

# Even More Perturbative QCD ...

Lorenzo Magnea  
Università di Torino  
I.N.F.N. Torino  
[magnea@to.infn.it](mailto:magnea@to.infn.it)

XI Seminario Nazionale di Fisica Teorica

## Abstract

Approfondiamo lo studio delle divergenze di massa in QCD perturbativa, concentrandoci sul processo di produzione di adroni in collisioni tra elettroni e positroni. Facciamo un conto esplicito e dettagliato a un loop, e ne traiamo utili lezioni valide a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni. Alcuni degli strumenti necessari per dimostrare i teoremi di fattorizzazione vengono introdotti, e si mostra come possono essere usati anche per risommare certe classi di contributi logaritmici a tutti gli ordini perturbativi.

Ubi maior ... :

G. Sterman: [An introduction to quantum field theory.](#)

P. Nason: <http://castore.mib.infn.it/~nason/misc/QCD...>

M.L. Mangano: <http://home.cern.ch/~mlm/talks/cern98...>

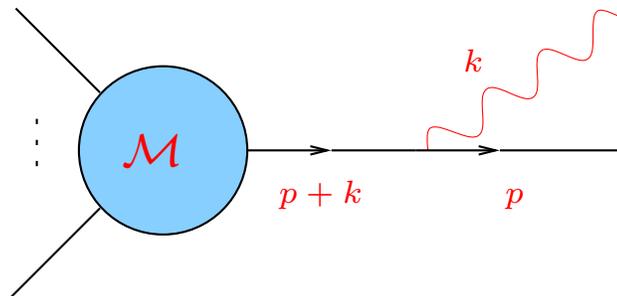
G. Sterman: [hep-ph/9606312.](#)

# Indice

- **Sulle divergenze di massa in QCD perturbativa**
  - Divergenze di massa, basse energie e lunghe distanze.
  - Cancellazioni nelle osservabili fisiche, teorema KLN.
  - Osservabili infrarosso-finite e fattorizzabili in PQCD.
- **Un esempio concreto:  $R_{e^+e^-}$** 
  - Definizioni, diagrammi tagliati, tree-level.
  - $\mathcal{O}(\alpha_s)$ : il conto.
  - Approssimazioni e osservazioni.
- **Altre quantità infrarosso finite**
  - Jet di Serman-Weinberg.
  - Event shapes.
- **Metodi per la generalizzazione a tutti gli ordini**
  - Singolarità dei diagrammi e superfici intrappolate.
  - Equazioni di Landau e rappresentazione di Coleman-Norton.
  - Power-counting infrarosso e finitezza di  $R_{e^+e^-}$ .
- **Fattorizzazione e risommazione**
  - Problemi a più scale e grandi logaritmi.
  - Dalla fattorizzazione alla risommazione.
  - Esempi: il fattore di forma; il thrust.

## Divergenze di massa: discussione qualitativa

- **Il fatto:** due tipi di divergenze in teoria dei campi associate alla presenza di particelle di massa nulla.
  - **Infrarosse** (IR). Emissione di particelle di quadrimpulso nullo ( $\lambda_{DB} \rightarrow \infty$ ); caratteristiche delle teorie di gauge; presenti anche se la materia è massiva.
  - **Collineari** (C). Emissione di particelle in direzione parallela all'emittente; presenti se tutte le particelle nel vertice di interazione hanno massa nulla.
- **Esempio:** un fermione a massa nulla emette un bosone di gauge nello stato finale.



$$\rightarrow -ig\bar{u}(p)\not{\epsilon}(k)t_a \frac{i(\not{p} + \not{k})}{(p+k)^2 + i\epsilon} \mathcal{M},$$

Singularità:  $2p \cdot k = 2p_0 k_0 (1 - \cos \theta_{pk}) = 0$ ,  
 $\rightarrow k_0 = 0$  (IR);  $\cos \theta_{pk} = 0$  (C).

**Nota:**  $p_0 = 0$  non causa problemi (le singularità sono sempre integrabili).

- **Origine delle singolarità di massa**
  - Nella teoria delle perturbazioni **covariante** ( $p^\mu$  conservato in **ogni** vertice; particelle intermedie generalmente **off-shell**): il fermione nello stato intermedio è **on-shell**, quindi può propagarsi indefinitamente.
  - Nella teoria delle perturbazioni **hamiltoniana** (tutte le particelle sono **on-shell**, ma l'energia **non** è generalmente conservata nei vertici di interazione): il vertice di emissione IR/C **conserva l'energia**, dunque può essere situato a distanza arbitraria dal processo d'urto primario.
  - Le **divergenze di massa** sono originate da processi fisici che possono avvenire a **grandi distanze**.
- **Terapie disponibili.**
  - **Il malanno è grave.** In presenza di divergenze di massa, la matrice **S** non è definita nello spazio di Fock della teoria.
  - **Osservazione.** Le divergenze di massa sono associate alla compresenza di **stati sperimentalmente indistinguibili**: tutti i rivelatori hanno una **risoluzione finita** sia in angolo che in energia.
  - **Teorema (KLN).** Le quantità in linea di principio **fisicamente misurabili** (probabilità di transizione, sezioni d'urto, **sommate** su tutti gli stati fisicamente indistinguibili) sono **finite**, le divergenze di massa **si cancellano**.

- **Il teorema KLN.**

Data una teoria descritta da una Hamiltoniana  $H$ , sia  $\mathcal{D}_\epsilon(E_0)$  l'insieme degli autostati dell'hamiltoniana aventi energie  $E_0 - \epsilon \leq E \leq E_0 + \epsilon$ , con  $\epsilon \neq 0$ . Sia  $P(i \rightarrow j)$  la probabilità di transizione per unità di volume e per unità di tempo dall'autostato  $i$  all'autostato  $j$ . Allora la quantità

$$P(E_0, \epsilon) \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{D}_\epsilon(E_0)} P(i \rightarrow j)$$

è finita nel limite di masse nulle a tutti gli ordini perturbativi.

- **Nota.** In una teoria di campo **asintoticamente libera** il limite  $m \rightarrow 0$  e il limite di alta energia formalmente **coincidono**. Le masse dipendono dalla scala e si ha  $m^2(\mu^2) \rightarrow 0$  per  $\mu^2 \rightarrow \infty$ .
- **La situazione in QCD perturbativa**
  - La fisica delle **lunghe distanze** ( $d \gtrsim 1\text{fm}$ ), ovvero delle **basse energie** ( $E \lesssim 1\text{GeV}$ ) non è perturbativamente calcolabile.
  - Il teorema KLN non è direttamente applicabile nei casi in cui è necessaria una somma su stati iniziali (non abbiamo controllo sulla struttura degli stati adronici iniziali).
  - Lavorando a livello **partonico**, **perturbativo** si individuano sezioni d'urto sufficientemente **inclusive**, per cui
    - \* la dipendenza dalle lunghe distanze è soppressa per effetto di cancellazioni (**IR-safe**);
    - \* la dipendenza dalle lunghe distanze può essere raccolta in fattori universali, dipendenti dallo stato iniziale ma non dal processo duro in esame (**fattorizzabili**).

## La strategia della QCD perturbativa

- Tutti i calcoli sono effettuati a livello partonico con un regolatore infrarosso (es.:  $\epsilon = 2 - d/2 < 0$ ), in presenza di almeno una scala dura  $Q^2$ . Si ottiene

$$\sigma_{\text{part}} = \sigma_{\text{part}} \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \left\{ \frac{m^2(\mu^2)}{\mu^2}, \epsilon \right\} \right) .$$

- Si costruiscono quantità **IR-safe**, aventi un limite finito quando il regolatore infrarosso viene rimosso ( $\epsilon \rightarrow 0, m^2(\mu^2) \rightarrow 0$ ).

$$\sigma_{\text{part}} = \sigma_{\text{part}} \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \{0, 0\} \right) + \mathcal{O} \left( \left\{ \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right)^p, \epsilon \right\} \right) .$$

- Queste quantità **partoniche**, **inclusive**, che ammettono uno sviluppo perturbativo in potenze di  $\alpha_s(Q^2) \ll 1$ , sono interpretate come stime delle corrispondenti quantità **adroniche**, valide modulo correzioni  $\mathcal{O}((\Lambda_{QCD}/Q)^p)$
- In presenza di adroni nello stato iniziale, si costruiscono quantità **fattorizzabili**, tali che

$$\sigma_{\text{part}} = f \left( \frac{m^2}{\mu_F^2} \right) * \hat{\sigma}_{\text{part}} \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{m^2}{\mu_F^2} \right)^p \right) .$$

- La fattorizzazione dimostrata **a livello partonico** viene trascritta in termini adronici. Le funzioni di distribuzione sono **misurate**, le sezioni d'urto  $\hat{\sigma}_{\text{part}}$  ricavate dal **calcolo perturbativo**.

## Un esempio esplicito: $R_{e^+e^-}$

Il prototipo della sezione d'urto IR-safe è la sezione d'urto totale di annichilazione  $e^+e^- \rightarrow$  adroni.

