Energia in decadimento α

^{226}Ra: $v_\alpha = 2.5 \times 10^7 \ m/sec$

$$\frac{K}{m} = \frac{1}{2} v^2 = 3.1 \times 10^{14} \ Joules/kg$$

$$m_\alpha = \frac{4}{226} m_{\text{Ra}}$$

Energia rilasciata nel decadimento di 1 kg di ^{226}Ra:

$$\frac{4}{226} \times 3.1 \times 10^{14} \ Joules/kg = 5.5 \times 10^{12} \ J/kg$$

Bruciando gas $\sim \ 10^7 \ J/kg$

Scattering di Rutherford: 1909–1911

Geiger e Marsden:particelle α incidenti su una lamina sottile possono tornare indietro
R. conosceva $\approx m_e$ e m_α $m_e << m_\alpha$. 1911: Millikan
Dalla conservazione di energia e impulso in d=1:

$$m_A(v_{A0}) + m_B(v_{B0}) \to m_A(v_{A1}) + m_B(v_{B1})$$

$$v_{A1} = \frac{(m_A - m_B)v_{A0} + 2m_B v_{B0}}{(m_A + m_B)}$$

$$v_{B1} = \frac{(m_B - m_A)v_{B0} + 2m_A v_{A0}}{(m_A + m_B)}$$

se $v_{A0} = 0$:

$$v_{B1} = \frac{(m_B - m_A)v_{B0}}{(m_A + m_B)} \quad v_{A1} = \frac{2m_B v_{B0}}{(m_A + m_B)}$$

La particella α deve incontrare un oggetto con massa molto più grande. Non può essere un elettrone.

Modello

- Nucleo contenente quasi tutta la massa dell'atomo con carica Ze
- Z elettroni con carica distribuita uniformemente in una sfera di raggio $R \sim \times 10^{-8}\ m$

Ad una distanza r dal centro del sistema:

$$F = 2Ze^2k_e\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987 \times 10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$$

$$e = 1.64 \times 10^{-19}\ C \quad m_e = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$$

$$\frac{m_\alpha}{q_\alpha} = 2 \times 10^{-31}\ \frac{kg}{C} \qquad v_\alpha = 2.09 \times 10^7 \frac{m}{sec} \sim \frac{c}{10}$$

$$2e^2k_e = 2\times\left(1.64 \times 10^{-19}\right)^2\times\left(8.987 \times 10^9\right) = 6.5\times10^{-29}\ Nm^2$$

$V = 0$ a $r = R$ e fuori della sfera

$$V = 2Ze^2k_e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{R}\right)$$

L'energia della particella è:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \\ &= 2 \times \left(1.64 \times 10^{-19}\right) \times \left(2 \times 10^{-31}\right) \times \left(2.09 \times 10^7\right)^2 \\ &= 2.9 \times 10^{-12}\ J \end{aligned}$$

Consideriamo una particella che punta esattamente sul centro, si ferma e torna indietro. Quando l'α si ferma deve essere:

$$E = E_0 = 2Ze^2 k_e \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} \right)$$
$$= Z \times 6.5 \times 10^{-29} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{R} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} \right)$$

Gli ultimi due termini nella parentesi sono $O(10^8)$ quindi gli elettroni sono irrilevanti

$$r_{min} = \frac{Z \times 6.5 \times 10^{-29}}{2.9 \times 10^{-12}}\, m \sim 2Z \times 10^{-17}\, m \sim 1.5 \times 10^{-15}\, m$$

Ipotesi di Rutherford

- $m_N >> m_\alpha$: si può ignorare il rinculo del N
- La meccanica classica è applicabile: leggi di conservazione
- Il nucleo può essere trattato come puntiforme
- Non ci sono forze oltre quella Coulombiana
- L'urto è elastico, non c'è eccitazione

Analisi dimensionale

Vogliamo trovare la dipendenza dell'angolo di scattering ϕ dal parametro d'urto b

$$a = \frac{F}{m_\alpha} = 2Ze^2 k_e \left(\frac{1}{m_\alpha r^2} \right)$$

ϕ dipende da $Z,\ e,\ k_e,\ m_\alpha$ solo attraverso $\frac{2Ze^2k_e}{m_\alpha}$
r è una variabile dinamica, non un dato del problema

$$\left[\frac{2Ze^2 k_e}{m_\alpha} \right] = \left[ar^2 \right] = \left[\frac{d^3}{t^2} \right]$$

Altri input:

$$[v] = \left[\frac{d}{t} \right] \qquad [b] = [d]$$

ϕ è adimensionale (radianti). Per eliminare il tempo divido per v^2

$$\left[\frac{2Ze^2 k_e}{m_\alpha v^2} \right] = [d]$$

$\frac{2Ze^2k_e}{m_\alpha b v^2}$ è adimensionale

$$b(\phi) = \frac{2Ze^2 k_e}{m_\alpha v^2} \frac{1}{f(\phi)}$$

Rutherford trova $f(\phi) = \tan(\phi/2)$
se v^2 cresce b deve diminuire
$b = \infty$ per $\phi = 0$
$b = 0$ per $\phi = \pi$

Non conoscendo il parametro b di una data α dobbiamo studiare la distribuzione degli angoli ϕ di un gran numero di particelle α.

Tutte le α con $b < b_0 = b(\phi_0)$ per un qualsiasi atomo della lamina vengono deflesse di un angolo $\phi > \phi_0$. Per ogni atomo esiste un cerchio di area $\sigma = \pi b_0^2$ tale che se una particella α lo colpisce questa subisce una deviazione maggiore di ϕ_0. σ = sezione d'urto

Per $\phi_0 = 90°$ e $v = 2.09\ m/sec$, $b_0 = 1.7 \times Z \times 10^{-16}\ m$ quindi $\sigma(90°) = 8.9 \times Z^2 \times 10^{-32}\ m^2$

Il numero di atomi è: $N = \rho S d/Au$, A=peso atomico, $u = 1.7 \times 10^{-27}\ kg$=unità di massa atomica

$$N = \frac{\left(1.93 \times 10^4\ Kg/m^3\right)\left(4 \times 10^{-7}\ m\right) \times S}{197 \times (1.7 \times 10^{-27}\ kg)}$$
$$= 2.3 \times 10^{22} \times S \quad \text{atomi}$$

La probabilità che una particella sia deviata ad un angolo $\phi > 90°$ è:

$$P(90°) = \frac{N\sigma(90°)}{S} = 2.3 \times 10^{22} \times 8.9 \times Z^2 \times 10^{-32}$$
$$= 2 \times 10^{-9} \times Z^2$$

Quindi l'area totale dei dischetti è piccola rispetta al totale e possiamo ignorare la possibilità che due dischetti si sovrappongano

N.B. : Il risultato classico e quello quantistico coincidono solo per potenziali $V \propto r^{-1}$. Rutherford è stato fortunato.

Dopo la scoperta del nucleo

- 1913 Modello di Bohr dell'atomo. Spiegazione dei dati spettroscopici.
- 1911-1913 Leggi di spostamento. Determinazione delle famiglie radioattive.
- 1913 Moseley: assegnazione del numero atomico Z agli elementi da misurazioni degli spettri dei raggi X

$$E_n = -\frac{hcZ^2R_H}{n^2}$$

$$R_H = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1.09678 \times 10^7 \ m^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \times R_H$$