fotoni si possano accoppiare a due a due in modo che la massa invariante di ogni coppia sia la massa del π^0 elimina il fondo residuo e convalida la misura di z .

3. Il "picco jacobiano" e la scoperta del W

I bosoni intermedi delle interazioni deboli furono scoperti sperimentalmente al CERN studiando collisioni protone-antiprotone

$$p + \bar{p} \rightarrow W^+ + X$$

realizzate tramite un collider nel quale le due particelle si muovono su orbite circolari con impulso uguale e opposto: il LAB coincide quindi con il CM.

A livello di costituenti, la reazione elementare e' del tipo

$$q + \bar{q} \rightarrow W^+ \rightarrow X$$

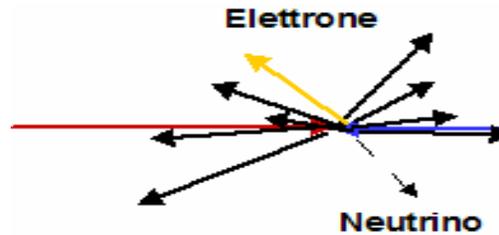
in cui il quark e l'antiquark portano una frazione sconosciuta dell'impulso del protone e dell'antiprotone. In linea generale, ci si attende che l'impulso trasversale sia piccolo, mentre si sa poco, a priori, dell'impulso longitudinale. Il W viene rivelato tramite il decadimento

$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$$

nel quale si osserva un elettrone isolato con energia minima circa equivalente a meta' della massa del W :

$$E \geq \frac{M}{2}$$

La rivelazione di elettroni isolati di energia elevata e' una forte indicazione della produzione di W , tuttavia i fondi sono tali da non garantire che essa sia un segnale sufficiente. Il neutrino non puo' ovviamente essere rivelato direttamente, tuttavia e' possibile associare al segnale di elettroni ad E elevata quello di *energia mancante*: in sostanza, se nella collisione e' stato prodotto un W , come minimo nell'evento ricostruito deve mancare l'energia del neutrino, anch'essa uguale a $M/2$ (la massa dell'elettrone puo' essere trascurata a questi regimi di energia). Questa idea incontra difficolta' ad essere applicata, perche' e' alquanto probabile che non siano rivelate altre componenti dell'evento che sono prodotte a piccoli angoli, dove il rivelatore non ha accettazione; per questo motivo, si puo' cercare uno sbilanciamento di *energia trasversa*, invece che totale. In effetti, al di sopra di un angolo minimo il rivelatore ha ottima accettazione ed efficienza di rivelazione: poiche' la somma degli impulsi trasversali (presi con il loro segno, a seconda dell'angolo azimutale) deve dare come risultato zero (v. conservazione dell'impulso), allora un evento con un neutrino di alta energia dovra', nella maggior parte dei casi (ossia quando il neutrino non esce ad angolo piccolissimo), mostrare una energia trasversa mancante:



In sostanza si tratta di calcolare, per ogni evento ricostruito, la quantità:

$$E_{\text{missing}} \sin \theta = 0 - E_T^{\text{vista}} = \sum_{i=1, N_{\text{tracce}}} E_i \sin \theta_i$$

in cui gli angoli vanno intesi con il loro segno. Gli eventi interessanti sono quelli in cui $E_{\text{missing}} \neq 0$. se nel campione di questi ultimi ci sono eventi in cui c'è anche presenza di un elettrone isolato con energia elevata, il segnale di W diventa molto significativo (due "signature" indipendenti...). Si noti come, malgrado la precedente analisi sia stata fatta - senza dirlo - come se il W fosse prodotto fermo, un eventuale impulso longitudinale del W nella produzione non cambia il risultato (le componenti trasversali sono invarianti per trasformazioni di Lorentz...); la produzione di W con elevato impulso trasversale cambierebbe invece le cose, ma è fortemente soppressa in ogni meccanismo dinamico che si possa ipotizzare ragionevolmente.

La cinematica aiuta anche a dare una prima stima della massa del W ; in effetti, si consideri la distribuzione angolare di decadimento nel sistema di quiete del W :

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta^*} = \text{funzione di } \cos \theta^* \text{ a variazione non troppo elevata}$$

come è ragionevole attendersi. Possiamo trasformare la distribuzione in $\cos \theta^*$ in una in p_T :

$$\frac{d\sigma}{dp_T} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} \frac{d\cos\theta^*}{dp_T}$$

$$p_T = p^* \sin\theta^* = \frac{M_W}{2} \sin\theta^*$$

$$\rightarrow \sin\theta^* = \frac{2p_T}{M_W}$$

$$\rightarrow \cos\theta^* = \sqrt{1 - \sin^2\theta^*} = \sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{d\cos\theta^*}{dp_T} = \frac{\frac{4p_T}{M_W}}{2\sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}} = \frac{2p_T}{M_W \sqrt{1 - \left(\frac{2p_T}{M_W}\right)^2}}$$

Quindi la distribuzione in p_T e' dominata dal fattore "jacobiano", che e' fortemente piccato a $p_T = M_W/2$: la misura del picco di questa distribuzione fornisce quindi, in prima approssimazione, la massa del W . Tale misura e' tuttavia affetta dall'impulso trasversale del W (incognito, anche se, come detto sopra, presumibilmente piccolo)