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{1}{2q^2} \sum_X \int d\Gamma_X \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}(k_1 + k_2 \rightarrow X)|^2 ,$$

normalizzata dividendo per la sezione d'urto di produzione di muoni

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

In  $d = 4 - 2\epsilon$ , all'ordine dominante in  $\alpha$ ,

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{1}{2q^2} L_{\mu\nu}(k_1, k_2) H^{\mu\nu}(q^2) ,$$

$$L^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{q^4} (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - k_1 \cdot k_2 g^{\mu\nu}) ,$$

$$H^{\mu\nu}(q^2) = e^2 \mu^{2\epsilon} q_f^2 \sum_X \langle 0 | J_\mu(0) | X \rangle \langle X | J_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^d \delta^d(q - p_X) .$$

Per trasversalità,  $q^\mu H_{\mu\nu} = q^\nu H_{\mu\nu} = 0$ ,

$$H^{\mu\nu}(q^2) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) H(q^2) ,$$

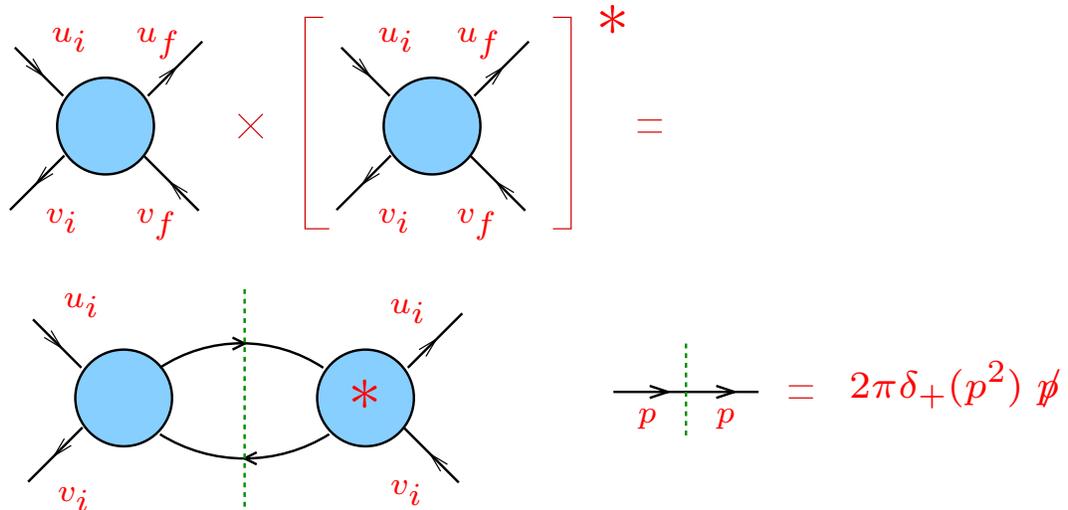
da cui segue facilmente

$$-g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}(q^2) = (3 - 2\epsilon) q^2 H(q^2) ,$$

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{2q^4} \frac{1 - \epsilon}{3 - 2\epsilon} (-g^{\mu\nu} H_{\mu\nu}(q^2)) .$$

## Interludio tecnico: diagrammi tagliati

Una utile rappresentazione per  $|\mathcal{M}|^2$  è quella dei **diagrammi tagliati**. Esempificando



A destra del taglio tutte le **i** nelle regole di Feynman e tutti gli impulsi cambiano segno.

Le regole si verificano facilmente usando l'identità

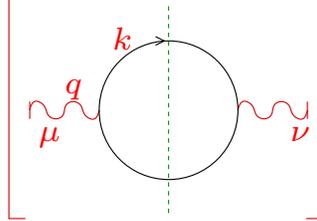
$$\begin{aligned} & (\bar{\omega}_1 [\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_i} \gamma_5 \cdots \sigma_{\mu\nu} \cdots \gamma_{\mu_n}] \omega_2)^* = \\ & \bar{\omega}_2 [\gamma_{\mu_n} \cdots \sigma_{\mu\nu} \cdots \gamma_{\mu_i} \gamma_5 \cdots \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_1}] \omega_1, \end{aligned}$$

e l'hermiticità dei generatori del gruppo di gauge  $[(t_a)_{ij}]^* = (t_a)_{ji}$ .

Si noti che

- le regole sono valide a impulsi finali fissati; l'eventuale integrale sull'impulso di ogni loop tagliato diventa l'integrale sullo spazio delle fasi;
- per particelle di spin  $\neq 0$  si pone sul taglio la somma sulle polarizzazioni;
- i segni dovuti ai loop tagliati fermionici sono corretti a tutti gli ordini.

## Esercizio: $R_{e^+e^-}$ a tree-level

$$\sigma_{\text{tot}}(q^2) = \frac{e^2 \mu^{2\epsilon}}{2q^4} \frac{1-\epsilon}{3-2\epsilon} (-g^{\mu\nu}) \left[ \text{Diagram} \right]$$


$$-H_{\mu}^{\mu} = e^2 \mu^{2\epsilon} q_f^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d-2}} \delta_+(k^2) \delta_+((k-q)^2) \text{Tr} (\not{k} \gamma_{\mu} (\not{k} - \not{q}) \gamma^{\mu}) .$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa  $(k - q)^2 = q^2 - 2\sqrt{q^2}k_0$ ; le due  $\delta_+$  possono essere usate per effettuare le integrazioni su  $k_0$  e su  $|\mathbf{k}|$ ; la traccia si riduce a  $4(1 - \epsilon)q^2$ .

Sommando su sapori e colori dei quarks prodotti si ottiene

$$-H_{\mu}^{\mu} = 2(1 - \epsilon) e^2 \mu^{2\epsilon} N_c \sum_f q_f^2 \left( \frac{q^2}{4} \right)^{1-\epsilon} \frac{\Omega_{2-2\epsilon}}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} .$$

L'angolo solido in  $d$  dimensioni è dato dalla classica formula

$$\Omega_d = \frac{2^d \pi^{d/2} \Gamma(d/2)}{\Gamma(d)} .$$

Allora, in  $d = 4 - 2\epsilon$ ,

$$-H_{\mu}^{\mu} = 2 \alpha \frac{\Gamma(2 - \epsilon)}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} q^2 \left( \frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\epsilon} N_c \sum_f q_f^2 ,$$

da cui, per  $\epsilon \rightarrow 0$ , il noto risultato

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} N_c \sum_f q_f^2 \quad \rightarrow \quad R_{e^+e^-}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 .$$

## Correzioni radiative

L'enumerazione dei grafici che contribuiscono alle correzioni radiative a un loop è semplice in termini di diagrammi tagliati.

$$[-H_{\mu}^{\mu}]^{(1)} = \text{diagramma 1} + \text{diagramma 2} + \text{c.t.}$$

Sommando sulle **posizioni dei tagli** si ottengono di volta in volta i diagrammi **reali** e quelli **virtuali**. Li esaminiamo separatamente.

### Emissione reale

Conviene separare il calcolo della **probabilità di transizione** da quello dello **spazio delle fasi a tre corpi**. Seguendo le regole dei diagrammi tagliati otteniamo

$$[-H_{\mu}^{\mu}]^{(1,R)} = \int \frac{d^d p d^d k}{(2\pi)^{2d-3}} \delta_+(p^2) \delta_+(k^2) \delta_+((p+k-q)^2) [-\mathcal{H}_{\mu}^{\mu}] .$$

La probabilità di transizione dipende da **un solo angolo polare**. Posto  $u \equiv \cos \theta_{pk}$  nel sistema del centro di massa si ha

$$\delta_+((p+k-q)^2) = \vartheta(p'_0) \delta\left(s - 2\sqrt{s}(\hat{p} + \hat{k}) + 2\hat{p}\hat{k}(1-u)\right) ,$$

dove  $\hat{p} = |\mathbf{p}|$ ,  $\hat{k} = |\mathbf{k}|$ . Le integrazioni sulle energie di  $p$  e di  $k$  possono essere effettuate usando le rispettive  $\delta_+$ . Tutte le integrazioni angolari sono banali tranne quella sulla variabile  $u$ .

Introducendo variabili adimensionali (le frazioni di energia del gluone e del quark)

$$z = \frac{2\hat{k}}{\sqrt{s}} \quad , \quad x = \frac{2\hat{p}}{\sqrt{s}} \quad ,$$

e definendo  $y = (1 - u)/2$ , si ottiene

$$\begin{aligned} [-H_\mu^\mu]^{(1,R)} &= \frac{1}{8} \frac{\Omega_{2-2\epsilon} \Omega_{1-2\epsilon}}{(2\pi)^{5-2\epsilon}} \left(\frac{s}{2}\right)^{1-2\epsilon} \int_0^1 dx x^{1-2\epsilon} \int_0^1 dz z^{1-2\epsilon} \\ &\times \int_0^1 dy [y(1-y)]^{-\epsilon} \frac{1}{1-yz} \delta\left(x - \frac{1-z}{1-yz}\right) [-\mathcal{H}_\mu^\mu] \end{aligned}$$

La probabilità di transizione è data dalle regole di Feynman.

$$\begin{aligned} -\mathcal{H}_\mu^\mu &= -2e^2 \mu^{2\epsilon} \sum_f q_f^2 g^2 \mu^{2\epsilon} \text{Tr}(t_a t^a) \left( \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\sigma \not{p} \gamma^\mu (-\not{p}' - \not{k}) \gamma^\sigma \not{p}']}{(2p \cdot k)(2p' \cdot k)} \right. \\ &\left. + \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\sigma \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu \not{p}']}{(2p \cdot k)^2} \right) \end{aligned}$$

e può essere semplificata usando  $\text{Tr}(t_a t^a) = N_c C_F$ , identità dell'algebra di Clifford quali

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu &= -2(1 - \epsilon) \not{p} \quad , \\ \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma^\mu &= 4p \cdot k - 2\epsilon \not{p} \not{k} \quad , \\ \gamma_\mu \not{p} \not{k} \not{q} \gamma^\mu &= -2\not{q} \not{k} \not{p} + 2\epsilon \not{p} \not{k} \not{q} \quad , \end{aligned}$$

e con le identificazioni  $p \cdot q = sx/2$ ,  $p \cdot k = sxyz/2$ ,  $k \cdot q = sz/2$ .

