

Alcuni Esercizi per Metodi Matematici II

La lista verrà ampliata nelle prossime settimane. Controllate periodicamente.

Funzioni analitiche

FA01: Discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ esiste l'integrale:

$$I = \int_1^\infty \frac{(x-1)^\alpha}{(x+1)^3} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$ riconducendolo ad un integrale su un cammino opportuno nel campo complesso.

FA02: Calcolare la somma dei residui nei *poli* della funzione

$$F(z) = \frac{2z^6 + 2z^5 - z + 1}{z^6 - 4z^5 + 3}.$$

FA03: Studiare la funzione:

$$f(z, \alpha) = [z^\alpha(1-z)]^{1/3},$$

Calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^1 f(z, 5),$$

riconducendolo a un integrale lungo un opportuno cammino chiuso nel piano complesso.

Verificare che il risultato coincide con quello che si ottiene utilizzando la funzione Γ di Eulero.

Suggerimento:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

FA04: Verificare che:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} dx = -\frac{1}{2}, \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

FA05: Discutere per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ esiste e calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Sviluppi asintotici

SA01: Ricavare la formula di Stirling utilizzando il metodo del punto a sella.

SA02: Sviluppare asintoticamente l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x\nu}}{(\nu^2 + 1)^2} d\nu = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (2n)! (n+1)}{x^{2n+1}} \quad (1)$$

Equazioni differenziali

ED01: Trovare la soluzione generale nell'intorno di $z = 0$ dell'equazione differenziale

$$(z - 2)^2 u'' + \frac{1}{2z}(7z^2 - 16z + 4)u' + u = 0$$