L'integrazione sulla frazione d'energia del quark,  $x$ , può essere effettuata usando la restante  $\delta$ . Le semplificazioni sono considerevoli e si ottiene

$$\begin{aligned} \left[ -H_{\mu}^{\mu} \right]^{(1,R)} &= 2N_c C_F \sum_f q_f^2 \alpha_s (1 - \epsilon) \frac{\Omega_{2-2\epsilon} \Omega_{1-2\epsilon}}{(2\pi)^{3-4\epsilon}} q^2 \left( \frac{2\mu^2}{q^2} \right)^{2\epsilon} \\ &\int_0^1 dz dy \left[ (1 - \epsilon)(1 - z)^{-2\epsilon} (1 - yz)^{-2-2\epsilon} z^{1-2\epsilon} (1 - y)^{1-\epsilon} \frac{1}{y^{1+\epsilon}} + \right. \\ &\left. (1 - z)^{1-2\epsilon} (1 - yz)^{-2-2\epsilon} z^{1-2\epsilon} [y(1 - y)]^{-\epsilon} \left( \frac{(1 - yz)^2}{yz^2(1 - y)} - \epsilon \right) \right]. \end{aligned}$$

Riconosciamo le singularità preannunciate.

- **Infrarosse:**  $z^{-1-2\epsilon}$ , determina un polo in  $\epsilon$  quando  $z$ , l'energia del gluone, tende a 0.
- **Collineari:**  $y^{-1-\epsilon}$  e  $(1-y)^{-1-\epsilon}$ , singolari quando  $y \rightarrow 0$  (gluone collineare al quark), e  $y \rightarrow 1$  (gluone collineare all'antiquark).

**Nota:** le singularità di massa sono regolate scegliendo  $\epsilon < 0$ .

Le integrazioni su  $y$  e  $z$  sono riconducibili a funzioni  $B$  di Euler (tipico di calcoli a un loop in problemi con una sola scala). Sviluppando intorno a  $\epsilon = 0$  otteniamo il **risultato finale** per l'emissione reale, con il **polo doppio infrarosso-collineare**,

$$\begin{aligned} \left[ -H_{\mu}^{\mu} \right]^{(1,R)} &= N_c C_F \alpha \sum_f q_f^2 \frac{\alpha_s}{\pi} q^2 \left( \frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{2\epsilon} \\ &\times \frac{1 - \epsilon}{\Gamma(2 - 2\epsilon)} \left[ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} - \pi^2 + \frac{19}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

# Contributo virtuale

I contributi **puramente virtuali** all'ampiezza di produzione sono dati a tutti gli ordini dal **fattore di forma** del quark.

$$\Gamma_\nu(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) = \text{diagramma}$$

Il calcolo viene fortemente semplificato tenendo conto di diverse considerazioni preliminari.

- Nel caso di quark a massa nulla, il fattore di forma è dato da una **singola funzione scalare** che moltiplica la struttura di Dirac dell'ampiezza ad albero.

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) &\equiv \langle p_1, p_2 | J_\mu(0) | 0 \rangle \\ &= -ieq_f \bar{u}(p_1) \gamma_\mu v(p_2) \Gamma\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right),\end{aligned}$$

dunque la probabilità di transizione è **proporzionale** al risultato **tree-level**, con un fattore pari a  $2 \text{Re}\Gamma$ .

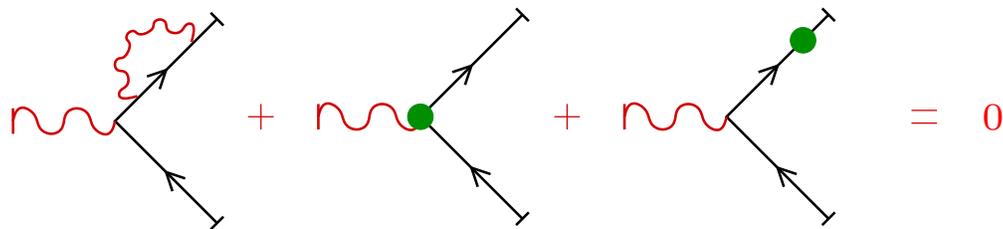
- Il fattore di forma è invariante sotto l'azione del gruppo di rinormalizzazione (ha **dimensione anomala nulla**) per effetto della conservazione della corrente elettromagnetica.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\epsilon, \alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s}\right) \Gamma\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s, \epsilon\right) = 0.$$

QCD non viola l'identità di Ward di QED,  $Z_1 = Z_\psi$ .

- I grafici **riducibili** (1PR) su ciascuna linea fermionica, inclusi i rispettivi controtermini, ricostruiscono il residuo  $R_\psi$  del propagatore del quark. Dato che ogni linea esterna va moltiplicata per  $R_\psi^{-1/2}$  secondo le formule di riduzione, occorre includere questi grafici su **una sola** delle due linee.
- Nel **gauge di Feynman** e in **regolarizzazione dimensionale** tutti i grafici 1PR con loop sulle linee fermioniche esterne sono **nulli** perché dati da integrali privi di scala ( $p_i^2 = 0$ ).
  - **Nota!** Ciò è falso nei gauge assiali ( $\exists n \cdot p_i$ ); inoltre dipende da una cancellazione di effetti IR e UV ...

A un loop queste osservazioni si riassumono nell'identità



Rimane **un solo grafico** da calcolare, la correzione di vertice

$$\Gamma_\nu^{(1)}(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) = \text{diagram of a vertex correction with a gluon loop on the upper fermion line}$$

che vale

$$\Gamma_\nu^{(1)} = -eq_f g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\bar{u}(p_1) \gamma_\sigma (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\nu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^\sigma v(p_2)}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2}.$$

I passi per il calcolo del diagramma sono standard. Riassumendo

- Conviene fare uso sistematicamente delle condizioni di **mass-shell** (eq. di Dirac),  $\bar{u}(p_1)\not{p}_1 = \not{p}_2 v(p_2) = 0$  e isolare gli integrali con diverse potenze di  $k$ .

$$\Gamma_\nu^{(1)} = -eq_f g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \bar{u}(p_1) \left[ 2q^2 \gamma_\nu I_0 + 2(\gamma_\nu \gamma_\alpha \not{p}_1 - \not{p}_2 \gamma_\alpha \gamma_\nu) I^\alpha - \gamma^\sigma \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\sigma I^{\alpha\beta} \right] v(p_2) .$$

- Gli integrali tensoriali

$$I_0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

$$I_\alpha = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2 (p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2} ,$$

possono essere calcolati con l'usuale parametrizzazione di Feynman.

– **Nota:** solo  $I_0$  può avere divergenze IR, e solo  $I_{\alpha\beta}$  può averne UV. Per  $I_\alpha$  restano possibili divergenze collineari ...

- Può essere utile anche effettuare una decomposizione *à la Passarino–Veltman*, che permette di ottenere direttamente il fattore di forma scalare  $\Gamma$ .

$$I^\alpha = p_1^\alpha I_1 + p_2^\alpha I_2 ,$$

$$I^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} I_3 + p_1^\alpha p_1^\beta I_4 + p_2^\alpha p_2^\beta I_5 + (p_1^\alpha p_2^\beta + p_1^\beta p_2^\alpha) I_6 .$$

- In termini degli integrali scalari  $I_1, \dots, I_6$  si ottiene

$$\Gamma^{(1)} = g^2 \mu^{2\epsilon} C_F \left[ 4(1 - \epsilon)^2 I_3 - 2q^2 (I_0 + I_2 - I_1 + (1 - \epsilon)I_6) \right].$$

- Il risultato finale per il **fattore di forma** è

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 - \epsilon)\Gamma(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \left[ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right].$$

Nel prenderne la **parte reale** occorre usare

$$(-q^2 + i\epsilon)^{-\epsilon} = (q^2)^{-\epsilon} e^{-i\pi\epsilon}.$$

**Nota!** Il segno di  $q^2$  è determinato dalle **regole di Cutkosky**. A causa del polo doppio il fattore  $\exp(-i\pi\epsilon)$  va sviluppato al **secondo ordine** e genera contributi numericamente importanti.

## Risultato

Riconosciamo che il contributo virtuale ha la stessa struttura di poli IR-C dell'emissione reale. Sommandoli **i poli si cancellano** e si può prendere il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , ottenendo

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2} N_c \sum_f q_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{3}{4} C_F + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right),$$

Ovvero, per  $SU(3)$ , laddove  $C_F = 4/3$ ,

$$R_{e^+e^-}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 \left( 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right).$$

## Approssimazione soffice

La cancellazione ora esibita è possibile perché nei limiti IR e C l'ampiezza con l'emissione di un gluone reale diventa proporzionale all'ampiezza priva del gluone, come per il diagramma virtuale. Questo si può verificare introducendo l'approssimazione soffice.

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} = gt_{ij}^a \bar{u}(p) \left[ \frac{\not{\epsilon}(k)(\not{p} + \not{k})\Gamma_\mu}{2p \cdot k} - \frac{\Gamma_\mu(\not{p}' + \not{k})\not{\epsilon}(k)}{2p' \cdot k} \right] v(p').$$

Quando il gluone è IR si può

- trascurare  $k$  al numeratore, e nella definizione di  $p'$ ;
- commutare  $\not{p}$  e  $\not{p}'$  in modo da usare l'equazione di Dirac,  $\not{p}'v(p') = \bar{u}(p)\not{p} = 0$ .

Il risultato è

$$\mathcal{A}_{ij}^{a\mu} \Big|_{\text{soft}} = gt_{ij}^a \left[ \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} - \frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} \right] \mathcal{A}_0^\mu,$$

dove  $\mathcal{A}_0^\mu = \bar{u}(p)\Gamma^\mu v(p')$  è l'ampiezza al livello Born (indipendentemente dalla forma esplicita del vertice  $\Gamma_\mu$ ).

## Osservazioni

- L'ampiezza soffice è **gauge-invariante** (si annulla se  $\varepsilon \propto k$ ).
- L'emissione di gluoni soffici ha caratteri **universali**. I gluoni di grande lunghezza d'onda non percepiscono le caratteristiche locali dell'emittente (spin, struttura interna), ma solo la **carica** di colore e la **direzione** del moto. Queste considerazioni si generalizzano **all'emissione multipla**.
- Considerazioni analoghe valgono per l'emissione di gluoni **da gluoni**.

## Sezione d'urto soffice

E' facile ritrovare la **parte singolare** della sezione d'urto di emissione reale. La **probabilità di transizione** si calcola sommando su colori e polarizzazioni (usando  $\sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu}$ , qui lecito).

$$|\mathcal{A}_{\text{soft}}|^2 = g^2 C_F |\mathcal{A}_0|^2 \frac{2p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Si passa alla **sezione d'urto** integrando sullo spazio delle fasi

$$\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} = g^2 C_F \sigma_{q\bar{q}} \int \frac{d^3k}{2|\mathbf{k}|(2\pi)^3} \frac{2p \cdot p'}{p \cdot k p' \cdot k}.$$

Nel sistema del centro di massa ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ) e nell'approssimazione soffice il quark e l'antiquark sono ancora *“back to back”*. Si ritrova allora la **struttura delle singolarità IR e C**.

$$\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} = \sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \int_{-1}^1 d \cos \theta_{pk} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \frac{2}{(1 - \cos \theta_{pk})(1 + \cos \theta_{pk})}.$$

## Il diagramma virtuale

L'approssimazione soffice può essere applicata anche ai **diagrammi virtuali**, con alcune attenzioni.

- Quando  $k_\mu \ll \sqrt{q^2}$ ,  $\forall \mu$ , in generale oltre a trascurare  $k$  nei numeratori si può anche trascurare  $k^2$  rispetto a  $p_i \cdot k$  nei denominatori (approssimazione **eikonale**).
  - **Nota**: approssimazione **non** uniformemente valida, in certi casi diventa necessario deformare i percorsi di integrazione.
- Usando coordinate di cono luce possiamo porre

$$p^\mu = (p^+, 0, \mathbf{0}_\perp) , \quad (p')^\mu = (0, (p')^-, \mathbf{0}_\perp) .$$

- **Nota**: Per un generico quadrivettore,  $v^\mu = (v^+, v^-, \mathbf{v}_\perp)$ ,  
 $v^\pm = (v^0 \pm v^3)/\sqrt{2}$ ,  $v^2 = 2v^+v^- - |\mathbf{v}_\perp|^2$ .
- Consideriamo per esempio l'integrale  $I_0$ , che dà origine al polo doppio virtuale. Nell'approssimazione eikonale e in  $d = 4$

$$I_0^{(\text{eik})} = \frac{1}{32\pi^4 q^2} \int \frac{dk^+ dk^- d^2 k_\perp}{(-k^- + i\epsilon)(k^+ + i\epsilon)(2k^+k^- - |\mathbf{k}_\perp|^2 + i\epsilon)} .$$

Si vede che ci sono **tre regioni** di integrazione che danno luogo a **divergenze**. Si possono parametrizzare introducendo una **variabile di scaling**  $\lambda$ .

$$k^\mu \sim \lambda \sqrt{q^2} , \quad \forall \mu , \quad \rightarrow \quad \text{IR} ;$$

$$k^\pm \sim \sqrt{q^2} , k^\mp \sim \lambda^2 \sqrt{q^2} , |\mathbf{k}_\perp|^2 \sim \lambda \sqrt{q^2} , \quad \rightarrow \quad \text{COLL} .$$

## Ordinamento angolare

L'approssimazione soffice è di notevole **importanza pratica** in QCD perturbativa.

- Mette in evidenza le proprietà universali della radiazione soffice di colore (**trasparenza di colore, ordinamento angolare**)
- E' punto di contatto tra la situazione perturbativa e quella non-perturbativa (**risommazioni, Monte-Carlo di adronizzazione**)

L'esempio più semplice di **ordinamento angolare** si ha considerando la sezione d'urto **differenziale**  $d\sigma_{q\bar{q}g}$  in un sistema in cui il fotone che decade ha grande impulso  $\mathbf{q}$ . Allora il quark e l'antiquark formano tipicamente un **angolo piccolo** ( $\theta_{pp'} \ll \pi$ ), e si ha

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{q\bar{q}g}^{\text{soft}} &= d\sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} d\cos\theta_k \frac{d\phi_k}{2\pi} \frac{1 - \cos\theta_{pp'}}{(1 - \cos\theta_{pk})(1 - \cos\theta_{p'k})} \\
 &= d\sigma_{q\bar{q}} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} d\cos\theta_k \frac{d\phi_k}{2\pi} \frac{1}{2} (W_q + W_{\bar{q}})
 \end{aligned}$$

dove

$$W_q = \frac{1 - \cos\theta_{pp'}}{(1 - \cos\theta_{pk})(1 - \cos\theta_{p'k})} + \frac{1}{(1 - \cos\theta_{pk})} - \frac{1}{(1 - \cos\theta_{p'k})} .$$

mentre  $W_{\bar{q}}$  si ottiene con lo scambio  $p \leftrightarrow p'$ .

L'originale distribuzione angolare è **positiva definita**, ma **singolare** sia per emissione parallela al quark che all'antiquark. Le distribuzioni parziali  $W_i$  non sono positive definite, ma hanno notevoli proprietà.

## Proprietà di $W_q$ e $W_{\bar{q}}$

- $W_q$  è singolare solo quando  $\cos \theta_{pk} \rightarrow 1$ , al contrario di  $W_{\bar{q}}$ .
- La media azimutale di  $W_q$  (scelto come asse  $\mathbf{p}$ ) si annulla se  $\theta_{pk} > \theta_{pp'}$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi W_q(\phi) = \frac{2}{1 - \cos \theta_{pk}} \Theta(\theta_{pp'} - \theta_{pk}) ,$$

come si dimostra usando

$$\cos \theta_{p'k} = \cos \theta_{pk} \cos \theta_{pp'} + \sin \theta_{pk} \sin \theta_{pp'} \cos \phi .$$

Un'analogia equazione vale per  $W_{\bar{q}}$ .

- Le medie azimutali sono positive definite e possono essere interpretate come distribuzioni di probabilità per l'emissione di gluoni soffici separatamente dal quark e dall'antiquark.

**Dunque:** la distribuzione della radiazione soffice in media è data dalla somma di contributi scorrelati del quark e dell'antiquark, che si annullano al di fuori dei coni costruiti ruotando la direzione di uno dei fermioni intorno all'altro.

## Commenti

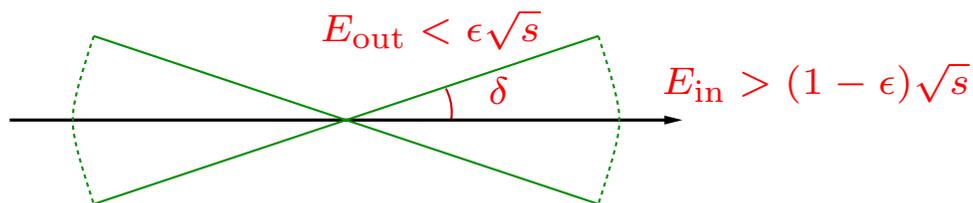
- Queste considerazioni si generalizzano ad ordini più elevati. Gluoni irradiati successivamente sono vincolati in media all'interno dei coni definiti dai gluoni e quark precedenti.
- L'evoluzione perturbativa nel limite soffice è locale nello spazio delle fasi, e tende a costruire singoletti di colore all'interno di fasci collimati di particelle (jet).

## Jet di Sterman–Weinberg

Le configurazioni degli impulsi responsabili per le singolarità e per la loro cancellazione sono quelle **infrarosse** e **collineari**, come previsto.

**Dunque** non è necessario integrare l'emissione reale sull'intero spazio delle fasi per ottenere un risultato finito, è **sufficiente** considerare **osservabili sufficientemente inclusive**, tali che l'integrazione includa le configurazioni IR e C.

Prototipo: la sezione d'urto a **due jet**



**Definizione:** un evento si dice **a due jet** se  $\exists$  due coni opposti al vertice di semiapertura  $\delta$ , tali che tutta l'energia, tranne al più una frazione  $\epsilon$ , fluisca all'interno dei coni.

**A livello partonico:**

- **Tutti** gli eventi all'ordine leading sono **a due jet**.
- All'ordine  $\alpha_s$  sono a due jet gli eventi in cui il gluone è **IR** (in qualsiasi direzione sia emesso), o **COLL.** (con qualsiasi energia). Tutti gli altri eventi sono **a tre jet**.
- I contributi virtuali sono a due jet. Dunque la sezione d'urto partonica a due jet è **finita**.

## In formule:

- All'ordine  $\alpha_s^0$  si ha  $\sigma_{2j}^{(0)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(0)} = N_c \sum_f q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3q^2}$ .
- All'ordine  $\alpha_s$  si hanno **solo** eventi a due o a tre jet, dunque

$$\sigma_{2j}^{(1)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(1)} - \sigma_{3j}^{(1)}(\epsilon, \delta),$$

- $\sigma_{3j}^{(1)}$  si calcola facilmente dall'**emissione reale** imponendo gli opportuni **tagli** sullo spazio delle fasi. In  $d = 4$

$$\begin{aligned} \left[ -H_{\mu}^{\mu} \right]_{3j}^{(1,R)} &= 2N_c C_F \sum_f q_f^2 \alpha \frac{\alpha_s}{\pi} q^2 \int_{2\epsilon}^1 dz \\ &\times \int_{\delta^2}^{1-\delta^2(1-z^2/2)} dy \left[ \frac{z(1-y)}{y(1-yz)^2} + \frac{1-z}{yz(1-y)} \right]. \end{aligned}$$

- Si trovano facilmente i **termini dominanti** per  $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ . Combinando con la parte leptonica

$$\sigma_{3j}^{(1)}(\epsilon, \delta) = \sigma_{\text{tot}}^{(0)} C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \left[ 4 \log(\delta) \log(2\epsilon) + 3 \log(\delta) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{4} \right].$$

## Osservazioni:

- La sezione d'urto totale è dominata da eventi a due jet per grandi  $q^2$  (**libertà asintotica** per i jet ...).
- Al **crescere di  $q^2$**  il risultato perturbativo resta attendibile per conii più stretti, i jet sono **più collimati**.
- Si può calcolare (e verificare sperimentalmente) la **distribuzione angolare** degli eventi a due jet  $d\sigma_{2j}/d\cos\theta \propto 1 + \cos^2\theta$ , valida per quark di **spin 1/2**.

## Variabili di tipo event–shape

Il meccanismo della cancellazione delle divergenze IR e C suggerisce una **ulteriore generalizzazione**: studiare distribuzioni di osservabili dipendenti dallo stato finale ma che assegnino **uguali pesi** a eventi che differiscano per radiazione IR o C.

Dato uno stato finale a  $m$  partoni, sia  $E_m(p_1, \dots, p_m)$  l'osservabile. la **distribuzione** è definita da

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{1}{2q^2} \sum_m \int d\text{LIPS}_m \overline{|\mathcal{M}_m|^2} \delta(e - E_m(p_1, \dots, p_m)) ,$$

mentre i momenti (e in particolare il valor medio) sono

$$\langle e^n \rangle = \int_{e_{\min}}^{e_{\max}} de e^n \frac{d\sigma}{de} .$$

**Nota:** Si tratta di sezione d'urto “**pesate**”.

All'ordine  $\alpha_s^{m-1}$  **si sommano** i contributi con  $m + 1$  partoni nello stato finale, con un partone virtuale e  $m$  reali, e così via.

$$\sigma(e) \Big|_{\mathcal{O}(\alpha_s^{m+1})} = \int d\sigma_{m+1}^{(R)} + \int d\sigma_m^{(1V)} + \dots .$$

La cancellazione IR-C è preservata se l'osservabile assume **lo stesso valore** per configurazioni che differiscono per radiazione IR o C.

$$\lim_{p_j^\mu \rightarrow 0} E_{m+1}(p_1, \dots, p_j, \dots) = E_m(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots) ,$$

$$\lim_{p_k^\mu \rightarrow \alpha p_j^\mu} E_{m+1}(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k, \dots) = E_m(p_1, \dots, p_j + p_k, \dots) .$$

## Esempi di variabili di tipo event–shape

Esiste una considerevole varietà di **event shapes**. Alcuni esempi

- Il **thrust**

$$T_m = \max_{\hat{n}} \frac{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i \cdot \hat{n}|}{\sum_{i=1}^m |\mathbf{p}_i|} .$$

Evidentemente  $0 < T_m \leq 1$ , e  $T_m = 1$  corrisponde a due fasci collimati di particelle “back to back”.

- Il **parametro C**

$$C_m = 3 - \frac{3}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{(p_i \cdot p_j)^2}{(p_i \cdot q)(p_j \cdot q)} .$$

Anche qui  $0 \leq C_m \leq 1$ ; eventi a due jet hanno  $C = 0$ . La definizione è motivata in termini degli autovalori della parte spaziale del tensore energia impulso,  $C = 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$ .

- Le **masse di jet**

$$\rho_m^{(H)} = \frac{1}{q^2} \left( \sum_{p_i \in H} p_i \right)^2$$

$H$  è uno dei due emisferi individuati dall'asse del thrust.

### Osservazioni

- Le distribuzioni perturbative sono **singolari** nel limite a **due jet** (logaritmi del tipo  $\alpha_s^n \log^{2n-1} C$ ), ma i valori medi sono finiti.
- Notevole **rilevanza fenomenologica** (esempio: determinazione di  $\alpha_s$ , studio di correzioni di adronizzazione).
- Altre **definizioni** di eventi a **molti jet** possono essere viste come particolari event shapes.

## Un paragone con QED

Anche in QED ci sono divergenze IR e, nel limite di massa nulla, collineari. Alcune similitudini e differenze.

- In QED, consideriamo per esempio il processo  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .
  - $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  diverge a partire da  $\mathcal{O}(\alpha^3)$ .
  - Dunque  $\sigma_{\text{Born}}$  non è una buona approssimazione di  $\sigma$ . Non è un problema. Ciò che si osserva è  $\sigma_{\text{tot}}(\Delta) = \sum_n \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- + n\gamma, \Delta)$ , e per  $\sigma_{\text{tot}}(\Delta)$ , che è finita,  $\sigma_{\text{Born}}$  è una buona approssimazione.
  - Le divergenze IR in QED si risommano esplicitamente

$$\sigma_{\text{tot}}(\Delta) = \sigma_{\text{fin}} \exp \left[ \frac{\alpha}{\pi} \log \left( \frac{\Delta^2}{q^2} \right) f(m^2, q^2) \right].$$

dunque  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_{\text{tot}}(\Delta) = 0$ .

- Interpretazione: non è possibile produrre solo  $\mu^+\mu^-$ ; gli stati asintotici di QED non sono fermioni isolati.
- In QCD, considerando  $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ , la situazione è quasi analoga.
  - $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$  diverge a partire da  $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s)$ .
  - Dunque  $\sigma_{\text{Born}}$  non è una buona approssimazione di  $\sigma = 0$  (confinamento). Invece è una buona approssimazione per  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$ , che è finita.
  - Interpretazione: non è possibile produrre solo  $q\bar{q}$ ; gli stati asintotici di QCD non sono quark e gluoni.

## Sulle singolarità dei diagrammi di Feynman

Per studiare a tutti gli ordini le divergenze IR e C è necessario caratterizzare la generica struttura delle singolarità dei diagrammi di Feynman. Cominciamo da un esempio semplice,  $I_0$ .

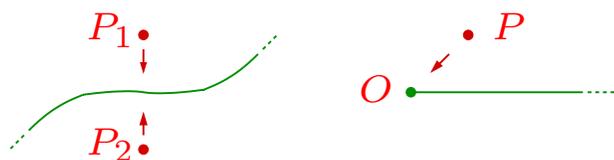
### Un esempio: il fattore di forma scalare

Introduciamo parametri di Feynman  $y_1, y_2, y_3$ . Allora

$$I_0 = 2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 \prod_{i=1}^3 dy_i \frac{\delta(1 - y_1 - y_2 - y_3)}{[y_1 k^2 + y_2(p - k)^2 + y_3(p' + k)^2 + i\epsilon]}.$$

Sia  $D_0$  il denominatore. Le uniche possibili singolarità di  $I_0$  corrispondono a superfici dove  $D_0 = 0$ . Tuttavia

- L'integrando è una funzione delle variabili complesse  $k^\mu, y_i$ , con struttura analitica determinata dalla prescrizione  $i\epsilon$ .
- L'annullarsi di  $D_0$  sul contorno di una integrazione non è sufficiente per determinare una singolarità. Il contorno può essere deformato.
- Solo in due casi non si può evitare la singolarità deformando: contorno intrappolato tra due poli, oppure singolarità di bordo, un polo migra a un estremo di integrazione.



- **Singularità di  $I_0$** 
  - Gli integrali in  $dk^\mu$  non possono avere singolarità di bordo ( $I_0$  è UV convergente). Tuttavia  $D_0$  è quadratico in  $k^\mu$ , quindi i due poli **possono intrappolare** il contorno se

$$\frac{\partial}{\partial k^\mu} D_0 (y_i, k^\mu, p, p') = 0 .$$

- Gli integrali in  $dy_i$  possono **solo** avere singolarità di bordo (in  $y_i = 0$ ), dato che  $D_0$  è lineare in  $y_i$ . **Alternativamente**,  $D_0$  può essere indipendente da  $y_i$  sulla superficie  $D_0 = 0$ , per cui  $y_i$  diventa inutilizzabile per la deformazione.
- **Equazioni di Landau per  $I_0$**   
**Condizione necessaria** per una singolarità di  $I_0$  è che **tutte** le variabili di integrazione siano intrappolate. Ciò è espresso dalle **equazioni di Landau**

$$y_1 k^\mu - y_2 (p - k)^\mu + y_3 (p' + k)^\mu = 0 \quad \text{e}$$

$$y_i = 0 \quad \text{oppure} \quad l_i^2 = 0 ,$$

dove  $l_i^\mu$  è l'impulso della linea con parametro  $y_i$ .

- **Soluzioni delle equazioni di Landau**  
 E' facile trovare le soluzioni previste.

$$k^\mu = 0 ; y_2/y_1 = y_3/y_1 = 0 \quad \text{IR}$$

$$k^\mu = \alpha p^\mu ; y_3 = 0 ; \alpha y_1 = (1 - \alpha) y_2 \quad \text{C}$$

$$k^\mu = -\beta p^\mu ; y_2 = 0 ; \beta y_1 = (1 - \beta) y_3 \quad \text{C}$$

Riconosciamo le note singolarità IR e C. Esistono **altre soluzioni** delle equazioni di Landau?

- **Rappresentazione fisica di Coleman–Norton**

La **ricerca delle soluzioni** delle equazioni di Landau è **semplificata** dal fatto che esse ammettono una semplice **rappresentazione fisica**. Si osservi.

- Se una linea del loop è off-shell deve essere  $y_i = 0$ .
- Sia  $\Delta x_i^\mu \equiv y_i l_i^\mu$ , per ogni linea  $l_i$  on-shell. Allora

$$\Delta x_i^\mu = \Delta x_i^0 v_i^\mu \quad ; \quad v_i^\mu = \left( 1, \frac{\mathbf{l}_i}{l_i^0} \right) .$$

**Interpretazione:**  $\Delta x_i^\mu$  descrive la **propagazione classica** di una particella di massa nulla con impulso  $l_i$ .

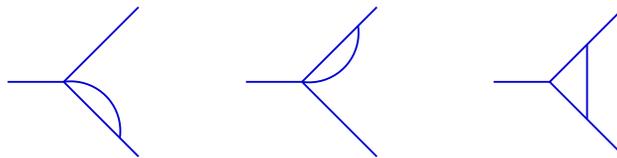
- Le equazioni di Landau per  $I_0$  ora si scrivono

$$\sum_i \sigma(i) \Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{on shell}$$

$$\Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{off shell .}$$

- **Interpretazione:** le soluzioni delle equazioni di Landau sono date da **diagrammi ridotti**, in cui

- le linee **off-shell** sono contratte a **punti**.
- le linee **on-shell** corrispondono a **processi fisicamente possibili** per la propagazione classica di particelle di massa nulla.



## Il caso generale

- **Parametrizzazione di Feynman**

Per mezzo dell'**identità**

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{D_i^{a_i}} = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(a_i)} \int_0^1 \prod_{i=1}^N \left(dy_i y_i^{a_i-1}\right) \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^N y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N y_i D_i\right)^{\sum_{i=1}^N a_i}},$$

un **arbitrario** diagramma di Feynman  $G(p_r)$  può scriversi

$$G(p_i) = \prod_{\text{linee}} \int_0^1 dy_i \delta\left(1 - \sum_i y_i\right) \prod_{\text{loops}} \int d^d k_l \frac{\mathcal{N}(y_i, k_l, p_r)}{[\mathcal{D}(y_i, k_l, p_r)]^N},$$

dove il **denominatore**  $\mathcal{D}$  è la somma dei propagatori

$$\mathcal{D}(y_i, k_l, p_r) = \sum_{\text{linee}} y_i \left(l_i^2(p, k) - m_i^2\right) + i\epsilon,$$

e gli impulsi delle linee sono funzioni **lineari** di  $p_r$  e  $k_l$ .

- **Equazioni di Landau**

$$\sum_i \eta_{ij} \Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{on shell, } \forall j/i \in j,$$

$$\Delta x_i^\mu = 0 \quad \text{off shell.}$$

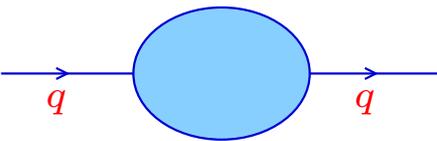
- **Rappresentazione di Coleman–Norton**

Le soluzioni sono nuovamente i **diagrammi ridotti** (linee off-shell contratte a punti), in cui **tutti** i loop restanti sono interpretabili come **processi classici possibili**. Scelto un loop, si devono poter associare ai suoi vertici coordinate  $x_k^\mu$ ,  $k = 1, \dots, M$  tali che

$$\Delta x_{12}^\mu + \dots + \Delta x_{M1}^\mu = 0, \quad \Delta x_{ij}^\mu \equiv x_i^\mu - x_j^\mu.$$

## Esempio: la funzione a due punti

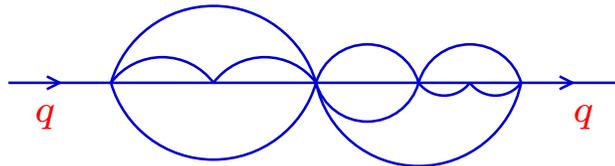
Consideriamo un arbitrario diagramma 1PI per la funzione a due punti  $G(q^2, m^2)$ , in una teoria con una sola specie di particelle di massa  $m^2$ .

$$G(q^2, m^2) = \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{q} \text{---}$$


**Teorema:** le uniche singolarità del diagramma (e quindi di  $G(q^2, m^2)$ ) sono le **soglie normali**  $q^2 = n^2 m^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Dimostrazione:**

- **Le soglie normali sono soluzioni** delle equazioni di Landau. Infatti per  $q^2 > 0$  si può scegliere  $q^\mu = (\sqrt{q^2}, \mathbf{0})$ . Il processo di Coleman–Norton è la creazione di  $n > 1$  particelle **a riposo**, che restano nello stesso punto, interagendo fino a venire assorbite, per un tempo arbitrario. Un esempio per  $n = 4$



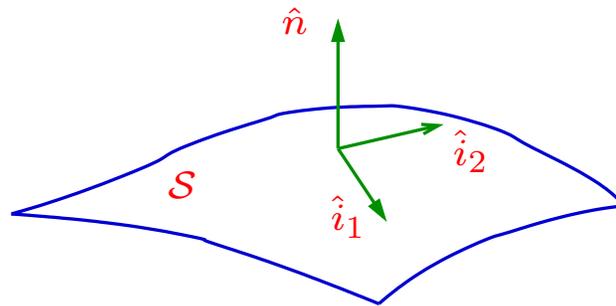
- **Nessun altro diagramma** ridotto **soddisfa** Coleman–Norton. Se una delle particelle create ha **impulso non nullo** le altre coesistenti devono compensarlo muovendosi in direzione opposta. Una volta separate **non possono più incontrarsi** in moto libero.

## Power counting IR e C

Le equazioni di Landau sono solo **condizioni necessarie** per il verificarsi di divergenze IR e C. Se lo **spazio delle fasi** ha **dimensionalità sufficiente** la singolarità è **soppressa** (esempio: divergenze IR in  $\phi_6^3$ ).

Occorre sviluppare tecniche di **power counting**, analoghe a quelle UV, per stabilire la forza delle singolarità. Sommarariamente

- Dato un diagramma, tramite la rappresentazione di **CN** si individua una **superficie intrappolata**  $\mathcal{S}$  nello spazio  $\{k_i^\mu, y_i\}$ .
- Per ogni  $\mathcal{S}$ , si individuano tra le  $\{k_i^\mu\}$  **coordinate intrinseche** (movimento **in**  $\mathcal{S}$ ) e **coordinate normali** (distanze da  $\mathcal{S}$ ).



**Esempio:** per  $I_0$ ,  $k_{\parallel p}$ ,  $k^+$  è intrinseca,  $\{k^-, \mathbf{k}_\perp\}$  normali.

- Si introduce una **variabile di scaling** per determinare il peso relativo (volume di integrazione)/singolarità. Si pone  $n_i = \lambda^{a_i} \hat{n}_i$  e si considera  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\hat{n}_i$  finiti.

**Esempio:** per  $I_0$ ,  $k_{\parallel p}$ ,  $k^- \sim \lambda^2 \sqrt{q^2}$ ,  $|\mathbf{k}_\perp|^2 \sim \lambda \sqrt{q^2}$ .

- Si costruisce l'**integrale omogeneo** per  $\mathcal{S}$ , prendendo la potenza dominante di  $\lambda$  in ogni fattore del grafico

**Esempio:** per  $I_0$ ,  $k_{\parallel p}$ ,  $I_0^{H,C1} = \int dk^- dk^+ d^2 k_\perp (k^- k^+)^{-1} k_\perp^{-2}$ .

- Il **grado di divergenza** è determinato dalla potenza di  $\lambda$  associata all'integrale omogeneo. Per ogni linea,  $l_i^2(p, k) - m_i^2 \rightarrow \lambda^{A_i} f(\hat{n})$ , allora

$$n_S = \sum_i a_i - \sum_i A_i + n_{\text{num}} .$$

$n_S \leq 0$  segnala una divergenza, logaritmica se  $n_S = 0$ .

## Applicazione: finitezza di $R_{e^+e^-}$

La **finitezza** a tutti gli ordini di  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$  segue dal suo legame con il correlatore di due correnti elettromagnetiche, dato dalla relazione di **unitarietà**

$$\sum_C \text{Diagram} = 2 \text{Im} \text{Diagram}$$

che **generalizza**  $TT^\dagger = -i(T - T^\dagger)$ . Posto allora

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}(q) &\equiv ie^2 \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T [J_\mu(x) J_\nu(0)] | 0 \rangle \\ &= \left( q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu} \right) \pi(q^2) , \end{aligned}$$

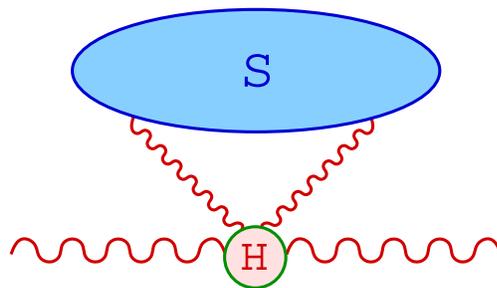
l'**unitarietà** fornisce

$$2 \text{Im} [\rho_{\mu\nu}(q)] = e^2 \sum_n \langle 0 | J_\mu(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | 0 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(q - p_n) ,$$

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}) = \frac{e^2}{q^2} \text{Im} [\pi(q^2)] .$$

E' sufficiente allora dimostrare la finitezza di  $\pi(q^2)$ . Questa segue dalla rappresentazione di Coleman–Norton.

- Nel sistema in cui  $q^\mu = (\sqrt{q^2}, \mathbf{0})$  si vede che non esistono **processi classici** con impulsi non nulli in cui il fotone **decade** e poi **si riaggrega**. Dunque non ci sono superfici intrappolate di impulso non nullo.
- Le **uniche** superfici intrappolate sono quelle date **solo** da particelle di quadrimpulso nullo, con diagramma ridotto



ma queste sono **finite** per **power counting**, come ci si può aspettare (le linee in  $H$  sono off-shell).

- Infatti, dato che le linee fermioniche a impulso nullo sono **meno singolari** di quelle gluoniche, la situazione peggiore si ha se  $S$  è costituito da **solli gluoni**. Ma allora, in  $d$  dimensioni, con  $L_S$  loops e  $g_S$  gluoni in  $S$ ,

$$n_S = d L_S - 2g_S = 2(1 - \epsilon)g_S$$

che è positivo in  $d > 2$ .

## Applicazione: il fattore di forma

Nel caso di  $\Gamma(q^2)$  ci sono divergenze collineari associate ai quark osservati. Il più generale **diagramma ridotto** è

$$\Gamma_\nu(p_1, p_2; \mu^2, \epsilon) = \text{diagramma}$$

The diagram shows a quark loop with vertices labeled H, S, and J. A wavy line (gluon) connects H and S. Two fermion lines (quarks) connect H and J, and S and J. The vertices H and S are circles, while J is an oval.

Sono possibili **ulteriori semplificazioni**

- **Glioni** che connettano  $S$  direttamente ad  $H$  sono soppressi (un propagatore off-shell in più, l'effetto del nuovo propagatore soffice dominato dal nuovo loop soffice).
- **Linee fermioniche** che connettano i diversi sottografici (a parte i necessari  $q$  e  $\bar{q}$ ) sono soppresse.
- In un gauge assiale,  $n \cdot A = 0$ , **solo** la linea del quark connette  $J$  a  $H$  (e così per l'antiquark). Infatti il propagatore del gluone è

$$G_{\mu\nu}^{\text{ax}}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{n \cdot k} - n^2 \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right) .$$

Contraazione con l'impulso del gluone **cancella** il denominatore

$$k^\mu G_{\mu\nu}^{\text{ax}}(k) = \frac{n_\nu}{n \cdot k} - n^2 \frac{k_\nu}{(n \cdot k)^2} ,$$

per cui il grado di singolarità IR e C è ridotto.

Queste considerazioni suggeriscono una **fattorizzazione** della forma  $\Gamma = J_1 J_2 \mathcal{S} H$ , con correzioni  $1/q^2$  ...

## Cenni alla diagrammatica della fattorizzazione

Individuare le **regioni dominanti** nello spazio degli impulsi è solo il **primo passo** verso la fattorizzazione. Occorre poi

- **sfruttare** le semplificazioni dei diagrammi perturbativi nelle regioni dominanti (approssimazioni IR–C, identità di Ward).
- **organizzare** le sottrazioni a tutti gli ordini in modo da evitare **doppi conteggi** (le diverse funzioni fattore hanno definizioni operatoriali, in genere non locali).

**Microesempio:** ancora il fattore di forma a un loop, regione collineare  $k \parallel p_1$ , gauge di Feynman.

- **Cinematica:**  $p_1^\mu = (p_1^+, 0, \mathbf{0}_\perp)$ ,  $k^\mu = (k^+, k^-, \mathbf{k}_\perp)$ , con  $k^+ \gg \{k^-, \mathbf{k}_\perp\}$ .
- Approssimazione di **Grammer-Yennie** al numeratore

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_1) \gamma_\sigma (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^\sigma v(p_2) &\rightarrow \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma^- v(p_2) \\ &\rightarrow \frac{1}{k^+} \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) k^+ \gamma^- v(p_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{k \cdot \hat{u}_2} \bar{u}(p_1) \gamma^+ (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 + \not{k}) \not{k} v(p_2) . \end{aligned}$$

- **Identità di Ward:**  $\not{k} = (\not{p}_2 + \not{k}) - \not{p}_2$ . Si ottiene

$$\Gamma_\mu^{(\text{coll})} \propto \int d^d k \frac{\bar{u}(p_1) \not{p}_2 (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu v(p_2)}{k^2 (p_1 - k)^2 k \cdot u_2} .$$

L'**accoppiamento** del gluone all'antiquark ne riconosce solo carica e direzione, **si eikonalizza**.



## Problemi a più scale e grandi logaritmi

Nei problemi con **una sola scala dura** i logaritmi sono risommati dal gruppo di **rinormalizzazione**

$$\sigma\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = \sigma\left(1, \alpha_s(q^2)\right) .$$

Nella maggior parte dei problemi si hanno tuttavia **più scale dure**. Nel caso in cui  $q_1^2 \gg q_2^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ , l'affidabilità della teoria delle perturbazioni è messa **a rischio** da termini del tipo  $\alpha_s^n \log^p(q_1^2/q_2^2)$ , con  $p = n$  (logaritmi **singoli**) o  $p = 2n$  (logaritmi **doppi**). L'origine è sempre la **dinamica IR-C**. Alcuni **esempi**.

- Il **fattore di forma** (“di Sudakov”).

$$\Gamma\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \log^2\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) + \dots .$$

In una teoria **massless** si pone  $\mu^2 = q^2$ , restano i poli IR-C. In presenza di masse si hanno **doppi** logaritmi  $\log^2(q^2/m^2)$ .

- **DIS**. Le due scale dure sono  $Q^2 = -q^2$  e  $W^2 = (p+q)^2 = Q^2(1-x)/x$ . Ci sono **singoli**  $\log(1/x)$ , risommati dall'equazione di **BFKL**, e **doppi**  $\log(1-x)$ , risommati *à la* Sudakov.
- **Drell-Yan**. Il processo è  $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-(q^2)$ , le due scale sono  $s = (p_1+p_2)^2$  e  $q^2$ . I **doppi**  $\log(1-q^2/s)$  sono risommati *à la* Sudakov.
- La distribuzione in **momento trasverso** in Drell-Yan. Le due scale sono  $q^2$  e  $q_\perp^2$ , con **doppi**  $\log(q_\perp^2/q^2)$ , di Sudakov.

## Fattorizzazione e risommazione

Esiste un profondo legame tra **fattorizzazione** e **risommazione**, come si vede già dal gruppo di **rinormalizzazione**.

$$G_0^{(n)}(p_i, \Lambda, g_0) = \prod_{i=1}^n Z_i^{1/2}(\Lambda/\mu, g(\mu)) G_R^{(n)}(p_i, \mu, g(\mu)) ,$$

$$\frac{dG_0^{(n)}}{d\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d \log G_R^{(n)}}{d \log \mu} = - \sum_{i=1}^n \gamma_i(g(\mu)) .$$

La soluzione di questa equazione consente di **risommare** in forma esponenziale la dipendenza (logaritmica) da  $\mu$ .

L'equazione di **Altarelli–Parisi** analogamente permette di risommare (singoli) logaritmi di  $\mu_F$ . In termini di momenti

$$\tilde{F}_2(N, Q^2, \alpha_s(Q^2)) = \tilde{C} \left( N, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(Q^2) \right) \tilde{f} \left( N, \frac{\mu_F^2}{m^2}, \alpha_s(Q^2) \right) ,$$

$$\frac{d\tilde{F}_2}{d\mu_F} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d \log \tilde{f}}{d \log \mu_F} = \gamma_N(\alpha_s(Q^2)) .$$

Nel caso di problemi con **doppi logaritmi** la fattorizzazione è più complicata, e occorre usare anche l'**invarianza di gauge**.

## Il caso del fattore di forma

Consideriamo la fattorizzazione

$$\Gamma \left( \frac{q^2}{\mu^2} \right) = J_1 \left( \frac{(p_1 \cdot n_1)^2}{\mu^2 n_1^2} \right) J_2 \left( \frac{(p_2 \cdot n_2)^2}{\mu^2 n_2^2} \right) \mathcal{S}(u_i \cdot n_i) H \left( \frac{q^2}{\mu^2}, n_i \right) .$$

Il fattore di forma è **invariante di gauge**, dunque

$$\frac{\partial \log \Gamma}{\partial p_1 \cdot n_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial \log J_1}{\partial \log(p_1 \cdot n_1)} = -\frac{\partial \log H}{\partial \log(p_1 \cdot n_1)} - \frac{\partial \log \mathcal{S}}{\partial \log(u_1 \cdot n_1)}.$$

Le due funzioni dipendono da argomenti diversi. Si scrive allora

$$\frac{\partial \log J}{\partial \log q} = K_J(\alpha_s(\mu^2), \epsilon) + G_J\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right).$$

La funzione  $K$  contiene **tutte le singolarità** in  $\epsilon$  ( $H$  è **finita** per  $\epsilon \rightarrow 0$ ). La funzione  $G$  contiene **tutta** la dipendenza da  $q$ .

E' facile vedere che la dipendenza da  $q$  dell'**intero** fattore di forma è data da un'equazione di **forma identica**. Inoltre il fattore di forma è invariante per il **gruppo di rinormalizzazione**, dunque

$$\frac{dG}{d \log \mu} = -\frac{dK}{d \log \mu} = \gamma_K(\alpha_s(\mu)),$$

con una dimensione anomala finita e indipendente da  $q$ .

L'equazione per  $\Gamma$  può ora essere risolta. Dato che  $\Gamma$  è **divergente**, occorre mantenere la dipendenza da  $\epsilon < 0$  **consistentemente**.  $\alpha_s(\mu^2)$  diventa  $\alpha_s(\mu^2, \epsilon)$  e si ha  $\Gamma(q^2 = 0, \epsilon < 0) = 0$ ; allora

$$\Gamma\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right) = \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^{-Q^2} \frac{d\xi^2}{\xi^2} \left[ K(\epsilon, \alpha_s(\mu^2)) + G\left(-1, \bar{\alpha}\left(\frac{\xi^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right), \epsilon\right) + \frac{1}{2} \int_{\xi^2}^{\mu^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} \gamma_K\left(\bar{\alpha}\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2), \epsilon\right)\right)\right]\right\}.$$

L'esponenziazione è **non banale**, l'esponente ha solo **poli singoli** in  $\epsilon$  della forma  $\alpha_s^n / \epsilon^{n+1}$ .

## IL caso del thrust

La distribuzione di thrust ha **singolarità** del tipo  $\alpha_s^n \log^{2n-1}(1-T)/(1-T)$ , che possono essere **risommate** con metodi analoghi.

Nel limite  $T \rightarrow 1$  la distribuzione può essere **fattorizzata** come  $\Gamma$ . Le funzioni  $J$  ora entrano nello **stato finale**, per cui hanno una **massa** invariante  $m_J^2 \neq 0$ ,  $m_J^2 \propto (1-T)$  per  $T \rightarrow 1$ .

$$\sigma(N) \equiv \frac{1}{\sigma_0} \int_0^1 dT T^N \frac{d\sigma}{dT} = \hat{J}_1 \left( \frac{q^2}{N\mu^2}, \frac{(p_1 \cdot n)^2}{n^2\mu^2} \right) \hat{J}_2 \hat{S} \hat{H} .$$

In un gauge assiale, i **logaritmi leading** sono contenuti nelle funzioni  $J$ , che obbediscono una equazione del tipo noto.

$$\frac{\partial \log \hat{J}}{\partial \log q} = \hat{K}_J \left( \frac{q^2}{N\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) + \hat{G}_J \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right) .$$

Si esprime  $\hat{J}(N)$  in funzione di  $\hat{J}(1)$  e di  $\alpha_s(\mu^2/N)$ , come

$$\hat{J}(\mu^2) = \hat{J}\left(\frac{\mu^2}{N}\right) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{q^2/N}^{q^2} \frac{d\lambda^2}{\lambda^2} \left( \log \frac{\mu}{\lambda} \Gamma_{\hat{J}}(\alpha_s(\lambda^2)) - \Gamma'_{\hat{J}}(\alpha_s(\lambda^2)) \right) \right] .$$

I **logaritmi leading** sono determinati da  $\Gamma_{\hat{J}} = \gamma_K + \dots = 2C_F\alpha_s/\pi + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ . **Trascurando** gli effetti di **running coupling** si trova  $\hat{J} \sim \exp(\log^2 N)$ . L'antitrasformata di Mellin è

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} = -2C_F \frac{\alpha_s \log(1-T)}{\pi (1-T)} \exp \left[ -C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \log^2(1-T) \right] .$$

**Nota:**  $d\sigma/dT \rightarrow 0$  per  $T \rightarrow 1$  (“soppressione di Sudakov”).

## Ai confini della teoria perturbativa

Le risommazioni **saggiano i limiti** della teoria perturbativa. Si ottengono infatti integrali della forma

$$f_a(q^2) = \int_0^{q^2} \frac{dk^2}{k^2} (k^2)^a \alpha_s(k^2),$$

Si osserva esplicitamente la **non-convergenza** della teoria delle perturbazioni a ordini elevati, effetto del **polo di Landau**. Infatti

$$\alpha_s(k^2) = \frac{\alpha_s(q^2)}{1 + \beta_0 \alpha_s(q^2) \log(k^2/q^2)}.$$

Posto  $z \equiv \log q^2/k^2$ , si osserva che

- La serie perturbativa in potenze di  $\alpha_s(q^2)$  **diverge**.

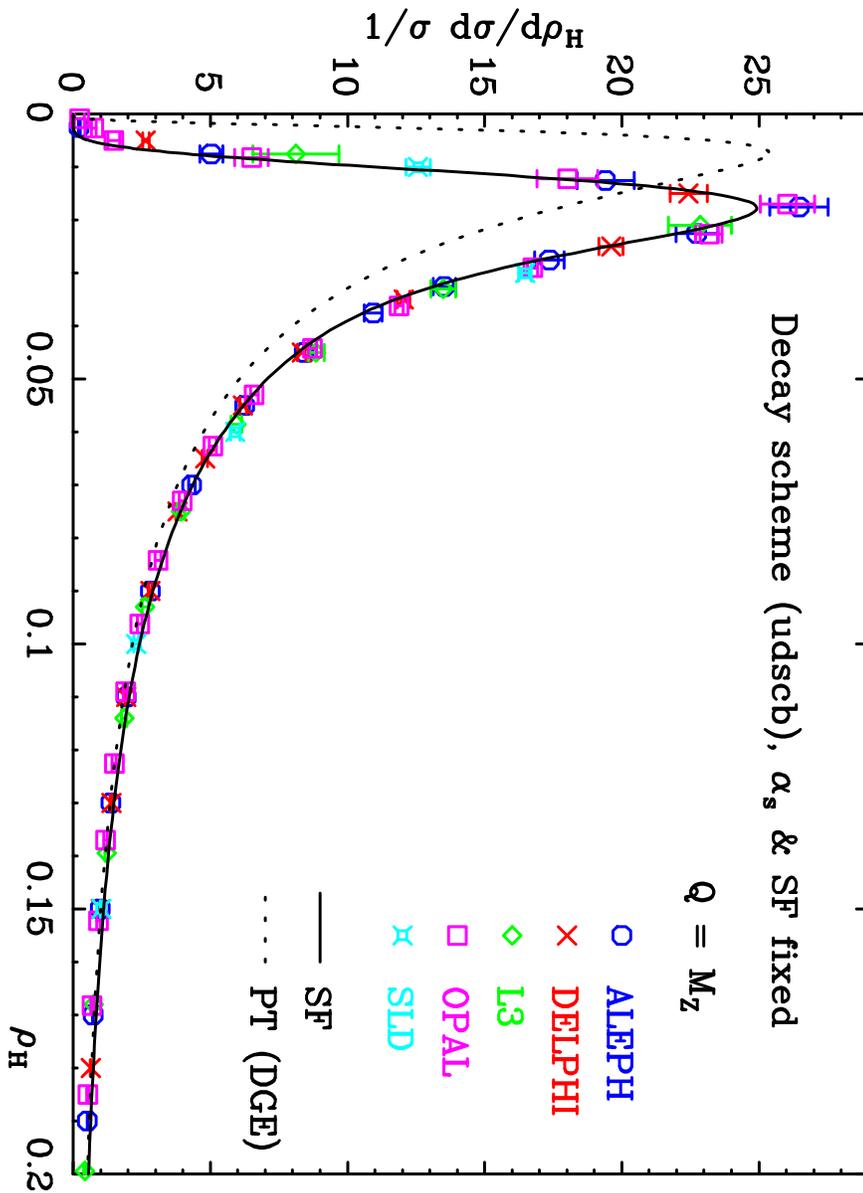
$$f_a(q^2) = (q^2)^a \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^n \alpha_s^{n+1}(q^2) \int_0^{\infty} dz e^{-az} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \alpha_s^n n!.$$

- Il risultato è **ambiguo**, ma l'ambiguità è **soppressa** da potenze di  $q^2$ . Infatti

$$f_a(q^2) = (q^2)^a \alpha_s(q^2) \int_0^{\infty} dz \frac{e^{-az}}{1 - \beta_0 \alpha_s(q^2) z}.$$

Il polo di Landau sul cammino di integrazione induce una ambiguità dell'ordine del residuo

$$|\delta f_a(q^2)| \propto \exp \left[ -\frac{a}{\beta_0 \alpha_s(q^2)} \right] = \left( \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{q^2} \right)^a.$$



Un esempio recente di dati e previsioni teoriche. Il grafico presenta la distribuzione della heavy jet mass nei dati sperimentali di LEP a  $q^2 = M_Z^2$ , confrontata con un calcolo teorico risommato e con due diversi modi di migliorare la previsione teorica includendo contributi soppressi di ordine  $1/Q$  (da un lavoro di E. Gardi e J. Rathsman, [hep-ph/0201019](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0201019)).